

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KLASİK VE MİKROGERMELİ ORTAM TEORİSİYLE MODELLENEN
PLAKLARIN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ YARDIMIYLA NONLOKAL
TİTREŞİM ANALİZİ**

DOKTORA TEZİ

Soner AYDINLIK

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

AĞUSTOS 2020

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KLASİK VE MİKROGERMELİ ORTAM TEORİSİYLE MODELLENEN
PLAKLARIN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ YARDIMIYLA NONLOKAL
TİTREŞİM ANALİZİ**

DOKTORA TEZİ

**Soner AYDINLIK
(509152211)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ

AĞUSTOS 2020

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 50952211 numaralı Doktora Öğrencisi Soner AYDINLIK, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “KLASİK VE MİKROGERMELİ ORTAM TEORİSİYLE MODELLENEN PLAKLARIN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ YARDIMIYLA NONLOKAL TİTREŞİM ANALİZİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU**
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Gülçin Mihriye MUSLU
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Reşat KÖŞKER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Semra AHMETOLAN
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **23 Temmuz 2020**
Savunma Tarihi : **17 Ağustos 2020**





Aileme,



ÖNSÖZ

Doktora başladığım ilk günden itibaren, tez konumun belirlenmesinden bitimine kadar benden yardımını, bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ'a, bu süreç boyunca bana güvendikleri ve zor zamanlarımda bana destek oldukları için aileme, arkadaşlarıma ve değerli meslektaşım Dr. Öğretim Üyesi Gözde ÖZDEMİR'e çok teşekkür ederim.

Ağustos, 2020

Soner AYDINLIK





İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. KESİRLİ ANALİZ	7
2.1 Caputo Kesirli Türevi	11
3. CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ YARDIMIYLA DİKDÖRTGEN PLAĞIN TİTREŞİM ANALİZİ	13
3.1 Uygulamalar	20
3.1.1 Dört kenarı ankastre (CCCC) bağlı plak	20
3.1.2 Dört kenarı basit bağlı (SSSS) plak	24
3.1.3 Dört kenarı serbest (FFFF) plak	27
3.1.4 Dört kenarı (CFSF) bağlı plak	30
3.1.5 Dört kenarı (CFFF) bağlı plak	33
4. CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ YARDIMIYLA MİKROGERMELİ ORTAM TEORİSİYLE MODELLENEN PLAKLARIN TİTREŞİM ANALİZİ	37
4.1 Uygulamalar	44
4.1.1 Dört kenarı basit bağlı (SSSS) plak	46
4.1.2 Dört kenarı serbest (FFFF) plak	50
4.1.3 Dört kenarı (CFSF) bağlı plak	54
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	69



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Farklı sınır şartları için sınır fonksiyonları	17
Çizelge 3.2 : Dört kenarı ankastre bağlı olan dikdörtgen plağın AAS modu için ilk 12 frekansı	21
Çizelge 3.3 : Dört kenarı ankastre bağlı olan dikdörtgen plağın AAS modu için ilk 3 frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.	23
Çizelge 3.4 : Dört kenarı basit-bağlı kare plağın farklı γ ve α lar için ilk 8 frekans değerleri	25
Çizelge 3.5 : Dört kenarı basit-bağlı kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.	26
Çizelge 3.6 : Dört kenarı serbest kare plağın farklı γ ve α lar için ilk 9 frekans değerleri.	28
Çizelge 3.7 : Dört kenarı serbest kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.	29
Çizelge 3.8 : Dört kenarı (CFSF) basit-bağlı kare plağın farklı γ ve α lar için ilk 8 frekans değerleri.	31
Çizelge 3.9 : Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.	32
Çizelge 3.10 : Dört kenarı (CFFF) bağlı kare plağın farklı modlar ve α lar için ilk 12 frekans değerleri..	34
Çizelge 3.11 : Farklı sınır koşulları için kare plağın $\gamma = 0.1$ ve farklı α lar için ilk 2 frekans değerleri	34
Çizelge 3.12 : Dört kenarı (CFFF) bağlı kare plağın farklı α değerleri için ilk 3 frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.	35
Çizelge 4.1 : Dört kenarı basit bağlı olan mikrogermeli plağın frekansları	44
Çizelge 4.2 : Gauthier materyalinin özellikleri.....	46
Çizelge 4.3 : Dört kenarı basit bağlı kare plağın farklı α değerleri için ilk 11 frekans değerleri	47
Çizelge 4.4 : Dört kenarı basit-bağlı kare plağın farklı α değerleri için ilk 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.	48
Çizelge 4.5 : Dört kenarı basit-bağlı kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı mikro frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.	49
Çizelge 4.6 : Malzeme özellikleri	50

Çizelge 4.7 : Dört kenarı serbest bağlı plağın farklı α değerleri ve farklı simetri modları için frekansların incelenmesi.....	51
Çizelge 4.8 : Dört kenarı serbest kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı frekansının mod şekli ve bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğıştirmelerin mutlak farkı.	52
Çizelge 4.9 : Dört kenarı serbest kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı mikro frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğıştirmelerin mutlak farkı.	53
Çizelge 4.10 : Malzeme özellikleri	54
Çizelge 4.11 : Dört kenarı (CFSF) bağlı olan kare plağın farklı α ve γ değerleri için ilk 8 frekansının incelenmesi.	55
Çizelge 4.12 : Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın farklı α değerleri için ilk 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğıştirmelerin mutlak farkı.	56
Çizelge 4.13 : Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı mikro frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğıştirmelerin mutlak farkı.....	57
Çizelge 4.14 : Farklı sınır koşullarına sahip kare plakların $\gamma = 0.1$ ve farklı l ve α değerleri için ilk 3 frekanslarının incelenmesi.....	58

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1	: Dikdörtgen plağın geometrik gösterimi.	14
Şekil 3.2	: Farklı sınır koşullarına ait sınır fonksiyonları.	17
Şekil 3.3	: Dört kenarı ankastre bağlı kare plağın $\gamma = 0.5$ ve farklı α lar için frekans değerleri..	22
Şekil 3.4	: Dört kenarı basit-bağlı kare plağın $\gamma = 0.1$ ve farklı α lar için frekans değerleri.....	24
Şekil 3.5	: Dört kenarı basit-bağlı kare plağın $\gamma = 0.1$, $l = \{0.2, 0.5, 0.8, 0.9, 0.99\}$ ve farklı α lar için toplam bağıl farkların Δ_{Dif} hesaplanması.....	24
Şekil 3.6	: Dört kenarı serbest kare plağın $\gamma = 0.5$ ve farklı α lar için frekans değerleri	27
Şekil 3.7	: Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın $\gamma = 0.5$ ve farklı α lar için frekans değerleri	30
Şekil 3.8	: Dört kenarı (CFFF) bağlı kare plağın $\gamma = 0.5$ ve farklı α lar için frekans değerleri	33
Şekil 4.1	: $\gamma = 0.1$ ve farklı α değerleri için dört kenarı basit bağlı kare plağın frekans değerleri	46



KLASİK VE MİKROGERMELİ ORTAM TEORİSİYLE MODELLENEN PLAKLARIN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ YARDIMIYLA NONLOKAL TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada dikdörtgen plakların yerel olmayan üç boyutlu titreşim analizi Caputo kesirli türevi yardımıyla incelenmiştir. Kesirli türev son yıllarda mühendislik, fizik, finans, biyoloji gibi birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Kesirli türevin sürekli ortamlar mekaniğine uygulamaları ise, nonlokal problemlerin ve bellekli malzemelerin modellenmesinde literatürde var olan yöntemlere göre yeni bir bakış açısı getirmektedir.

Klasik sürekli ortamlar mekaniğinin gelişmesine büyük katkı sağlayan gerilme tansörü kavramı 19. yy başlarında Cauchy tarafından ortaya konulmuş ve böylece lineer elastisite teorisi için hareket denklemi üç boyutlu duruma genelleştirilmiştir. Ancak bu modelde malzemenin iç karakteristik uzunluğu hesaba katılmadığı için 1960'larda yerel olmayan elastisite teorisi geliştirilmiştir.

Son yıllarda kesirli analizin yaygınlaşmasıyla birlikte yerel olmayan yeni modeller geliştirilmiştir. Bu yeni modellerin temel avantajı, klasik sürekli ortamlar mekaniğinin genel yerel olmayan yapısına benzer olmasının yanı sıra, kesirli türevin tanımından kaynaklanan bazı eklemeler sayesinde fiziksel gerçeklere daha uygun olmasıdır. Ayrıca, kesirli türev kullanımı nedeniyle fiziksel büyüklüklerde meydana gelen birim uyumsuzluğu da birim uyum katsayısı tanımlanarak ortadan kaldırılabilirdiği için genelleştirilmiş kesirli yer değiştirme gradyanları ve kesirli gerilme büyüklükleri gibi büyüklükler, klasik olanlarla aynı fiziksel birimlere sahip olurlar. Mekanikte gerek uzaysal değişkenler ve gerekse de zaman değişkeni üzerinde kesirli analiz yapmak çok daha gerçekçi olduğundan, bu alandaki çalışmalar giderek yaygınlaşmaktadır .

Bu tez çalışmasında nonlokal etkileri yansıtmak için klasik yer değiştirme gradyanları yerine, Caputo kesirli türevi yardımıyla tanımlanan kesirli yer değiştirme gradyanları kullanılmıştır. Burada kabul edilebilir fonksiyonlar olarak sınır fonksiyonlarıyla çarpılmış Chebyshev polinomları alınmıştır. Sınır fonksiyonları plağın temel geometrik sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilmiş, ancak gerilme sınır koşulları dikkate alınmamıştır. Kesirli türevlerin nonlokalite üzerindeki etkisini göstermek için, farklı sınır koşullarına sahip bazı dikdörtgen plakların titreşim analizi incelenmiştir. Sonuçlar, beklentilere uygun olarak kesirli türevin mertebesi klasik türevin mertebesine yaklaştıkça, nonlokal etkinin azalarak elde edilen frekans değerlerinin klasik durum için elde edilen frekans değerlerine yaklaştığını göstermektedir.

Tez çalışmasında klasik titreşim probleminin Caputo kesirli türeviyle incelenmesinin yanı sıra mikrogermeli ortam teorisiyle modellenen dikdörtgen plakların titreşim analizi de Caputo kesirli türevi yardımıyla elde edilmiştir. Mikrogermeli ortam parçacığın klasik şekil değiştirmesinin yanı sıra, bu klasik şekil değiştirmeden bağımsız mikro hacimsel genişleme ve mikro dönme yapabildiği kabulüne dayanmaktadır. Kesirli türev yardımıyla mikrogermeli ortam teorisiyle modellenmiş

plakların titreşim problemini nonlokal teoriyle incelemek hesapları basitleştirilmesiyle beraber klasik teoriye göre daha iyi sonuçlar vermektedir.

Anahtar kelimeler: Nonlokal Teori, Plak Titreşimi, Mikrogermeli Ortam Teorisi, Caputo Kesirli Türevi



NONLOCAL VIBRATION ANALYSIS OF CLASSIC AND MICROSTRETCH PLATES WITH THE HELP OF CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE

SUMMARY

In this study, nonlocal (3-D) vibration analysis of rectangular plates are investigated within the framework of fractional calculus in the sense of Caputo fractional derivative. Fractional derivative has been widely used in many areas such as engineering, physics, finance, biology in recent years. The applications of fractional derivative to the continuum mechanics bring a new perspective in the modeling of nonlocal problems and memory materials according to the existing methods in the literature.

The concept of stress tensor, which plays a major role in the development of continuum mechanics, has been demonstrated by Cauchy in the early 19th century and thus many mechanical problems have been solved. However, in the 1950s, for small scale materials in one-dimensional solids, some deficiencies of the theory in nonlinear displacements under surface stresses in acoustic wave propagations were observed. The concept of non-local elasticity was developed in the 1960s to overcome this handicap due to the Cauchy model not taking into account the internal characteristic length of the material. Nonlocality is that the behavior of the material at one point depends not only on the quantities of the specified point but on the properties of all points in the neighborhood of the specified point and is used widely in the solution of many challenging problems in mechanics.

With the popularity of fractional analysis in recent years, new non-local model definitions are introduced with the help of differential equations of fractional order. Fractional calculus is a branch of mathematical analysis that studies the several different possibilities of defining real or complex number powers of the differentiation operator. The main advantages of these new models are that they resemble the general nonlocal structure of classical continuum mechanics and they are more suitable for physical realities. Besides, unit inconsistency in physical quantities due to using fractional derivative can be overcome by introducing the length scale parameter, thus the generalized fractional displacement gradients or fractional strain quantities have same physical units as the classical ones. Some non-local approaches in the classical theory, such as Eringen's nonlocal approach become equal to take the order of the derivative of the displacement function as fractional order. Fractional analysis can also be used over time variable rather than on spatial variables. This corresponds to the materials with memory in mechanics, indicating that the behavior of the material at a given specified time depends also the mechanical behavior of the material in the past. As it is much more realistic to do fractional analysis on both spatial and time variables, studies in this area are becoming increasingly popular.

With the developing technology of today, the need for materials requiring super mechanical, thermal, electrical and magnetic properties increases rapidly compared to the previous half century. Accurate calculation of stress and deformation in composites are major concern in design of such materials using in bio medical, electronic, automotive, civil, marine and aerospace engineering.

In contrast to these superior features, it is another challenge to make their weight and dimensions are as small as possible. But experiments show that the size effects become dominant in such small dimensional materials. Although Eringen's micropolar and microstretch theories conclude better results than classical continuum theory, they still reflect only contribution of the specified point unless the nonlocal behavior is also taken into account. Applications of non-local theory help to estimate and clarify the behavior of small-scale materials. Eringen used nonlocal kernels to study screw dislocation and Rayleigh surface waves and the dispersion relations for transverse plane waves in linear isotropic nonlocal micropolar elastic solids. Since both micropolar and microstretch theories contain more unknown material constants and high number of complex equations, it is quite difficult to use nonlocal kernels. Using fractional calculus instead of defining nonlocal kernels may overcome these drawbacks.

Studies on the plates with classical theory initiated by Kirchhoff's classical plate theory and based on the primary assumption; the normal of the mid plane remains normal and straight during deformation. Most works about bending, buckling and vibration of plates can be found on the reviews. Reissner introduced the effect of transverse shear deformation for thick plates by using complementary energy principle. Mindlin proposed a first order shear deformation theory with shear correction factors. Liew et al studied the vibration and bending of anisotropic thick plates. Then finite element models are used by many researchers. Comprehensive overviews on buckling and vibration of composites plates are given by Noor and Peters and Leissa. The exact solution for free 3D vibration analysis of thick rectangular plates with simply supported boundary conditions are given by Srinivas et al.

It is necessary to understand vibration characteristics in order to ensure reliable design of micro structured materials. To overcome the deficiencies of the classical or first order shear deformation theories, many theories have been developed for correct prediction of response of the materials having inner structures. Taskin et al. used generalized differential quadrature method to obtain the natural frequencies and modal loss factors for the vibration and damping analysis of three-layered sandwich cylindrical shells with stiff composite faces and a viscoelastic core. Challamel et al. generalized Eringen's non-local elastic model with the help of fractional analysis. This fractional model is perfectly compatible with the dispersive wave properties of the Born-Kármán Lattice model. The elastic wave propagation in the non-local continuum medium is studied by Cottone et al. and Sapora et al. for different values of fractional order derivative.

In the present study, instead of displacement gradients, Caputo fractional derivative is used to reflect nonlocal effects. Due to the symmetry of Chebyshev polynomial, the vibration modes can be classified as symmetric and antisymmetric modes. In such a case, each class can be examined as a different case. Thus, the problem is simplified because a smaller set of eigenvalue equation is dealt with while accuracy remains same. To demonstrate the efficiency of fractional derivative on nonlocality, we consider the rectangular plates with different boundary conditions; (CCCC), (SSSS),

(FFFF), (CFSF), (CFFF), where C, S and F denotes clamped, simply-supported and free boundaries, respectively. The frequency spectrum of rectangular plates for different boundary conditions are given in tables and figures for fractional derivative of different orders (α) and different values of length scale parameter (l). This analysis shows that as the order of the fractional derivative approaches to the classical derivative, the nonlocal effect decreases and the results are become very close to the values of classic ones as expected.

Nonlocal vibration analysis of plates modelled by microstretch theory is also examined by using Caputo fractional derivative in this study. The difficulty in modeling of non-locality in microstretch materials due to the presence of new material constants and high number of complex equations can be overcome by using fractional calculus. The frequency spectrum of plates with different boundary conditions are obtained by Ritz energy method for the different orders of fractional derivative and different values of the length scale parameter. The results are very similar to the values of classic ones as the fractional derivative approaches to the classical derivative. The results indicate also that the non-local impact is getting dominant when the order of the fractional derivatives moves away from the classical derivative order.

Keywords: Nonlocal theory, Microstretch theory, Caputo Fractional Derivative, Plate vibration



1. GİRİŞ

Son yıllarda mühendislik [1-3], fizik [4,5], finans [6], biyoloji [7] gibi birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılan kesirli türev kavramının ortaya çıkışı, gerçekte tamsayı mertebeden türev kadar eskiye dayanmaktadır, ancak kullanılmaya başlanması son yarım yüzyılda mümkün olmuştur. Bu kavram literatürde ilk kez 1695 yılında Leibniz ile L' Hôpital arasındaki mektuplaşmalarda görülmektedir. L' Hôpital Leibniz'e yazdığı bir mektupta "tamsayı mertebeli türevlerin anlamı tamsayı olmayana genellenebilir mi örneğin ?" diye sormuştur. Bunun üzerine Leibniz 30 Eylül 1695 tarihinde L' Hôpital'e "It will lead to a paradox, from which one day useful consequences will be drawn." diyerek cevap vermiştir ki, bu kesirli analizin ortaya çıktığı tarih olarak kabul edilir.

Leibniz' in bu sorusundan, son yıllara kadar kesirli mertebeden türev üzerine çok fazla çalışma olmamasına rağmen, günümüzde kesirli türev ile ilgili çalışmalar hızla yaygınlaşmaktadır. Kesirli türevin sürekli ortamlar mekaniğine uygulamaları, nonlokal problemlerin modellenmesinde literatürde var olan yöntemlere göre yeni bir bakış açısı getirmiştir. Nonlokalite, malzemenin bir noktadaki davranışının sadece o parçacığın değil, aynı zamanda yakın çevresindeki noktaların özelliklerine de bağlı olmasıdır ve birçok zor mekanik problemi modellemek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Benzer bakış açısı bellekli malzemeler için de geçerlidir. Bellekli malzeme kavramı, belirli bir zamanda malzemenin davranışının aynı zamanda malzemenin yakın geçmişteki mekanik davranışına bağlı olduğu varsayımı ile incelenen malzemeler için kullanılmaktadır.

17. yüzyılda "ceiiinosssttuu" anagramı ile latince olarak Hooke tarafından verilen "ut tensio sic vic" (çekme ne kadarsa uzama o kadardır) ilişkisi küçük gerilmeler için doğru sonuçlar vermesine rağmen, hem birinci derece bir yaklaşımdır, hem de o zaman için sadece bir boyutlu durum için verilmiştir. 19. yüzyıl başlarında Cauchy, gerilme tansörü kavramını tanımlayarak, doğrusal elastisite teorisi için hareket denklemini genelleştirmiş ve böylece klasik sürekli ortamlar mekaniğinin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. Ancak, 1950'lerde, tek boyutlu durumda bile

küçük ölçekli malzemeler için akustik dalga yayılımlarında yüzey gerilimi altındaki doğrusal olmayan yer değiştirmelerde, teorinin bazı eksiklikleri gözlemlenmiştir [8, 9]. 1960' ların başında, Eringen'in mikropolar ve mikrogerme teorileri [10, 11] ile Mindlin'in birinci ve ikinci mertebe genleme gradyan teorileri [12, 13], Cosserat kardeşlerin elli yıldan fazla bir süredir unutulmuş çalışmalarını tekrar popüler hale getirmiştir [14, 15]. Eringen'in mikropolar teorisi, Cosserat'ın teorisıyla tamamen örtüşmekte ve parçacığın klasik makro şekil değiştirmesine ek olarak, bu makro hareketten bağımsız bir mikro dönme yaptığı varsayımına dayanmaktadır. Mikrogermeli ortam teorisinde ise, bu bağımsız mikrodönmenin yanısıra parçacığın mikrogenleme de yaptığı kabul edilir. Her iki teori de mikro parçacıklar, boşluklar vb. gibi iç yapılara sahip kompozit malzemeler için diğer yüksek mertebe teorilerde olduğu gibi, malzeme davranışını klasik sürekli ortamlar mekaniği teorisinden daha iyi yansıtmaktadır.

Günümüzün gelişen teknolojisi ile, süper mekanik, ısısal, elektrik ve manyetik özellikler gerektiren malzemelere olan ihtiyaç hızla artmaktadır. Kompozitlerdeki gerilme ve şekil değiştirmenin doğru hesaplanması, biyotıp, elektronik, otomotiv, inşaat, denizcilik gibi birçok mühendislikte kullanılan bu tür malzemelerin tasarımında karşılaşılan önemli bir problemdir. Ayrıca, malzemelerin bu üstün özelliklerine rağmen, ağırlıklarının ve boyutlarının küçük olmasının arzu edilmesi başka bir zorluktur. Deneyler, boyut etkilerinin bu tarz küçük boyutlu malzemelerde daha etkili olduğunu göstermektedir [16-19]. Eringen'in mikropolar ve mikrogerme teorileri klasik sürekli ortamlar mekaniğinden daha iyi sonuçlar vermesine rağmen, nonlokal etki hesaba katılmadıkça, bu teoriler de sadece incelenen parçacığın katkısını göz önüne alırlar. Nonlokalite teorisi küçük ölçekli malzemelerin davranışının belirlenmesinde önemli ölçüde yardımcı olur. Örneğin, zamana göre harmonik Rayleigh yüzey dalgaları için nonlokal teoriyle elde edilen "saçılım eğrileri" (dispersion curves), atomik saçılım eğrileri ile tam olarak örtüşmektedir [20]. Eringen, "vida tipi-yerdeğiştirme kusurlarını" (screw dislocations), Rayleigh yüzey dalgalarını [21] ve lineer izotropik nonlokal mikropolar elastik katılarda enine düzlem dalgaların saçılım ilişkilerini [22] incelemek için nonlokal çekirdekler kullanmıştır. Mikropolar ve mikrogerme teorilerinin her ikisi de, klasik teoriye göre daha fazla sayıda malzeme katsayısı, daha fazla sayıda ve daha kompleks denklemler içerdiğinden nonlokal çekirdeklerin kullanımı oldukça zordur. Nonlokal çekirdekler yerine kesirli analiz

kullanmak bu tip güçlüklerin üstesinden gelebilir. Mikro yapılı malzemelerde, kesirli analiz ile nonlokal modelleme yapmak daha kolay ve daha gerçekçi olduğundan, kesirli analiz giderek yaygınlaşmaktadır [23-36]. Eringen'in nonlokal teorisi gibi klasik teoride yapılan bazı nonlokal yaklaşımlar, yer değiştirme fonksiyonunun türevini kesirli mertebeden alma ile tamamen eşdeğer sonuçlar vermektedir [9,25-29, 31].

Kesirli analizin son yıllardaki popülaritesi ile birlikte, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yardımı ile yerel olmayan yeni model tanımlamaları getirilmiştir [23-29]. Bu yeni modellerin temel avantajı, klasik sürekli ortamlar mekaniğinin genel yerel olmayan yapısına benzer olmasının yanı sıra tanımından kaynaklanan bazı eklemeler sayesinde fiziksel gerçekliklere daha uygun olmasıdır. Ayrıca, kesirli türev kullanımı nedeniyle fiziksel büyüklüklerde meydana gelen birim tutarsızlığı, birim uyum katsayısı (l) tanımlanarak aşılabilir, böylece genelleştirilmiş kesirli yer değiştirme gradyanları ve kesirli gerilme büyüklükleri, klasik olanlarla aynı fiziksel birimlere sahip olurlar.

Uzaysal değişkenler ve zaman değişkenleri üzerinde kesirli analiz yapmak çok daha gerçekçi olduğundan, bu alandaki çalışmalar gittikçe yaygınlaşmaktadır [18, 23-36]. Challamel ve diğ. kesirli analiz yardımıyla Eringen'in yerel olmayan elastik modelini yaygınlaştırmıştır [37]. Bu kesirli model, Born-Kármán Latis modelinin dağılık dalga özellikleriyle mükemmel bir şekilde uyumludur. Cottone ve diğ. [18], α kesirli türevin mertebesi olmak üzere, $0 < \alpha < 1$ durumunda yerel olmayan sürekli ortamda elastik dalga yayılımını araştırmış, Sapora [38] ise $1 < \alpha < 2$ için kesirli sonlu farklar kullanarak benzer bir analiz yapmıştır.

Genel sınır koşullarına sahip dikdörtgen plakların üç boyutlu titreşim analizi için çalışmalar son elli yıl içinde yapılmıştır [39-43]. Klasik teoride plaklar üzerine çalışmalar Kirchhoff klasik plak teorisi ile başlamıştır ve bu teori orta düzlemin normalinin şekil değiştirme sırasında normal ve dik kesitin düzlem kaldığı varsayımına dayanmaktadır [44]. Literatürde plakların eğilme, burkulma ve titreşimleriyle alakalı birçok çalışma bulunabilir [45-49]. Reissner, enerji prensibini kullanarak kalın plaklar için enine kayma deformasyonunun etkisini incelemiştir [50]. Mindlin, kayma düzeltme katsayıları içeren birinci mertebe "kayma deformasyon teorisini" geliştirmiştir [51]. Liew vd. anizotropik kalın levhaların eğilme ve

titreşimini incelemişlerdir [52]. Plak titreşim problemleri incelenirken sonlu eleman yöntemi birçok araştırmacı tarafından kullanılmıştır [53-58]. Kompozit levhaların burkulması ve titreşimine dair kapsamlı bir genel bakış, Noor ve Peter [59] ve Leissa [45] tarafından verilmiştir. Sınır koşulları basit bağlı olarak verilen kalın dikdörtgen plakların serbest üç boyutlu titreşim analizi için analitik çözüm Sirinivas vd. tarafından verilmiştir [60, 61]. Leissa ve Zhang, Ritz yöntemiyle titreşim analizi yaparken “kabul edilebilir fonksiyonlar” olarak basit cebrik polinomlar, Liew v.d. ise ortogonal polinomlar kullanmışlardır [62, 42]. Rossikhin ve Stihikova [63], dikdörtgen bir plağın lineer olmayan serbest sönümlü titreşim probleminde sistemin viskoelastik sönümünü Riemann-Liouville kesirli türevi ile tanımlamışlar ve çözümü elde etmek için çoklu ölçek (multiple scales) yöntemini kullanmışlardır. Bu çalışmada kesirli türev ile analizin, tam sayı modellere göre daha az parametreye ihtiyaç duyduğu ve viskoelastik malzemenin mekanik davranışını geniş frekans aralıklarında fiziksel gerçeklere daha uygun olarak modellediği gösterilmiştir. Datta ve Ray [64] ince tabakalı plakların lineer titreşimini araştırmak için üç boyutlu kesirli türevli bir viskoelastik model önermişlerdir. Kesirli türevle modellenen viskoelastik tabaka için üç boyutlu sonlu eleman yöntemi geliştirmişlerdir. Normal harmonik zorlamaya maruz bırakılmış ince dikdörtgen plakların lineer olmayan titreşimleri Amabil [65] tarafından yakın bir zamanda incelenmiştir. Bu çalışmada malzeme klasik Kelvin-Voigt modeli ile tanımlanmıştır. 2017’ de Von Karman geometrik lineer olmayan viskoelastik plağın lineer olmayan harmonik titreşimleri Litewka ve Lewandowski [66] tarafından incelenmiştir. Permoon v.d. kesirli viskoelastik dikdörtgen plağın lineer olmayan titreşimlerini incelemişler ve dört sınırı ankastre ve basit bağlı plakların hareket denklemini çözmek için çoklu ölçekler yöntemini Galerkin metodu ile birlikte kullanmışlardır [67]. Bu çalışmada plağın dinamik davranışı kesirli mertebeden türev operatörü ile modellenmiş ve böylece yukarıda belirtildiği gibi viskoelastik malzemenin titreşim frekanslarının daha az sayıda parametreye bağlı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca kesirli türevin mertebesinin viskoelastik plağın frekans eğrileri üzerinde gecikme süresi kadar etkin olduğunu ve bu mertebenin bir olması durumunda klasik Kelvin-Voigt modeline indirgenmediğini göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında klasik ve mikrogermeli ortam teorisiyle modellenen dikdörtgen plakların yerel olmayan üç boyutlu titreşim analizi kesirli analiz çerçevesinde incelenmiştir. Nonlokal etkileri yansıtmak için yer değiştirme gradyanları yerine,

Caputo kesirli türevi kullanılmıştır. Burada sınır fonksiyonlarıyla çarpılmış Chebyshev polinomları kabul edilebilir fonksiyonlar (admissible function) olarak kullanılmıştır. Sınır fonksiyonları plağın temel geometrik sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilmişler, ancak gerilme sınır koşulları dikkate alınmamıştır. Chebyshev polinomunun simetri özelliği nedeniyle, titreşim modları simetrik ve antisimetrik modlar olarak sınıflandırılabilir. Böyle bir durumda, her sınıf farklı bir problem olarak incelenebilir. Böylece, doğruluk aynı kalırken daha küçük bir özdeğer denklemi kümesi ele alındığından problem, alt problemlere bölünerek basitleştirilir. Kesirli türevlerin nonlokalite üzerindeki etkisini göstermek için, farklı sınır koşullarına ((CCCC), (SSSS), (FFFF), (CFSF), (CFFF)) sahip bazı dikdörtgen plakları ele alınmıştır; burada Ankastre “Clamped (C)”, Basit- Bağlı “Simply-Supported(S)” ve Serbest “Free (F)” dir. Ayrıca her farklı sınır koşulu için farklı simetri modları da (AAA, AAS, SSA, SSS) incelenmiştir. Bu incelemelerin tamamında, beklentilere uygun olarak, kesirli türevin mertebesi $\alpha \rightarrow 1$ iken elde edilen frekans değerlerinin klasik durum ($\alpha = 1$) için elde edilen frekans değerlerine yaklaştığı gözlemlenmiştir. Bu tezde ayrıca Eringen’in mikrogermeli ortam teorisi ile modellenen kalın plakların titreşim analizi kesirli analiz yardımıyla incelenmiştir. Böylece, nonlokal etkiler de analize dahil edilmiştir. Örneklerde sınır koşulları (SSSS), (FFFF) ve (CFSF) olarak alınmıştır. Frekans spektrumları farklı kesirli türev mertebeleri için çizelgeler yardımıyla verilmiştir. Kesirli türevlerin mertebesi klasik mertebeden türeve yaklaştıkça, beklenildiği üzere elde edilen frekans spektrumlarının da klasik frekans spektrumlarına yaklaştığı, kesirli türev mertebesinin klasikten uzaklaştığı durumda ise nonlokal etkinin daha baskın hale geldiği gösterilmiştir.

Tez çalışmasının 2. bölümünde kesirli türev operatörleri hakkında genel bilgi verilmiş ve bu tezde kullanılmış olan Caputo kesirli türevi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bölüm 3’ de dikdörtgen plakların üç boyutlu titreşim analizi Caputo kesirli türevi yardımıyla incelenmiştir. Bölüm 4’ de ise mikrogirme teorisi ile modellenen plakların nonlokal titreşim analizi benzer şekilde incelenmiştir. Tezin son bölümünde ise sonuçlar ve öneriler verilmiştir.



2. KESİRLİ ANALİZ

Kesirli analiz, türev operatörünün gerçel veya karmaşık sayı kuvvetlerini tanımlayan bir matematiksel analiz dalıdır [68, 69].

Kesirli analizin gelişmesinde başta Leibniz, L' Hôpital, Euler, Abel, Fourier, Laplace, Riemann, Liouville, Weistrass, Letnikov, Riesz, Littlewood, Lévy, Caputo olmak üzere birçok matematikçi katkıda bulunmuşlardır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

$n \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere, Leibniz 1697 yılında kesirli türev için

$$\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx} \quad (2.1)$$

tanımını vermiştir [70].

L. Euler 1730 yılında kesirli türev için

$$\begin{aligned} \frac{d^n x^m}{dx^n} &= m(m-1) \dots (m-n+1)x^{m-n} \\ \Gamma(m+1) &= m(m-1) \dots (m-n+1) \Gamma(m-n+1) \\ \frac{d^n x^m}{dx^n} &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \end{aligned} \quad (2.2)$$

tanımını yapmış ve $m=1$ ve $n=\frac{1}{2}$ için $\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$ sonucuna ulaşmıştır [71].

Fourier 1822 yılında meşhur

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp \quad (2.3)$$

özdeşliğini tanımladıktan sonra n . mertebeden türev için,

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + n\frac{\pi}{2}) dp \quad (2.4)$$

tanımını vermiştir [72]. Bu tanım mertebesi tam sayı olmayan türevler için de kullanılmaktadır.

Liouville 1832-1837 arasında yayınladığı seri makalelerde ilk kez kesirli integral operatörü tanımlamıştır [73]. Bu tanım Riemann tarafından geliştirilerek, günümüzde yaygın bir şekilde kullanılan ve kesirli analizin temeli olan Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ortaya çıkarılmıştır [74]. Eğer $f(x) \in C([a, b])$ ve $a < x < b$ ise, α . mertebeden sağ ve sol Riemann-Liouville integralleri

$$\left. \begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} f(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \\ I_{b-}^{\alpha} f(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \end{aligned} \right\}, \quad -\infty < \alpha < \infty \quad (2.5)$$

şeklindedir. Riemann-Liouville kesirli türev tanımı ise

$${}^R D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds, \quad n-1 \leq \alpha < n \quad (2.6)$$

şeklinde verilmiştir [74].

Sonlu fark tabanlı Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımı 1867 yılında önceki kesirli türev tanımlarından farklı olarak,

$${}^{GL} D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2.7)$$

olacak şekilde verilmiştir [75, 76]. Eğer $f \in C^{n+1}[a, b]$ ise Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımı Riemann-Liouville kesirli türev tanımına denktir.

Caputo 1967 yılında kesirli türevi

$${}^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds, \quad n-1 \leq \alpha < n \quad (2.8)$$

olarak tanımlamıştır [77]. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü ${}^R D_t^{\alpha} f(t)$ ve Caputo kesirli türev operatörü de ${}^C D_t^{\alpha} f(t)$ olarak tanımlanırsa bu iki kesirli türev arasındaki ilişki

$${}^R D_t^{\alpha} f(t) = {}^C D_t^{\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+), \quad m-1 \leq \alpha < m \text{ ve } t > 0 \quad (2.9)$$

şeklinde verilebilir. Bu iki türev arasında, (2.9) ilişkisine rağmen, Riemann-Liouville tanımında Laplace dönüşümünde ortaya çıkan başlangıç değerlerinden kaynaklanan problemlerin Caputo kesirli türevinde görülmemesi, ${}^C D_t^\alpha 1 \equiv 0$ iken ${}^R D_t^\alpha 1 \equiv \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ olması gibi birtakım farklılıklar Caputo kesirli türev tanımını, Riemann-Liouville kesirli türevine göre daha avantajlı kılmaktadır.

Kesirli türev tanımı için 1975 yılında Bertran Ross tarafından aşağıdaki kriterler önerilmiştir [78].

1. Analitik bir fonksiyonun kesirli mertebeden türevi analitiktir.
2. Bir kesirli türevin mertebesi tamsayı alındığı zaman normal türevle aynı sonuç elde edilir.
3. Bir fonksiyonun sıfıncı mertebeden türevi kendisine eşittir.
4. Kesirli türev operatörü lineerdir.
5. $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$, $\alpha < 0$ ve $\beta < 0$ özelliği sağlanır.

Yukarıda değinilen kesirli türev tanımları Ross kriterlerini sağlamasına rağmen kesirli türevler;

1. Çarpımın türevi, $D_a^\alpha (f g) = f D_a^\alpha (g) + g D_a^\alpha (f)$
2. Zincir kuralı, $D_a^\alpha (f \circ g)(t) = f^{(\alpha)}(g(t)) g^{(\alpha)}(t)$
3. Her α ve β için $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$

kriterlerini sağlamamaktadırlar. Ayrıca, eğer α doğal sayı değilse Riemann-Liouville tanımı, ${}^R D_t^\alpha 1 = 0$ özelliğini sağlamamakta ve Caputo ise, fonksiyonun türevlenebilir olduğunu varsaymaktadır.

Khalil tarafından Ross kriterlerinin ilk dört özelliğini sağlayan yeni bir kesirli türev tanımı yapılmıştır [79]. Bu tanım (Conformable Fractional Derivative) polinomlarda (belirli bir katsayıyla çarpıldığında) Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleriyle çakışmaktadır. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere “Conformable Fractional Derivative” tanımı

$$T_\alpha (f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad \alpha \in (0,1) \quad (2.10)$$

şeklindedir.

Ortigueira ve Machado genelleştirilmiş fonksiyon teorisi yardımıyla herhangi bir fonksiyonun türevinin sayısal olarak hesaplanabileceğini, dolayısıyla Ross tarafından verilen “analitik bir fonksiyonun türevinin analitiktir” kriterine gerek olmadığını ve ilk olarak Tarasov [80, 81] tarafından tanımlanan “bir kesirli operatörün genelleştirilmiş Leibniz kuralını sağlaması gerekir” şartını da ekleyerek WSC (Wide Sense Criterion) adıyla bilinen aşağıdaki kriterleri vermişlerdir [82];

1. Türev operatörü lineerdir.
2. Bir fonksiyonun sıfıncı mertebeden türevi kendisine eşittir.
3. Bir kesirli türevin mertebesi tamsayı alındığı zaman normal türevle aynı sonuç elde edilir.
4. $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$, $\alpha < 0$ ve $\beta < 0$ özelliği sağlanır. (index özelliği).
5. Genelleştirilmiş Leibniz kuralı, $D^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} D^i f(t) D^{\alpha-i} g(t)$ sağlanır.

Eğer indeks özelliği pozitif α ve β katsayılarını içeriyorsa buna SSC (Strict Sense Criterion) denir. Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve Riesz potansiyel tanımları WSC ve SSC kriterlerini sağlarken, son yıllarda popüler olmaya başlayan Conformable Kesirli Türevi bu kriterlere göre kesirli türev olarak değerlendirilemez.

Tarasov kesirli mertebeden türevli diferansiyel denklemlerin tam sayı mertebeli türevlerin sonlu toplamını içeren diferansiyel denklem şeklinde yazılamayacağını (nonlokalite ilkesi), dolayısıyla bu şekilde yazılabilen kesirli türev tanımlarının gerçek anlamda kesirli türev olmadığını örnekleriyle kanıtlamıştır [83]. Örneğin, $k \neq 0$, $t > 0$ ve T_α Conformable Fractional Derivative olmak üzere,

$$k(T_\alpha X)(t) + f(t)X(t) + g(t)Y(t) = 0 \quad (2.11)$$

diferansiyel denklemi, Teorem 2.2 deki ([83, p.67]) $(T_\alpha X)(t) = t^{1-\alpha} \frac{dX(t)}{dt}$ eşitliği

kullanılarak aşağıda verilen birinci mertebeden

$$t^{1-\alpha} \frac{dX(t)}{dt} + f(t)X(t) + g(t)Y(t) = 0 \quad (2.12)$$

diferansiyel denklem şekline dönüştürülebilir ki, bu durum Conformable Fractional Derivative tanımının kesirli türev olarak kabul edilemeyeceğini açıkça göstermektedir. Ayrıca tamsayı olmayan mertebeden kesirli türevlerin standart Leibniz kuralını sağlamadığı Tarasov tarafından kanıtlanmıştır [81]. Conformable Fractional Derivative tanımı bu özelliklerle de çelişmektedir. Hatta Tarasov bu tip birçok yeni kesirli türev tanımının türevlenebilir fonksiyonlar uzayında notasyon değişimi dışında hiçbir yenilik getirmediğini vurgulamaktadır [83]. Bu nedenle bu tez kapsamında sadece Caputo kesirli türev tanımı kullanılacaktır.

2.1 Caputo Kesirli Türevi

Tanım. $\alpha > 0$, $t > a$ ve $a, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ise,

$${}^c D_t^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds & n-1 \leq \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \end{cases} \quad (2.13)$$

kesirli türev operatörüne Caputo kesirli türevi denir [77].

Caputo tanımını $\alpha \rightarrow n$ iken n . mertebeden klasik türeve indirgenir.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^c D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t)}{\Gamma(n-\alpha+1)} dt \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n)}(t). \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Bu tez çalışmasında, Caputo kesirli türevlerinin yaklaşık değerleri modifiye trapez kuralı kullanılarak elde edilmiştir. Modifiye trapez yönteminin formülasyonu,

$$\begin{aligned} a = t_0 < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_m, \quad h = \frac{t_m - a}{m} \\ {}^c D_t^\alpha f(t) &\cong \frac{h^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+2)} \left\{ \left[(m-1)^{n-\alpha+1} - (m-n+\alpha-1)m^{n-\alpha} \right] f^{(n)}(t_0) + \right. \\ &\left. f^{(n)}(t_m) + \sum_{j=1}^{m-1} \left[(m-j+1)^{n-\alpha+1} - 2(m-j)^{n-\alpha+1} + (m-j-1)^{n-\alpha+1} \right] f^{(n)}(t_j) \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

şeklindedir [84].



3. KESİRLİ TÜREV YARDIMIYLA DİKDÖRTGEN PLAĞIN TİTREŞİM ANALİZİ

Bu bölümde öncelikle klasik elastisitedeki gerilme genleme büyüklükleri ve kesirli türev operatörü kullanılması durumunda bu büyüklüklerin nasıl tanımlanacağına değinilmiştir. Sonrasında ise dikdörtgen plakların titreşim analizi kesirli türev yardımıyla incelenmiştir.

İzotropik elastik homojen cismin genleme ve gerilme ifadeleri

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \quad (3.1)$$

ve

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right) \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \quad (3.2)$$

denklemleri ile verilmektedir.

Kesirli analiz için ise kesirli genleme tansörü $\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha(\mathbf{x}, t)$,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = \frac{1}{2} \left({}^c D_{-L_j}^\alpha u_{i,j} - {}^c D_{L_j}^\alpha u_{j,i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.3)$$

olarak tanımlanır. Burada yer değiştirme vektörü $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$, konum vektörü

$\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ dir ve a, b, h dikdörtgen bölgenin boyutlarını göstermek üzere

$\mathbf{L} = \frac{1}{2}[a, b, h]^T$ ile tanımlanmıştır. Kesirli gerilme tansörü

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \xi_{ijkl} D^\alpha \varepsilon_{kl} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.4)$$

[32] veya

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.5)$$

[28] şeklinde tanımlanabilir. Bu tezde, (3.5) deki tanım kullanılmıştır. Böylelikle, Rahimi ve diğ. [32] tarafından tanımlanan elastik genleme enerjisi

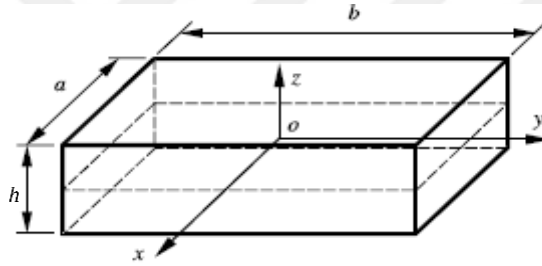
$$V = \frac{1}{2} \int_v (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\varepsilon}^T D^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}) dv \quad (3.6)$$

şeklinde verilebilir. Bu ifade Atanackovic ve Stankovic [28] tarafından tanımlanan

$$V = \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha dv \quad (3.7)$$

enerji tanımına denktir.

Kartezyen bir (x, y, z) koordinat sisteminde, boyutları sırasıyla (a, b, h) , bir noktadaki yerdeğiştirme bileşenleri sırasıyla u, v, w ve merkezi orjinde olan dikdörtgen plak Şekil 3.1 de verilmiştir.



Şekil 3.1 : Dikdörtgen plağın geometrik gösterimi.

Elastik genleme enerjisi açık formda

$$V = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\nu \Lambda_1^2}{1-2\nu} + \Lambda_2 + \frac{\Lambda_3}{2} \right) dz dy dx \quad (3.8)$$

ile verilir. Burada E, ν sırasıyla Young modülü, Poisson oranı ve

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ \Lambda_2 &= (\varepsilon_{xx})^2 + (\varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{zz})^2 \\ \Lambda_3 &= (\varepsilon_{xy})^2 + (\varepsilon_{xz})^2 + (\varepsilon_{yz})^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

dir. Genlemeler ε_{ij} ($i, j = x, y, z$) ise küçük şekil değiştirmeler için

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial^\alpha v}{\partial y^\alpha}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial^\alpha w}{\partial z^\alpha}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial^\alpha w}{\partial x^\alpha}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial^\alpha v}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial^\alpha w}{\partial y^\alpha}\end{aligned}\quad (3.10)$$

olarak verilmektedir. Burada klasik elastiside verilen genleme tanımından farklı olarak α . mertebeden ($0 < \alpha < 1$) kesirli türev tanımı kullanılmıştır. Plağın kinetik enerjisi ise,

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dz dy dx \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir, burada ρ birim hacim başına kütle yoğunluğudur ve (3.11) denkleminde de görüleceği üzere zamana göre türev üzerinde kesirli türev tanımı kullanılmamıştır.

Maksimum enerji fonksiyoneli,

$$\Pi = V_{\max} - T_{\max} \quad (3.12)$$

olarak tanımlanmaktadır.

İncelenen dikdörtgen plağın serbest titreşim analizi için, periyodik yerdeğiştirme bileşenleri, yerdeğiştirme genlik fonksiyonları cinsinden

$$\{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\} = \{U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)\} e^{i\omega t} \quad (3.13)$$

verilmektedir. Burada ω plağın doğal frekansıdır. Problemi boyutsuz şekle getirmek için,

$$\xi = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{2y}{b}, \quad \zeta = \frac{2z}{h} \quad (3.14)$$

değişkenleri tanımlanırsa, genlemeler

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha U}{\partial \xi^\alpha} \frac{d^\alpha \xi}{dx^\alpha} = \left(\frac{2}{a} \right)^\alpha \frac{\partial^\alpha U}{\partial \xi^\alpha} = l^{\alpha-1} \left(\frac{2}{a} \right)^\alpha \bar{\varepsilon}_{\xi\xi}, & \varepsilon_{yy} &= l^{\alpha-1} \left(\frac{2}{a} \right)^\alpha \bar{\varepsilon}_{\eta\eta}, \\ \varepsilon_{zz} &= l^{\alpha-1} \left(\frac{2}{a} \right)^\alpha \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta}, & \varepsilon_{xy} &= l^{\alpha-1} \left(\frac{2}{a} \right)^\alpha \bar{\varepsilon}_{\xi\eta}, & \varepsilon_{xz} &= l^{\alpha-1} \left(\frac{2}{a} \right)^\alpha \bar{\varepsilon}_{\xi\zeta}, & \varepsilon_{yz} &= l^{\alpha-1} \left(\frac{2}{a} \right)^\alpha \bar{\varepsilon}_{\eta\zeta}\end{aligned}\quad (3.15)$$

olacak şekilde elde edilir. Burada l uzunluk biriminde olup, birim uyum katsayısıdır.

(3.8)elastik ve (3.11) kinetik enerji ifadeleri (3.15) dönüşümü ile

$$V_{\max} = \frac{E h b a}{16(1+\nu)} \left(\frac{2}{a}\right)^{2\alpha} l^{2\alpha-2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \bar{\Lambda}_1^2 + \bar{\Lambda}_2 + \frac{\bar{\Lambda}_3}{2} \right) d\zeta d\eta d\xi \quad (3.16)$$

$$T_{\max} = \frac{\rho}{16} a b t \omega^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (U^2 + V^2 + W^2) d\zeta d\eta d\xi$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1 &= \bar{\varepsilon}_{\xi\xi} + \bar{\varepsilon}_{\eta\eta} + \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta}, \quad \bar{\Lambda}_2 = \bar{\varepsilon}_{\xi\xi}^2 + \bar{\varepsilon}_{\eta\eta}^2 + \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta}^2, \quad \bar{\Lambda}_3 = \bar{\varepsilon}_{\xi\eta}^2 + \bar{\varepsilon}_{\xi\zeta}^2 + \bar{\varepsilon}_{\eta\zeta}^2 \\ \bar{\varepsilon}_{\xi\xi} &= \frac{\partial^\alpha U}{\partial \xi^\alpha}, \quad \bar{\varepsilon}_{\eta\eta} = \lambda \frac{\partial^\alpha V}{\partial \eta^\alpha}, \quad \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta} = \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\partial^\alpha W}{\partial \zeta^\alpha} \\ \bar{\varepsilon}_{\xi\eta} &= \lambda \frac{\partial^\alpha U}{\partial \eta^\alpha} + \frac{\partial^\alpha V}{\partial \xi^\alpha}, \quad \bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} = \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\partial^\alpha U}{\partial \zeta^\alpha} + \frac{\partial^\alpha W}{\partial \xi^\alpha}, \quad \bar{\varepsilon}_{\eta\zeta} = \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\partial^\alpha V}{\partial \zeta^\alpha} + \lambda \frac{\partial^\alpha W}{\partial \eta^\alpha} \\ \lambda &= \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha, \quad \gamma = \left(\frac{h}{b}\right)^\alpha \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklindedir. $U(\xi, \eta, \zeta)$, $V(\xi, \eta, \zeta)$ ve $W(\xi, \eta, \zeta)$ yerdeğiştirme genlik fonksiyonları, yerdeğiştirme bileşenlerinin plağın temel geometrik sınır koşullarını sağlamasını garanti eden bir sınır fonksiyonu ile çarpılmış Chebyshev polinomlarının üçlü bir serisi formunda ifade edilebilir;

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta, \zeta) &= F_u(\xi, \eta) \sum_{i,j,k=1}^{\infty} A_{ijk} P_i(\xi) P_j(\eta) P_k(\zeta), \\ V(\xi, \eta, \zeta) &= F_v(\xi, \eta) \sum_{l,m,n=1}^{\infty} B_{lmn} P_l(\xi) P_m(\eta) P_n(\zeta), \\ W(\xi, \eta, \zeta) &= F_w(\xi, \eta) \sum_{p,q,r=1}^{\infty} C_{pqr} P_p(\xi) P_q(\eta) P_r(\zeta). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada i^{th} Chebyshev polinomu,

$$P_i(\chi) = \text{Cos}[(i-1) \text{ArcCos}(\chi)] \quad (3.19)$$

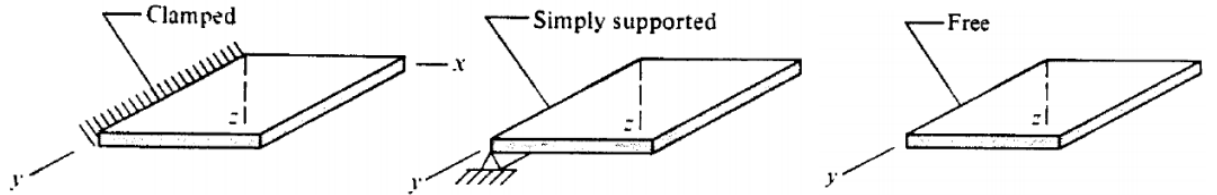
olarak tanımlanmaktadır. (3.18) denkleminde $F_u(\xi, \eta)$, $F_v(\xi, \eta)$ ve $F_w(\xi, \eta)$ sırasıyla $U(\xi, \eta, \zeta)$, $V(\xi, \eta, \zeta)$ ve $W(\xi, \eta, \zeta)$ yerdeğiştirme genlik fonksiyonlarına karşı gelen sınır fonksiyonlarıdır ve

$$F_\delta(\xi, \eta) = f_\delta^1(\xi) f_\delta^2(\eta), \quad (\delta = u, v, w) \quad (3.20)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil 3.2 de verilen sınır koşullarına karşı gelen sınır fonksiyonu bileşenleri $f_{\delta}^i(\delta = u, v, w, i = 1, 2)$ Çizelge 3.1 de verilmiştir.

Çizelge 3.1 : Farklı sınır şartları için sınır fonksiyonları. Birinci harf $\xi = -1$ veya $\eta = -1$ deki kenarı gösterirken, ikinci harf $\xi = 1$ veya $\eta = 1$ yi göstermektedir.

Sınır Koşulu	$f_u^1(\xi)$	$f_v^1(\xi)$	$f_w^1(\xi)$	$f_u^2(\eta)$	$f_v^2(\eta)$	$f_w^2(\eta)$
$F-F$	1	1	1	1	1	1
$F-S$	1	$1-\xi$	$1-\xi$	$1-\eta$	1	$1-\eta$
$S-F$	1	$1+\xi$	$1+\xi$	$1+\eta$	1	$1+\eta$
$S-S$	1	$1-\xi^2$	$1-\xi^2$	$1-\eta^2$	1	$1-\eta^2$
$F-C$	$1-\xi$	$1-\xi$	$1-\xi$	$1-\eta$	$1-\eta$	$1-\eta$
$C-F$	$1+\xi$	$1+\xi$	$1+\xi$	$1+\eta$	$1+\eta$	$1+\eta$
$S-C$	$1-\xi$	$1-\xi^2$	$1-\xi^2$	$1-\eta^2$	$1-\eta$	$1-\eta^2$
$C-S$	$1+\xi$	$1-\xi^2$	$1-\xi^2$	$1-\eta^2$	$1+\eta$	$1-\eta^2$
$C-C$	$1-\xi^2$	$1-\xi^2$	$1-\xi^2$	$1-\eta^2$	$1-\eta^2$	$1-\eta^2$



Şekil 3.2 : Ankastre, basit bağlı ve serbest sınır koşulları.

(3.18) denklemlerinin (3.12) denkleminde kullanılması ve Π fonksiyonelinin kabul edilebilir fonksiyonlara göre minimizasyonu yani;

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{ijk}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial B_{lmn}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial C_{pqr}} = 0 \quad (3.21)$$

aşağıdaki yönetici özdeğer denklemini verir;

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})\mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

burada $\Omega = \frac{a^\alpha \omega}{(2l)^{\alpha-1}} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ dir. Burada, \mathbf{K} ve \mathbf{M} matrisleri alt matrisler cinsinden,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{uv}]^T & [K_{vv}] & [K_{vw}] \\ [K_{uw}]^T & [K_{vw}]^T & [K_{ww}] \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

ve

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} [M_{uu}] & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & [M_{vv}] & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & [M_{ww}] \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

ve \mathbf{Z} sütun vektörü de

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} \quad (3.25)$$

alt vektörleri şeklinde yazılabilir. Burada her bir alt sütun vektörü

$$\mathbf{A} = \{A_{111}, \dots, A_{11N}, \dots, A_{1k1}, \dots, A_{1kN}, \dots, A_{j11}, \dots, A_{jJK}\} \quad (3.26)$$

yapısındadır. “Stiffness” alt matrisleri $[K_{ij}]$ ve kütle alt matrisleri $[M_{ij}]$ nin elemanları $i, j = u, v, w$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
[K_{uu}] &= \frac{1-\nu}{1-2\nu} D_{uiui}^{1,1} G_{ujuj}^{0,0} H_{kk}^{0,0} + \frac{\lambda^2}{2} \left(D_{uiui}^{0,0} G_{ujuj}^{1,1} H_{kk}^{0,0} + \frac{1}{\gamma^2} D_{uiui}^{0,0} G_{ujuj}^{0,0} H_{kk}^{1,1} \right), \\
[K_{uv}] &= \lambda \left(\frac{\nu}{1-2\nu} D_{uivl}^{1,0} G_{ujvm}^{0,1} H_{kn}^{0,0} + \frac{1}{2} D_{uivl}^{0,1} G_{ujvm}^{1,0} H_{kn}^{0,0} \right) = [K_{vu}]^T, \\
[K_{uw}] &= \frac{\lambda}{\gamma} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} D_{uiwp}^{1,0} G_{ujwq}^{0,0} H_{kr}^{0,1} + \frac{1}{2} D_{uiwp}^{0,1} G_{ujwq}^{0,0} H_{kr}^{1,0} \right) = [K_{wu}]^T \\
[K_{vv}] &= \lambda^2 \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} D_{vvl}^{0,0} G_{vmvm}^{1,1} H_{nn}^{0,0} + \frac{1}{2\gamma^2} D_{vvl}^{0,0} G_{vmvm}^{0,0} H_{nn}^{1,1} \right) + \frac{1}{2} D_{vvl}^{1,1} G_{vmvm}^{0,0} H_{nn}^{0,0} \\
[K_{vw}] &= \frac{\lambda^2}{\gamma} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} D_{vlwp}^{0,0} G_{vmwq}^{1,0} H_{nr}^{0,1} + \frac{1}{2} D_{vlwp}^{0,0} G_{vmwq}^{0,1} H_{nr}^{1,0} \right) = [K_{wv}]^T \\
[K_{ww}] &= \lambda^2 \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} D_{wpp}^{0,0} G_{wqwq}^{0,0} H_{rr}^{1,1} + \frac{1}{2} D_{wpp}^{0,0} G_{wqwq}^{0,0} H_{rr}^{0,0} \right) + \frac{1}{2} D_{wpp}^{1,1} G_{wqwq}^{0,0} H_{rr}^{0,0} \\
[M_{uu}] &= \frac{1+\nu}{4} D_{uiui}^{0,0} G_{ujuj}^{0,0} H_{kk}^{0,0} \\
[M_{vv}] &= \frac{1+\nu}{4} D_{vvl}^{0,0} G_{vmvm}^{0,0} H_{nn}^{0,0} \\
[M_{ww}] &= \frac{1+\nu}{4} D_{wpp}^{0,0} G_{wqwq}^{0,0} H_{rr}^{0,0}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

şeklinindedir. Burada

$$\begin{aligned}
D_{\beta_1 \tau_1 \beta_2 \tau_2}^{s, \bar{s}} &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^s (f_{\beta_1}^1(\xi) P_{\tau_1}(\xi))}{d\xi^s} \frac{d^{\bar{s}} (f_{\beta_2}^1(\xi) P_{\tau_2}(\xi))}{d\xi^{\bar{s}}} \right\} d\xi, \\
G_{\beta_1 \tau_1 \beta_2 \tau_2}^{s, \bar{s}} &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^s (f_{\beta_1}^2(\eta) P_{\tau_1}(\eta))}{d\eta^s} \frac{d^{\bar{s}} (f_{\beta_2}^2(\eta) P_{\tau_2}(\eta))}{d\eta^{\bar{s}}} \right\} d\eta, \\
H_{\tau_1 \tau_2}^{s, \bar{s}} &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^s P_{\tau_1}(\zeta)}{d\zeta^s} \frac{d^{\bar{s}} P_{\tau_2}(\zeta)}{d\zeta^{\bar{s}}} \right\} d\zeta, \\
(0 \leq s, \bar{s} \leq 1 \quad \beta_1, \beta_2 = u, v, w \quad \tau_1, \tau_2 = i, j, k, l, m, n, p, q, r, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l}, \underline{m}, \underline{n}, \underline{p}, \underline{q}, \underline{r}).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

(3.22) özdeğer-özvektör probleminin çözümü, Ω frekans parametresini verir. Her özdeğere karşı gelen “ mod şekilleri” özdeğerlerin tek tek yerine konulmasıyla elde edilir. Chebyshev polinomu $P_s(\chi)$ nın $s=1,3,5\dots$ için simetrik ve $s=2,4,6,\dots$ için antisimetrik olduğu iyi bilinmektedir. Çizelge. 3.1’den sınır koşulları $f_\delta^1(\xi)_{\delta=u,v,w}$ nın $\xi=1$ ve $\xi=-1$ noktalarında, $f_\delta^2(\eta)_{\delta=u,v,w}$ sınır fonksiyonunun ise $\eta=1$ ve $\eta=-1$ noktalarında aynı destek koşullu bir plak için simetrik olduğu görülebilir. Bu durum geometrik simetriye sahip bir plak için, titreşim modlarının simetrik ve antisimetrik modlara ayrılacağı anlamına gelir. Modların bu iki ayrı sınıfı birbirinden bağımsız olarak belirlenebilir ki, bu, doğruluk aynı seviyede kalırken daha küçük bir özdeğer

problemi kümesi sonucunu doğurur. Burada incelenen plaklar sabit kalınlıkta olduğundan orta-düzleme göre daima simetriktir. Bu nedenle bir plağın titreşim modları ζ eksenine göre simetrik mod (S) ve antisimetrik mod (A) olmak üzere en az ikiye ayrılabilir. Dahası, eğer bir plak sınır desteklerine göre sadece ξ (veya η) yönünde simetrik ise, titreşim modları dört farklı kategoriye ayrılabilir: AA, AS, SA ve SS ki, burada birinci büyük harf ξ (veya η) yönünde, ikincisi ζ yönündeki titreşim modları tiplerini belirtmektedir. Benzer olarak eğer bir plak hem ξ hem de η yönlerinde simetrik sınır koşullarına sahip ise titreşim modları sekiz farklı sınıfa ayrılabilir; $AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS, SSA$ ve SSS ki, burada birinci, ikinci ve üçüncü harfler sırasıyla ξ, η ve ζ yönlerinde, simetrik veya antisimetrik titreşim modu tipine karşı gelir. Literatürde verilen örneklerle karşılaştırmak için boyutsuz frekans parametresi

$$\Delta = \frac{b^2}{ah\pi^2} \sqrt{12(1-\nu^2)} \Omega = \frac{b^2 a^{\alpha-1} w}{h\pi^2 (2l)^{\alpha-1}} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (3.29)$$

olarak tanımlanmıştır, burada $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ plağın eğilme rijitliğidir.

3.1 Uygulamalar

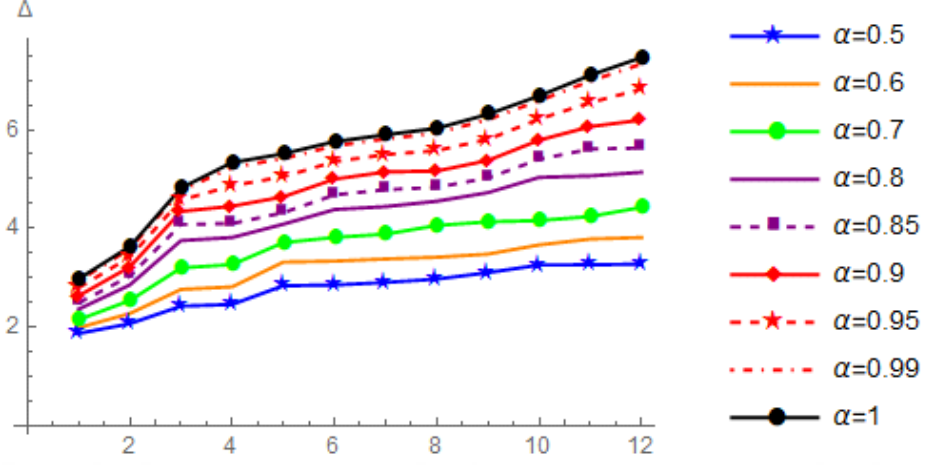
Bu bölümde farklı sınır koşullarına sahip dikdörtgen plaklar, farklı simetri modları, farklı boyut oranları (l) ve farklı kesirli türev mertebeleri (α) için incelenmiştir ve (3.16) denkleminde $10 \times 10 \times 6$ terim kullanılmıştır. Ayrıca tüm örnekler için Young modülü ($E = 72 \text{ GPa}$) ve Poisson oranı ($\nu = 0.3$) olarak alınmıştır. Beş farklı sınır koşulu için incelenen örnekler aşağıda verilmektedir.

3.1.1 Dört kenarı ankastre (CCCC) bağlı plak

Dört kenarı ankastre bağlı dikdörtgen plağın AAS modları için ilk 12 frekansı farklı türev mertebesi ve farklı boyut oranları için Çizelge 3.2 de ve $\gamma = 0.5$ kalınlık oranı ve farklı (α) değerleri için ise Şekil 3.3 de gösterilmektedir. Ayrıca, plağın AAS modu için ilk 3 frekansına karşı gelen mod şekilleri ve kesirli ve klasik yer değiştirmelerin düşey bileşenlerinin mutlak farkları Çizelge 3.3 de verilmiştir

Çizelge 3.2 : Dört kenarı ankastre bağlı olan dikdörtgen plağın AAS modu için ilk 12 frekans.

λ	γ	α	$\Delta_{1-12}[\text{rad}]$												
1	0.1	0.80	11.797	14.284	18.753	19.241	22.298	25.232	25.383	26.443	26.619	28.962	30.170	32.946	
		0.90	13.156	16.143	22.241	22.852	25.899	30.545	30.628	32.040	32.220	34.629	36.387	39.855	
		0.99	14.681	18.033	26.179	26.879	30.132	35.822	36.048	39.055	39.195	41.158	43.727	47.895	
	0.3	1	14.870	18.256	26.672	27.379	30.672	36.453	36.728	39.945	40.083	41.983	44.671	48.874	
		0.80	3.9344	4.7640	6.2524	6.4077	7.4198	8.2400	8.3933	8.5981	8.7183	9.2883	9.7207	9.7327	
		0.90	4.3877	5.3834	7.4155	7.6022	8.6046	9.4304	9.9387	10.584	10.599	10.876	11.197	11.332	
	0.5	0.99	4.8961	6.0131	8.7284	8.9315	9.9845	10.641	11.459	12.456	12.776	12.786	13.052	13.275	
		1	4.9592	6.0874	8.8927	9.0965	10.159	10.790	11.648	12.650	13.007	13.036	13.336	13.541	
		0.80	2.3615	2.8536	3.7519	3.8151	4.0852	4.3827	4.4410	4.5506	4.7247	5.0336	5.0640	5.1369	
	1.5	0.1	0.90	2.6334	3.2180	4.3435	4.4498	4.6416	4.9996	5.1449	5.1633	5.3776	5.7888	6.0641	6.1968
			0.99	2.9386	3.5866	4.7654	5.2367	5.4145	5.6729	5.8133	5.9355	6.2058	6.5899	6.9887	7.3338
			1	2.9765	3.6302	4.8160	5.3352	5.5126	5.7583	5.8980	6.0288	6.3145	6.6873	7.1064	7.4641
0.3		0.80	9.9146	11.376	14.810	17.345	19.472	19.652	20.532	22.851	25.935	26.052	27.122	28.448	
		0.90	10.923	13.281	16.074	20.284	21.136	21.909	24.540	25.682	28.581	29.247	30.283	30.699	
		0.99	12.465	15.245	18.849	23.942	25.894	26.658	29.425	30.975	34.573	36.757	37.637	38.497	
0.5		1	12.656	15.482	19.196	24.396	26.496	27.260	30.046	31.660	35.323	37.698	38.516	39.531	
		0.80	3.1824	3.8136	4.5340	5.5984	5.7165	5.9498	6.6945	7.0495	7.4888	7.5732	7.7532	8.0031	
		0.90	3.6445	4.4303	5.3572	6.7348	7.0324	7.2992	8.0378	8.4810	8.9749	9.4365	9.7378	9.9053	
2		0.1	0.99	4.1600	5.0853	6.2811	7.9247	8.6146	8.8797	9.5777	10.145	10.615	11.064	11.670	12.339
			1	4.2239	5.1645	6.3967	8.0721	8.8144	9.0800	9.7732	10.355	10.823	11.268	11.904	12.637
			0.80	1.9104	2.2866	2.7182	3.3455	3.3729	3.5525	3.6329	3.8511	3.9353	4.0524	4.1228	4.2486
	0.3	0.90	2.1880	2.6537	3.2080	3.8671	4.1048	4.2774	4.3357	4.4699	4.6792	4.8396	4.8706	5.0683	
		0.99	2.4978	3.0431	3.7560	4.3830	4.7530	5.0881	5.2061	5.3539	5.4831	5.7081	5.7621	5.9984	
		1	2.5361	3.0903	3.8245	4.4459	4.8289	5.1823	5.3244	5.4725	5.5852	5.8163	5.8752	6.1165	
	0.5	0.80	8.4881	9.9790	11.104	13.630	14.610	15.726	17.260	17.862	18.072	20.652	21.072	21.567	
		0.90	9.9608	11.896	13.192	16.609	17.716	20.262	21.544	22.310	22.735	25.806	26.258	27.632	
		0.99	11.601	14.036	15.520	19.940	21.292	25.583	26.439	27.541	28.595	32.005	32.297	34.269	
	2	0.1	1	11.804	14.301	15.810	20.353	21.744	26.260	27.066	28.218	29.352	32.803	33.073	35.109
			0.80	2.8326	3.3282	3.7032	4.5416	4.8573	5.2402	5.7493	5.9239	6.0107	6.7741	6.8423	7.0509
			0.90	3.3256	3.9675	4.3990	5.5287	5.8874	6.7500	7.1613	7.3730	7.5662	8.3042	8.4277	8.7392
0.3		0.99	3.8752	4.6807	5.1753	6.6286	7.0762	8.5204	8.7620	9.0694	9.5135	10.022	10.245	10.698	
		1	3.9434	4.7693	5.2720	6.7646	7.2269	8.7455	8.9659	9.2885	9.7647	10.240	10.476	10.945	
		0.80	1.7008	1.9965	2.2209	2.7183	2.8839	3.1367	3.3335	3.4117	3.4809	3.5620	3.6520	3.6994	
0.5		0.90	1.9972	2.3790	2.6362	3.2869	3.4765	3.8916	4.0073	4.0728	4.2421	4.4313	4.4645	4.5345	
		0.99	2.3278	2.8055	3.0997	3.8895	4.1700	4.5213	4.6802	5.0165	5.1372	5.3391	5.4302	5.5671	
		1	2.3688	2.8585	3.1575	3.9625	4.2587	4.5978	4.7663	5.1152	5.2709	5.4551	5.5545	5.7005	



Şekil 3.3 : Dört kenarı ankastre bağlı kare plağın $\gamma = 0.5$ ve farklı α lar için ilk 12 frekans değerleri.

Kesirli türevin mertebesi klasik türevin mertebesine yaklaştıkça ($\alpha \rightarrow 1$) elde edilen sonuçların klasik frekanslara yaklaştığı Çizelge 3.2, Çizelge 3.3 ve Şekil 3.3 de açıkça görülmektedir. Ancak dikkat çekilmesi gereken nokta, tüm farklı λ ve γ parametreleri için kesirli türevin mertebesi klasik değerden uzaklaştıkça nonlokal etkinin arttığı gözlenmektedir.

Çizelge 3.3 : Dört kenarı ankastre bağlı olan dikdörtgen plağın AAS modu için ilk 3 frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğişirmelerin mutlak farkı.

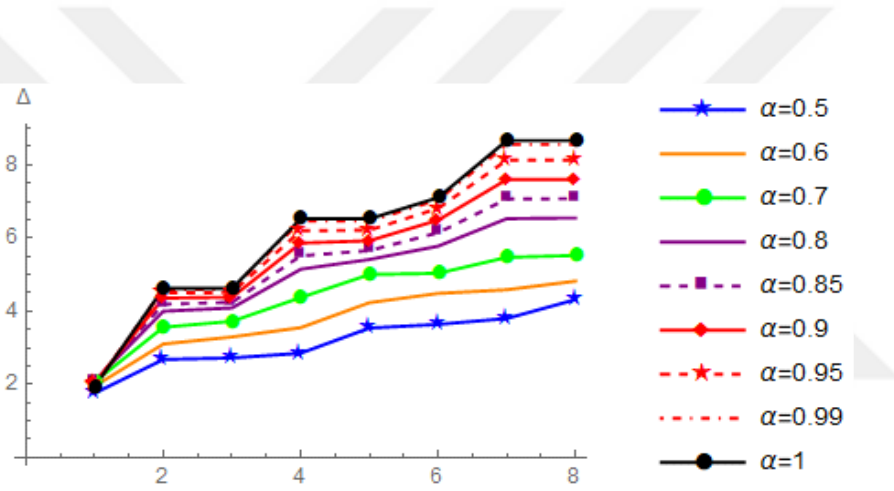
$\gamma = 0.5$	1. Frekans	2. Frekans	3. Frekans
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.99$			
$\alpha = 0.90$			
$\alpha = 0.80$			

3.1.2 Dört kenarı basit bağlı (SSSS) plak

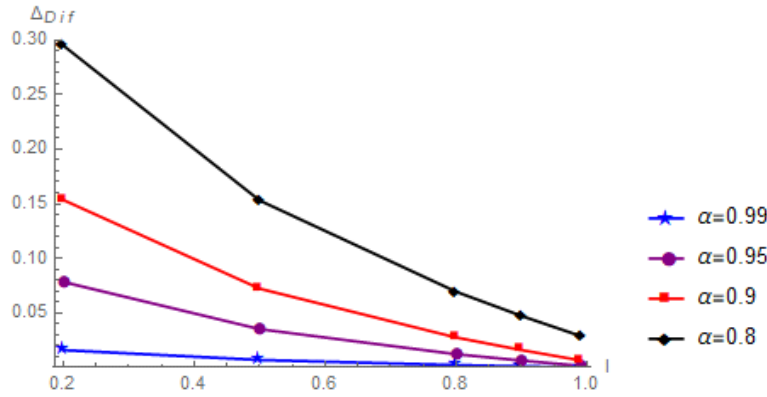
Dört kenarı basit bağlı kare plağın ilk 8 frekans değerleri Çizelge 3.4 de, ilk 3 frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen kesirli ve klasik yer değiştirmelerin mutlak farkı Çizelge 3.5 de verilmektedir. Ayrıca $\gamma = 0.1$ ve farklı α lar için frekans değerleri Şekil 3.4 de gösterilmektedir. Klasik frekanslar ve kesirli frekanslar arasındaki toplam

bağlı fark $\Delta_{Dif} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \frac{|\Delta_{classic} - \Delta_{fractional}|}{\Delta_{fractional}}$ olarak tanımlanmaktadır ve $\gamma = 0.1$,

$l = \{0.2, 0.5, 0.8, 0.9, 0.99\}$ ve farklı α lar için bu farklar Şekil 3.5 de verilmektedir.



Şekil 3.4 : Dört ucu basit-bağlı kare plağın $\gamma = 0.1$ ve farklı α lar için frekans değerleri.

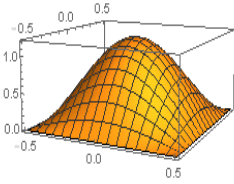
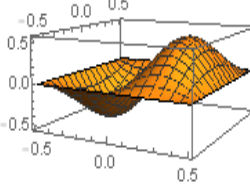
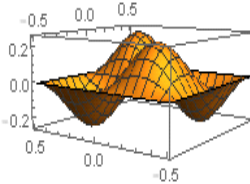
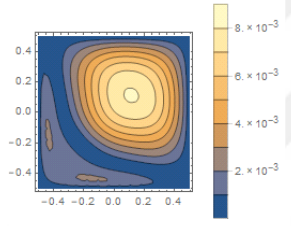
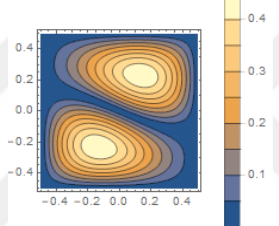
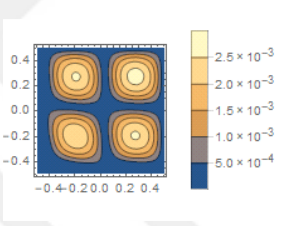
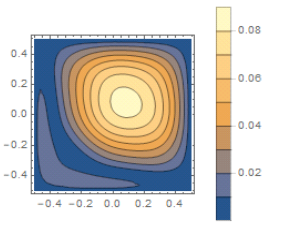
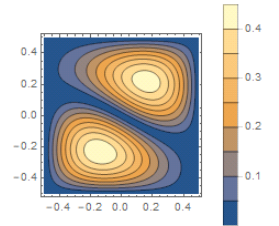
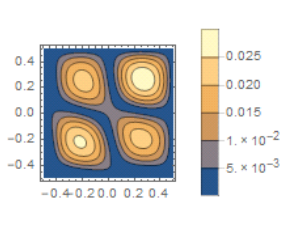
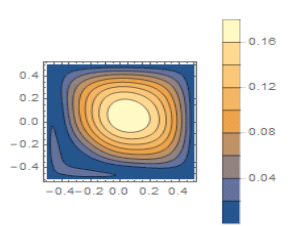
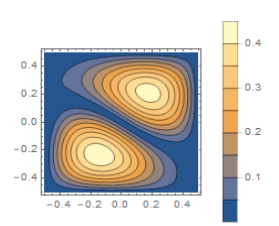
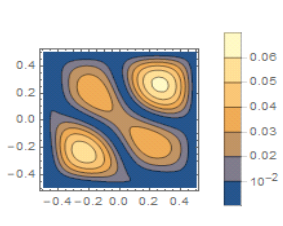


Şekil 3.5 : Dört kenarı basit-bağlı kare plağın $\gamma = 0.1$, $l = \{0.2, 0.5, 0.8, 0.9, 0.99\}$ ve farklı α lar için toplam bağlı farkların Δ_{Dif} hesaplanması

Çizelge 3.4: Dört kenar basit-bağlı kare plağın farklı γ ve α lar için ilk 8 frekans değerleri.

γ	Çözüm Yöntemi	1	2	3	4	5	6	7	8
0.01	$\alpha = 0.90$	3.2628	6.6616	6.6930	10.008	11.852	11.857	15.091	15.165
	$\alpha = 0.99$	2.0713	5.1053	5.1056	8.1336	10.115	10.115	13.134	13.135
	$\alpha = 1$	1.9993	4.9956	4.9956	7.9888	9.9825	9.9825	12.970	12.970
	3-D Ritz [86]	1.9993	4.9956	4.9956	7.9888	9.9825	9.9825	12.970	12.970
	3-D Quadrature [42]	1.9952	4.9977	5.0081	7.9957	10.024	10.029	13.011	13.012
	Klasik Teori [85]	2.0000	2.0000	5.0000	8.0000	10.000	10.000	13.000	13.000
0.1	$\alpha = 0.90$	2.0400	4.3574	4.3835	5.8626	5.9249	6.4887	7.6002	7.6036
	$\alpha = 0.99$	1.9457	4.5997	4.6000	6.4599	6.4605	7.0461	8.5556	8.5556
	$\alpha = 1$	1.9342	4.6222	4.6222	6.5234	6.5234	7.1030	8.6617	8.6617
	3-D Ritz [86]	1.9342	4.6222	4.6222	6.5234	6.5234	7.1030	8.6617	8.6617
	3-D Quadrature [42]	1.9342	4.6250	4.6250	6.5234	6.5234	7.1064	8.6932	8.6932
	Klasik Teori [85]	2.0000	2.0000	5.0000	8.0000	10.000	10.000	13.000	13.000
0.2	$\alpha = 0.90$	1.7256	2.9313	2.9625	3.4325	3.4509	4.7292	4.8620	5.5621
	$\alpha = 0.99$	1.7723	3.2300	3.2303	3.8542	3.8544	4.6228	5.5740	6.4330
	$\alpha = 1$	1.7757	3.2617	3.2617	3.8991	3.8991	4.6128	5.6524	6.5234
	3-D Ritz [86]	1.7758	3.2617	3.2617	3.8991	3.8991	4.6128	5.6524	6.5234
	3-D Quadrature [42]	1.7758	3.2617	3.2617	3.8999	3.8999	4.6127	5.6523	6.5236
	Klasik Teori [85]	2.0000	2.0000	5.0000	8.0000	10.000	10.000	13.000	13.000

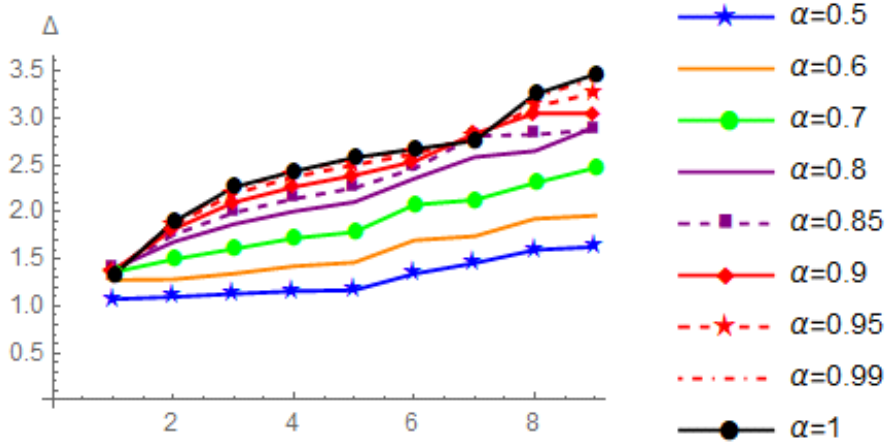
Çizelge 3.5 : Dört kenarı basit-bağlı kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.

$\gamma = 0.1$	<u>1. Frekans</u>	<u>2. Frekans</u>	<u>6. Frekans</u>
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.99$			
$\alpha = 0.90$			
$\alpha = 0.80$			

Çizelge 3.4, Çizelge 3.5, Şekil 3.4 ve Şekil 3.5, kesirli türevin mertebesi klasik türevin mertebesine ve birim uyum katsayısı a uzunluğuna yaklaştıkça, kesirli analiz yardımıyla elde edilen sonuçların klasik frekanslara yaklaştığını göstermektedir.

3.1.3 Dört kenarı serbest (FFFF) plak

Dört kenarı serbest kare plağın ilk 9 frekansı Çizelge 3.6 da, ilk 3 frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen kesirli ve klasik yer değiştirmelerin mutlak farkı Çizelge 3.7 de verilmektedir. $\gamma=0.5$ ve farklı α değerleri için elde edilen frekans değerleri ise Şekil 3.6 da gösterilmektedir.

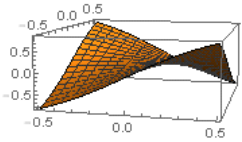
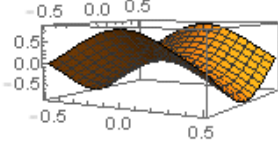
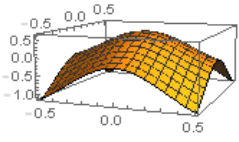
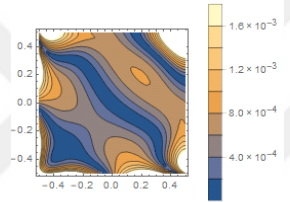
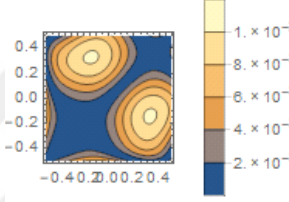
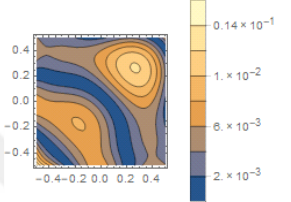
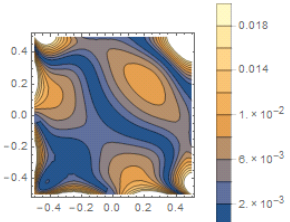
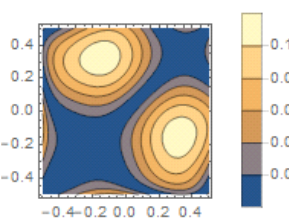
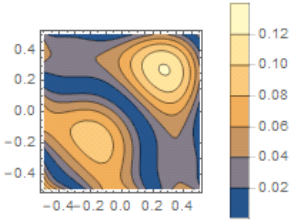
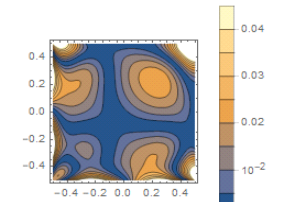
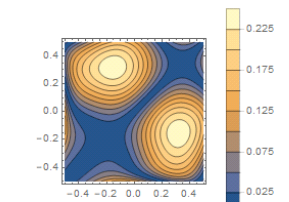
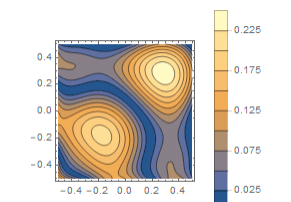


Şekil 3.6 : Dört kenarı serbest kare plağın $\gamma = 0.5$ ve farklı α lar için frekans değerleri.

Çizelge 3.6 : Dört kenarı serbest kare plağın farklı γ ve α lar için ilk 9 frekans değerleri.

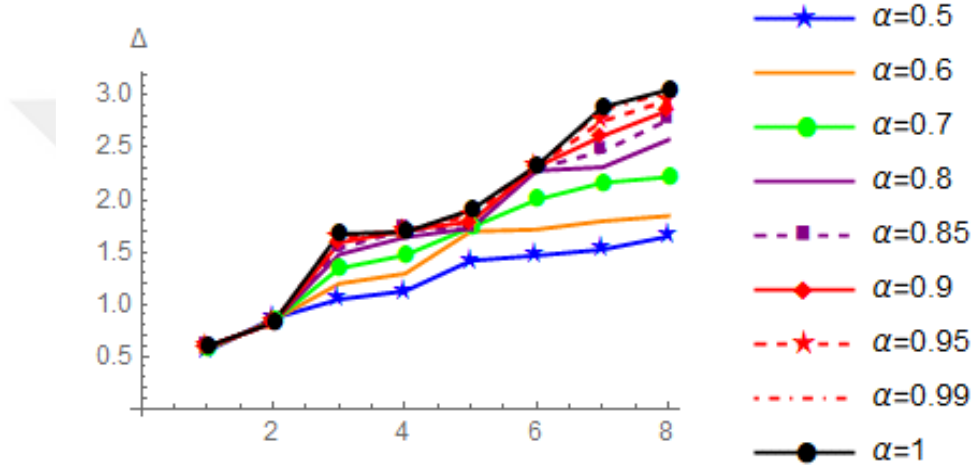
γ	Çözüm Yöntemi	SS-1	SS-2	SS-3	SA(AS)-1	SA(AS)-2	SA(AS)-3	AA-1	AA-2	AA-3
0.1	$\alpha = 0.80$	0.6993	0.7945	1.6552	1.1139	1.4073	2.1081	0.5945	1.7053	1.8315
	$\alpha = 0.90$	0.6414	0.7631	1.6942	1.0565	1.5512	2.3965	0.4855	1.7821	1.9555
	$\alpha = 0.99$	0.5801	0.7127	1.6918	0.9769	1.6670	2.5779	0.3943	1.8335	2.0454
	$\alpha = 1$	0.5736	0.7065	1.6902	0.9673	1.6793	2.5904	0.3851	1.8389	2.0542
	[87]	0.5732	0.7058	1.6868	0.9662	1.6752	2.5910	0.3850	1.8355	2.0485
0.5	$\alpha = 0.80$	1.6816	1.8705	2.5822	2.1048	2.3553	2.9022	1.3929	2.0058	2.6473
	$\alpha = 0.90$	1.8172	2.1009	2.8318	2.3882	2.5365	3.0487	1.3786	2.2648	3.0471
	$\alpha = 0.99$	1.8884	2.2512	2.7615	2.5645	2.6597	3.4243	1.3347	2.4265	3.2210
	$\alpha = 1$	1.8936	2.2638	2.7554	2.5768	2.6678	3.4624	1.3285	2.4319	3.2497
	[87]	1.8881	2.2559	2.7554	2.5910	2.6705	3.4424	1.3311	2.4326	3.2534

Çizelge 3.7 : Dört kenarı serbest kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.

$\gamma = 0.5$	1. Frekans	2. Frekans	3. Frekans
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.99$			
$\alpha = 0.90$			
$\alpha = 0.80$			

3.1.4 Dört kenarı (CFSF) bağlı plak

Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın farklı γ ve α lar için ilk 8 frekans değerleri Çizelge 3.8 de, ilk 3 frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen kesirli ve klasik yer değiştirmelerin mutlak farkı Çizelge 3.9 da, $\gamma = 0.5$ ve farklı alfalar için frekans değerleri ise Şekil 3.7 de verilmektedir.



Şekil 3.7 : Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın $\gamma = 0.5$ ve farklı α lar için frekans değerleri.

Çizelge 3.8 : Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın farklı γ ve α lar için ilk 8 frekans değerleri.

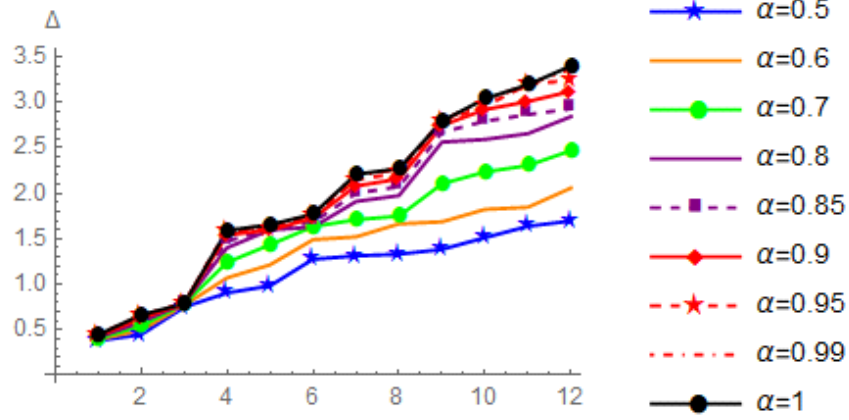
γ	Çözüm Yöntemi	1	2	3	4	5	6	7	8
0.1	$\alpha = 0.80$	0.2128	0.6285	0.7273	0.8268	1.1238	1.2869	1.4142	1.7025
	$\alpha = 0.90$	0.1821	0.5916	0.7159	0.8215	1.1577	1.3764	1.5619	1.7062
	$\alpha = 0.99$	0.1596	0.5525	0.7024	0.8191	1.1745	1.4471	1.6877	1.6911
	$\alpha = 1$	0.1575	0.5482	0.7009	0.8189	1.1758	1.4545	1.6858	1.7054
	[87]	0.1571	0.5474	0.6983	0.8178	1.1727	1.4510	1.6838	1.6980
0.5	$\alpha = 0.80$	0.5842	0.8283	1.4762	1.6407	1.7260	2.2800	2.3125	2.5753
	$\alpha = 0.90$	0.5911	0.8237	1.5878	1.7068	1.7899	2.3167	2.6121	2.8579
	$\alpha = 0.99$	0.5966	0.8217	1.6658	1.6910	1.8932	2.3252	2.8621	3.0352
	$\alpha = 1$	0.5972	0.8217	1.6731	1.6894	1.9029	2.3251	2.8885	3.0546
	[87]	0.5975	0.8178	1.6779	1.6838	1.9166	2.3294	2.9136	3.0599

Çizelge 3.9 : Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğişirmelerin mutlak farkı.

$\gamma = 0.5$	<u>1. Frekans</u>	<u>2. Frekans</u>	<u>3. Frekans</u>
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.99$			
$\alpha = 0.90$			
$\alpha = 0.80$			

3.1.5 Dört kenarı (CFFF) bağlı plak

Dört kenarı (CFFF) ile bağlı kare plağın ilk 12 frekans değerleri Çizelge 3.10 da, ilk 3 frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen kesirli ve klasik yer değiştirmelerin mutlak farkı Çizelge 3.11 de verilmektedir. Ayrıca, $\gamma = 0.5$ ve farklı α lar için frekans değerleri Şekil 3.8 de gösterilmektedir.



Şekil 3.8 : Dört kenarı (CFFF) bağlı kare plağın $\gamma = 0.5$ ve farklı α lar için frekans değerleri.

Çizelge 3.10: Dört kenarı (CFFF) bağlı kare plağın farklı modlar ve α lar için ilk 12 frekans değerleri.

γ		SS-1	SS-2	SS-3	SA-1	SA-2	SA-3	AS-1	AS-2	AS-3	AA-1	AA-2	AA-3
0.5	$\alpha = 0.80$	1.4025	2.5642	2.6575	0.4174	1.5983	1.9761	0.5860	1.6296	2.5933	0.7916	1.9111	2.8448
	$\alpha = 0.90$	1.5432	2.7466	3.0108	0.4303	1.5967	2.1593	0.6265	1.7278	2.9218	0.7911	2.0810	3.1232
	$\alpha = 0.99$	1.5919	2.7984	3.1989	0.44282	1.6459	2.2652	0.6605	1.7694	3.0217	0.7866	2.1988	3.3697
	$\alpha = 1$	1.5918	2.7958	3.1947	0.4443	1.6558	2.2734	0.6642	1.7716	3.0415	0.7860	2.2097	3.4009
	[62]	1.5962	2.7974	3.1994	0.4473	1.6642	2.2777	0.6674	1.7744	3.0680	0.7883	2.2196	3.4387

Farklı sınır koşulları için kare plağın ilk 2 frekans değerleri $\gamma = 0.1$ ve farklı α lar için Çizelge 3.11 de verilmiştir.

Çizelge 3.11 : Farklı sınır koşulları için kare plağın $\gamma = 0.1$ ve farklı α lar için ilk 2 frekans değerleri.

γ		CCCC-1	CCCC-2	SSSS-1	SSSS-2	FFFF-1	FFFF-2	CFSF-1	CFSF-2	CFFF-1	CFFF-2
0.1	$\alpha = 0.80$	2.8982	4.8471	2.0966	3.9979	1.9903	2.3414	0.7125	2.1044	0.4705	1.1664
	$\alpha = 0.90$	3.1369	5.6041	2.0400	4.3574	1.6254	2.1475	0.6097	1.9807	0.4024	0.9732
	$\alpha = 0.99$	3.3080	6.2768	1.9457	4.5997	1.3200	1.9423	0.5344	1.8498	0.3533	0.8321
	$\alpha = 1$	3.3244	6.3504	1.9342	4.6222	1.2893	1.9205	0.5275	1.8353	0.3489	0.8189

Çizelge 3.12 : Dört kenarı (CFFF) bağlı kare plağın farklı α değerleri için ilk 3 frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğişirmelerin mutlak farkı.

$\gamma = 0.5$	<u>1. Frekans</u>	<u>2. Frekans</u>	<u>3. Frekans</u>
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.99$			
$\alpha = 0.90$			
$\alpha = 0.80$			



4. CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ YARDIMIYLA MİKROGERMELİ ORTAM TEORİSİYLE MODELLENEN PLAKLARIN TİTREŞİM ANALİZİ

Bu bölümde mikrogermeli ortam teorisiyle modellenen plakların nonlokal titreşim analizi Caputo kesirli türevi yardımıyla yapılacaktır. Mikrogermeli ortam teorisi parçacıkların makro hareketi yanısıra, bu şekil değiştirmeden bağımsız olarak mikro ölçekte dönme ve hacimsel genleşme yapabildiği varsayımına dayanmaktadır.

Lineer izotropik mikrogermeli ortam teorisinin bünye denklemleri

$$\begin{aligned}
 t_{kl} &= \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{kl} + (\mu + \kappa) \varepsilon_{kl} + \mu \varepsilon_{lk} + \lambda_0 \theta \delta_{kl}, \\
 m_{kl} &= \bar{\alpha} \gamma_{mm} \delta_{kl} + \beta \gamma_{kl} + \gamma \gamma_{lk}, \\
 m_k &= a_0 \theta_{,k}, \\
 s - t &= \lambda_1 \theta + \lambda_0 \varepsilon_{kk}, \quad s = m_{kk}, \quad t = t_{kk}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

denklemleri ile verilir. Burada λ ve μ Lamé sabitleri, $\kappa, \bar{\alpha}, \beta$ ve γ mikrodönme (micropolar) ve λ_0, λ_1 ve a_0 mikro hacimsel genleşme (microelongation) malzeme sabitleridir. t_{kl} gerilme tansörünün, m_{kl} kuvvet çifti tansörünün ve m_k mikro hacimsel genleşme vektörünün bileşenleridir. Genleme büyüklükleri ise,

$$\varepsilon_{kl} = u_{l,k} + e_{lmn} \phi_m, \quad \gamma_{kl} = \phi_{k,l}, \quad \gamma_k = \theta_{,k} \tag{4.2}$$

olarak verilmektedir.

Uzunluğu a , genişliği b ve kalınlığı h olan kalın plağın maksimum enerji fonksiyoneli

$$\Pi = V_{\max} - T_{\max} \tag{4.3}$$

olarak verilmiştir. Burada T_{\max} ve V_{\max} sırasıyla kinetik ve elastik genleme enerjileridir.

Klasik yer değiştirme, mikrogerme ve mikrodönme bileşenleri serbest harmonik hareket altında genlik fonksiyonlar cinsinden,

$$\{\mathbf{u}(x, y, z, t), \boldsymbol{\phi}(x, y, z, t), \theta(x, y, z, t)\} = \{\mathbf{U}(x, y, z), \boldsymbol{\Phi}(x, y, z), \Theta(x, y, z)\} e^{i\omega t} \quad (4.4)$$

tanımlanmıştır. Burada, ω doğal frekansa karşı gelir. Boyutsuz değişkenler,

$$\xi = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{2y}{b}, \quad \zeta = \frac{2z}{h} \quad (4.5)$$

olarak tanımlandığında, elastik genleme ve kinetik enerjiler,

$$V = \frac{abh}{16} \left(\frac{2}{a}\right)^{2\alpha} (l)^{2\alpha-2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\lambda \bar{\Lambda}_1^2 + (2\mu + \kappa) \bar{\Lambda}_2 + 2\mu \bar{\Lambda}_3 + (\mu + \kappa) \bar{\Lambda}_4 + \bar{\alpha} \bar{\Lambda}_5^2 + (\beta + \gamma) \bar{\Lambda}_6 \right. \\ \left. + 2\beta \bar{\Lambda}_7 + \gamma \bar{\Lambda}_8 + a_0 \bar{\Lambda}_9 \right] d\zeta d\eta d\xi \quad (4.6)$$

$$+ \frac{abh}{16} \left(\frac{2}{a}\right)^\alpha (l)^{\alpha-1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\kappa \bar{\Lambda}_3 + 2\lambda_0 \Theta \bar{\Lambda}_1 \right] d\zeta d\eta d\xi + \frac{abh}{16} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\kappa \bar{\bar{\Lambda}}_3 + \lambda_1 \Theta^2 \right] d\zeta d\eta d\xi$$

$$T = \frac{\rho}{16} abh \omega^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ [U_1^2 + U_2^2 + U_3^2] + j[\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2] + 3j\Theta^2 \right\} d\zeta d\eta d\xi \quad (4.7)$$

haline gelir. Burada

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1 &= \bar{\varepsilon}_{\xi\xi} + \bar{\varepsilon}_{\eta\eta} + \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta}, & \bar{\Lambda}_2 &= \bar{\varepsilon}_{\xi\xi}^2 + \bar{\varepsilon}_{\eta\eta}^2 + \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta}^2, \\ \bar{\Lambda}_3 &= {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\xi} + {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\xi} + {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta} {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\eta}, \\ \bar{\bar{\Lambda}}_3 &= ({}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} - {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\xi}) {}_2\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} + ({}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} - {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\xi}) {}_2\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} + ({}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta} - {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\eta}) {}_2\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta}, \\ \bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_3 &= {}_2\bar{\varepsilon}_{\xi\eta}^2 + {}_2\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta}^2 + {}_2\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta}^2, & \bar{\Lambda}_4 &= {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\eta}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\xi}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\xi}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\eta}^2, \\ \bar{\Lambda}_5 &= \bar{\gamma}_{\xi\xi} + \bar{\gamma}_{\eta\eta} + \bar{\gamma}_{\zeta\zeta}, & \bar{\Lambda}_6 &= \bar{\gamma}_{\xi\xi}^2 + \bar{\gamma}_{\eta\eta}^2 + \bar{\gamma}_{\zeta\zeta}^2, \\ \bar{\Lambda}_7 &= \bar{\gamma}_{\xi\eta} \bar{\gamma}_{\eta\xi} + \bar{\gamma}_{\xi\zeta} \bar{\gamma}_{\zeta\xi} + \bar{\gamma}_{\eta\zeta} \bar{\gamma}_{\zeta\eta}, & \bar{\Lambda}_8 &= \bar{\gamma}_{\xi\eta}^2 + \bar{\gamma}_{\eta\xi}^2 + \bar{\gamma}_{\xi\zeta}^2 + \bar{\gamma}_{\zeta\xi}^2 + \bar{\gamma}_{\eta\zeta}^2 + \bar{\gamma}_{\zeta\eta}^2, \\ \bar{\Lambda}_9 &= \bar{\Theta}_{,\xi}^2 + \bar{\Theta}_{,\eta}^2 + \bar{\Theta}_{,\zeta}^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{\xi\xi} &= \frac{\partial^\alpha U_1}{\partial \xi^\alpha}, \bar{\varepsilon}_{\eta\eta} = \alpha_1 \frac{\partial^\alpha U_2}{\partial \eta^\alpha}, \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^\alpha U_3}{\partial \zeta^\alpha}, {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} = \frac{\partial^\alpha U_2}{\partial \xi^\alpha}, {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\xi} = \alpha_1 \frac{\partial^\alpha U_1}{\partial \eta^\alpha}, {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} = \frac{\partial^\alpha U_3}{\partial \xi^\alpha}, \\
{}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\xi} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^\alpha U_1}{\partial \zeta^\alpha}, {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta} = \alpha_1 \frac{\partial^\alpha U_3}{\partial \eta^\alpha}, {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\eta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^\alpha U_2}{\partial \zeta^\alpha}, {}_2\bar{\varepsilon}_{ij} = e_{jik} \Phi_k, \quad (i, j, k = \xi, \eta, \zeta), \\
\bar{\gamma}_{\xi\xi} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}, \bar{\gamma}_{\eta\eta} = \alpha_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}, \bar{\gamma}_{\zeta\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \zeta}, \bar{\gamma}_{\xi\eta} = \alpha_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \bar{\gamma}_{\eta\xi} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}, \bar{\gamma}_{\xi\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta}, \\
\bar{\gamma}_{\zeta\xi} &= \frac{\partial^\alpha \Phi_3}{\partial \xi^\alpha}, \bar{\gamma}_{\eta\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^\alpha \Phi_2}{\partial \zeta^\alpha}, \bar{\gamma}_{\zeta\eta} = \alpha_1 \frac{\partial^\alpha \Phi_3}{\partial \eta^\alpha}, \bar{\Theta}_{,\xi} = \frac{\partial^\alpha \Theta}{\partial \xi^\alpha}, \bar{\Theta}_{,\eta} = \alpha_1 \frac{\partial^\alpha \Theta}{\partial \eta^\alpha}, \bar{\Theta}_{,\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^\alpha \Theta}{\partial \zeta^\alpha}, \\
\alpha_1 &= \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha, \alpha_2 = \left(\frac{h}{b}\right)^\alpha
\end{aligned} \tag{4.9}$$

dir. Bu çalışmada kabul edilebilir fonksiyonlar, [88]'de olduğu gibi sınır fonksiyonlarıyla çarpılmış Chebyshev polinomları serisi olarak seçilmiştir. Bu yüzden her genlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
U_1(\xi, \eta, \zeta) &= F_{u_1}(\xi, \eta) \sum_{i,j,k=1}^{\infty} A_{ijk} P_i(\xi) P_j(\eta) P_k(\zeta), \quad \Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = F_{\Phi_1}(\xi, \eta) \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \hat{A}_{ijk} P_i(\xi) P_j(\eta) P_k(\zeta), \\
U_2(\xi, \eta, \zeta) &= F_{u_2}(\xi, \eta) \sum_{l,m,n=1}^{\infty} B_{lmn} P_l(\xi) P_m(\eta) P_n(\zeta), \quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) = F_{\Phi_2}(\xi, \eta) \sum_{i,\tilde{m},\tilde{n}=1}^{\infty} \hat{B}_{i\tilde{m}\tilde{n}} P_i(\xi) P_{\tilde{m}}(\eta) P_{\tilde{n}}(\zeta), \\
U_3(\xi, \eta, \zeta) &= F_{u_3}(\xi, \eta) \sum_{p,q,r=1}^{\infty} C_{pqr} P_p(\xi) P_q(\eta) P_r(\zeta), \quad \Phi_3(\xi, \eta, \zeta) = F_{\Phi_3}(\xi, \eta) \sum_{\hat{p},\hat{q},\hat{r}=1}^{\infty} \hat{C}_{\hat{p}\hat{q}\hat{r}} P_{\hat{p}}(\xi) P_{\hat{q}}(\eta) P_{\hat{r}}(\zeta), \\
\Theta(\xi, \eta, \zeta) &= F_{\Theta}(\xi, \eta) \sum_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}=1}^{\infty} \hat{A}_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} P_{\hat{i}}(\xi) P_{\hat{j}}(\eta) P_{\hat{k}}(\zeta)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklinindedir ve sınır koşulları için kabul edilebilir fonksiyonlar

$$F_{\delta}(\xi, \eta) = f_{\delta}^1(\xi) f_{\delta}^2(\eta), \quad (\delta = u_i, \phi_i, \theta, \quad i = 1, \dots, 3) \tag{4.11}$$

olarak seçilebilir. Klasik sınır koşullarına ek olarak mikro şekil değiştirmelere karşı gelen sınır fonksiyonlarının ise serbest olduğu [88], yani

$$f_{\delta}^1(\xi) = f_{\delta}^2(\eta) = 1, \quad (\delta = \phi_i, \theta, \quad i = 1, \dots, 3) \tag{4.12}$$

varsayılabilir. Sonuç olarak, Chebyshev polinomlarının katsayılarına göre enerji fonksiyonelinin

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{ijk}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial B_{lmn}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial C_{pqr}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{A}_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{B}_{\hat{l}\hat{m}\hat{n}}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{C}_{\hat{p}\hat{q}\hat{r}}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{A}_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}} = 0 \quad (4.13)$$

şeklinde minimize edilmesi, frekanslar için iyi bilinen genelleştirilmiş özdeğer problemini

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})\mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

verir. Burada

$$\Omega = \frac{a^\alpha \omega}{(2l)^{\alpha-1}} \sqrt{\rho} \quad (4.15)$$

şeklindeir. \mathbf{K} , \mathbf{M} matrisleri ve \mathbf{Z} sütun vektörleri

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} [K_{u_1 u_1}] & [K_{u_1 u_2}] & [K_{u_1 u_3}] & \mathbf{0} & [K_{u_1 \phi_2}] & [K_{u_1 \phi_3}] & [K_{u_1 \theta}] \\ [K_{u_1 u_2}]^T & [K_{u_2 u_2}] & [K_{u_2 u_3}] & [K_{u_2 \phi_1}] & \mathbf{0} & [K_{u_2 \phi_3}] & [K_{u_2 \theta}] \\ [K_{u_1 u_3}]^T & [K_{u_2 u_3}]^T & [K_{u_3 u_3}] & [K_{u_3 \phi_1}] & [K_{u_3 \phi_2}] & \mathbf{0} & [K_{u_3 \theta}] \\ \mathbf{0} & [K_{u_2 \phi_1}]^T & [K_{u_3 \phi_1}]^T & [K_{\phi_1 \phi_1}] & [K_{\phi_1 \phi_2}] & [K_{\phi_1 \phi_3}] & \mathbf{0} \\ [K_{u_1 \phi_2}]^T & \mathbf{0} & [K_{u_3 \phi_2}]^T & [K_{\phi_1 \phi_2}]^T & [K_{\phi_2 \phi_2}] & [K_{\phi_2 \phi_3}] & \mathbf{0} \\ [K_{u_1 \phi_3}]^T & [K_{u_2 \phi_3}]^T & \mathbf{0} & [K_{\phi_1 \phi_3}]^T & [K_{\phi_2 \phi_3}]^T & [K_{\phi_3 \phi_3}] & \mathbf{0} \\ [K_{u_1 \theta}]^T & [K_{u_2 \theta}]^T & [K_{u_3 \theta}]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [K_{\theta \theta}] \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} [M_{u_1 u_1}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [M_{u_2 u_2}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{u_3 u_3}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\phi_1 \phi_1}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\phi_2 \phi_2}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\phi_3 \phi_3}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\theta \theta}] \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\hat{\mathbf{A}}}\} \quad (4.18)$$

şeklindedir. (4.18) de her bir alt sütun vektörü, örneğin \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \{A_{111}, \dots, A_{11N}, \dots, A_{1k1}, \dots, A_{1kN}, \dots, A_{l11}, \dots, A_{lJK}\} \quad (4.19)$$

yapısındadır. Alt blok matrisler,

$$\begin{aligned} [K_{u_1 u_1}] &= (\lambda + 2\mu + \kappa) D_{u_1 i u_1 \underline{i}}^{1,1} G_{u_1 j u_1 \underline{j}}^{0,0} H_{k \underline{k}}^{0,0} + (\mu + \kappa) \alpha_1^2 \left(D_{u_1 i u_1 \underline{i}}^{0,0} G_{u_1 j u_1 \underline{j}}^{1,1} H_{k \underline{k}}^{0,0} + \frac{1}{\alpha_2^2} D_{u_1 i u_1 \underline{i}}^{0,0} G_{u_1 j u_1 \underline{j}}^{0,0} H_{k \underline{k}}^{1,1} \right), \\ [K_{u_2 u_2}] &= \alpha_1^2 \left((\lambda + 2\mu + \kappa) D_{u_2 l u_2 \underline{l}}^{0,0} G_{u_2 m u_2 \underline{m}}^{1,1} H_{n \underline{n}}^{0,0} + (\mu + \kappa) \frac{1}{\alpha_2^2} D_{u_2 l u_2 \underline{l}}^{0,0} G_{u_2 m u_2 \underline{m}}^{0,0} H_{n \underline{n}}^{1,1} \right) \\ &\quad + (\mu + \kappa) D_{u_2 l u_2 \underline{l}}^{1,1} G_{u_2 m u_2 \underline{m}}^{0,0} H_{n \underline{n}}^{0,0}, \\ [K_{u_3 u_3}] &= \alpha_1^2 \left(\frac{1}{\alpha_2^2} (\lambda + 2\mu + \kappa) D_{u_3 p u_3 \underline{p}}^{0,0} G_{u_3 q u_3 \underline{q}}^{0,0} H_{r \underline{r}}^{1,1} + (\mu + \kappa) D_{u_3 p u_3 \underline{p}}^{0,0} G_{u_3 q u_3 \underline{q}}^{1,1} H_{r \underline{r}}^{0,0} \right) \\ &\quad + (\mu + \kappa) D_{u_3 p u_3 \underline{p}}^{1,1} G_{u_3 q u_3 \underline{q}}^{0,0} H_{r \underline{r}}^{0,0}, \\ [K_{\phi \phi}] &= (\bar{\alpha} + \beta + \gamma) D_{\phi \hat{i} \phi \hat{i}}^{1,1} G_{\phi \hat{j} \phi \hat{j}}^{0,0} H_{k \hat{k}}^{0,0} + (\alpha_3)^2 \frac{a^2}{4} \kappa D_{\phi \hat{i} \phi \hat{i}}^{0,0} G_{\phi \hat{j} \phi \hat{j}}^{0,0} H_{k \hat{k}}^{0,0} \\ &\quad + \gamma \alpha_1^2 \left(D_{\phi \hat{i} \phi \hat{i}}^{0,0} G_{\phi \hat{j} \phi \hat{j}}^{1,1} H_{k \hat{k}}^{0,0} + \frac{1}{\alpha_2^2} D_{\phi \hat{i} \phi \hat{i}}^{0,0} G_{\phi \hat{j} \phi \hat{j}}^{0,0} H_{k \hat{k}}^{1,1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{\phi_2\phi_2}] &= \alpha_1^2 \left((\bar{\alpha} + \beta + \gamma) D_{\phi_2\hat{l}\phi_2\hat{l}}^{0,0} G_{\phi_2\hat{m}\phi_2\hat{m}}^{1,1} H_{\hat{n}\hat{n}}^{0,0} + \gamma \frac{1}{\alpha_2^2} D_{\phi_2\hat{l}\phi_2\hat{l}}^{0,0} G_{\phi_2\hat{m}\phi_2\hat{m}}^{0,0} H_{\hat{n}\hat{n}}^{1,1} \right) \\
&\quad + \gamma D_{\phi_2\hat{l}\phi_2\hat{l}}^{1,1} G_{\phi_2\hat{m}\phi_2\hat{m}}^{0,0} H_{\hat{n}\hat{n}}^{0,0} + (\alpha_3)^2 \frac{a^2}{4} \kappa D_{\phi_2\hat{l}\phi_2\hat{l}}^{0,0} G_{\phi_2\hat{m}\phi_2\hat{m}}^{0,0} H_{\hat{n}\hat{n}}^{0,0}, \\
[K_{\phi_3\phi_3}] &= \alpha_1^2 \left(\frac{1}{\alpha_2^2} (\bar{\alpha} + \beta + \gamma) D_{\phi_3\hat{p}\phi_3\hat{p}}^{0,0} G_{\phi_3\hat{q}\phi_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{r}\hat{r}}^{1,1} + \gamma D_{\phi_3\hat{p}\phi_3\hat{p}}^{0,0} G_{\phi_3\hat{q}\phi_3\hat{q}}^{1,1} H_{\hat{r}\hat{r}}^{0,0} \right) \\
&\quad + \gamma D_{\phi_3\hat{p}\phi_3\hat{p}}^{1,1} G_{\phi_3\hat{q}\phi_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{r}\hat{r}}^{0,0} + (\alpha_3)^2 \frac{a^2}{4} \kappa D_{\phi_3\hat{p}\phi_3\hat{p}}^{0,0} G_{\phi_3\hat{q}\phi_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{r}\hat{r}}^{0,0}, \\
[K_{\theta\theta}] &= a_0 \left(D_{\theta\hat{i}\theta\hat{i}}^{1,1} G_{\theta\hat{j}\theta\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0} + \alpha_1^2 D_{\theta\hat{i}\theta\hat{i}}^{0,0} G_{\theta\hat{j}\theta\hat{j}}^{1,1} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} D_{\theta\hat{i}\theta\hat{i}}^{0,0} G_{\theta\hat{j}\theta\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{1,1} \right) \\
&\quad + (\alpha_3)^2 \frac{a^2}{4} \lambda_1 D_{\theta\hat{i}\theta\hat{i}}^{0,0} G_{\theta\hat{j}\theta\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0}, \\
[K_{u_1u_2}] &= \alpha_1 \left(\lambda D_{u_1\hat{u}_2\hat{l}}^{1,0} G_{u_1\hat{j}u_2\hat{m}}^{0,1} H_{\hat{k}n}^{0,0} + \mu D_{u_1\hat{u}_2\hat{l}}^{0,1} G_{u_1\hat{j}u_2\hat{m}}^{1,0} H_{\hat{k}n}^{0,0} \right), \\
[K_{u_1u_3}] &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\lambda D_{u_1\hat{u}_3\hat{p}}^{1,0} G_{u_1\hat{j}u_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{k}r}^{0,1} + \mu D_{u_1\hat{u}_3\hat{p}}^{0,1} G_{u_1\hat{j}u_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{k}r}^{1,0} \right), \\
[K_{u_2u_3}] &= \frac{\alpha_2^2}{\alpha_2} \left(\lambda D_{u_2\hat{u}_3\hat{p}}^{0,0} G_{u_2\hat{m}u_3\hat{q}}^{1,0} H_{nr}^{0,1} + \mu D_{u_2\hat{u}_3\hat{p}}^{0,0} G_{u_2\hat{m}u_3\hat{q}}^{0,1} H_{nr}^{1,0} \right), \\
[K_{\phi_1\phi_2}] &= \alpha_1 \left(\bar{\alpha} D_{\phi_1\hat{l}\phi_2\hat{l}}^{1,0} G_{\phi_1\hat{j}\phi_2\hat{m}}^{0,1} H_{\hat{k}\hat{n}}^{0,0} + \beta D_{\phi_1\hat{l}\phi_2\hat{l}}^{0,1} G_{\phi_1\hat{j}\phi_2\hat{m}}^{1,0} H_{\hat{k}\hat{n}}^{0,0} \right), \\
[K_{\phi_1\phi_3}] &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\bar{\alpha} D_{\phi_1\hat{l}\phi_3\hat{p}}^{1,0} G_{\phi_1\hat{j}\phi_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{r}}^{0,1} + \beta D_{\phi_1\hat{l}\phi_3\hat{p}}^{0,1} G_{\phi_1\hat{j}\phi_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{r}}^{1,0} \right), \\
[K_{\phi_2\phi_3}] &= \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} \left(\bar{\alpha} D_{\phi_2\hat{l}\phi_3\hat{p}}^{0,0} G_{\phi_2\hat{m}\phi_3\hat{q}}^{1,0} H_{\hat{n}\hat{r}}^{0,1} + \beta D_{\phi_2\hat{l}\phi_3\hat{p}}^{0,0} G_{\phi_2\hat{m}\phi_3\hat{q}}^{0,1} H_{\hat{n}\hat{r}}^{1,0} \right), \\
[K_{u_1\phi_2}] &= -\alpha_3 \frac{a}{4} \kappa \frac{\alpha_1}{\alpha_2} D_{u_1\hat{i}\phi_2\hat{l}}^{0,0} G_{u_1\hat{j}\phi_2\hat{m}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{n}}^{1,0}, \quad [K_{u_1\phi_3}] = \alpha_3 \frac{a}{4} \kappa \alpha_1 D_{u_1\hat{i}\phi_3\hat{p}}^{0,0} G_{u_1\hat{j}\phi_3\hat{q}}^{1,0} H_{\hat{k}\hat{r}}^{0,0}, \\
[K_{u_1\theta}] &= \frac{a}{2} \lambda_0 D_{u_1\hat{i}\theta\hat{i}}^{1,0} G_{u_1\hat{j}\theta\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0}, \quad [K_{u_2\phi_1}] = \alpha_3 \frac{a}{4} \kappa \frac{\alpha_1}{\alpha_2} D_{u_2\hat{l}\phi_1\hat{i}}^{0,0} G_{u_2\hat{m}\phi_1\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{n}\hat{k}}^{1,0}, \\
[K_{u_2\phi_3}] &= -\alpha_3 \frac{a}{4} \kappa D_{u_2\hat{l}\phi_3\hat{p}}^{1,0} G_{u_2\hat{m}\phi_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{n}\hat{r}}^{0,0}, \quad [K_{u_2\theta}] = \alpha_3 \frac{a}{2} \lambda_0 \alpha_1 D_{u_2\hat{l}\theta\hat{i}}^{0,0} G_{u_2\hat{m}\theta\hat{j}}^{1,0} H_{\hat{n}\hat{k}}^{0,0}, \\
[K_{u_3\phi_1}] &= -\alpha_3 \frac{a}{4} \kappa \alpha_1 D_{u_3\hat{p}\phi_1\hat{i}}^{0,0} G_{u_3\hat{q}\phi_1\hat{j}}^{1,0} H_{\hat{r}\hat{k}}^{0,0}, \quad [K_{u_3\phi_2}] = \alpha_3 \frac{a}{4} \kappa D_{u_3\hat{p}\phi_2\hat{l}}^{1,0} G_{u_3\hat{q}\phi_2\hat{m}}^{0,0} H_{\hat{r}\hat{n}}^{0,0}, \\
[K_{u_3\theta}] &= \alpha_3 \frac{a}{2} \lambda_0 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} D_{u_3\hat{p}\theta\hat{i}}^{0,0} G_{u_3\hat{q}\theta\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{r}\hat{k}}^{1,0}, \quad [M_{u_1u_1}] = \frac{1}{4} D_{u_1\hat{u}_1\hat{l}}^{0,0} G_{u_1\hat{j}u_1\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0}, \\
[M_{u_2u_2}] &= \frac{1}{4} D_{u_2\hat{u}_2\hat{l}}^{0,0} G_{u_2\hat{m}u_2\hat{m}}^{0,0} H_{\hat{n}\hat{n}}^{0,0}, \quad [M_{u_3u_3}] = \frac{1}{4} D_{u_3\hat{u}_3\hat{p}}^{0,0} G_{u_3\hat{q}u_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{r}\hat{r}}^{0,0}, \\
[M_{\phi_1\phi_1}] &= \frac{1}{4} j D_{\phi_1\hat{l}\phi_1\hat{l}}^{0,0} G_{\phi_1\hat{j}\phi_1\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0}, \quad [M_{\phi_2\phi_2}] = \frac{1}{4} j D_{\phi_2\hat{l}\phi_2\hat{l}}^{0,0} G_{\phi_2\hat{m}\phi_2\hat{m}}^{0,0} H_{\hat{n}\hat{n}}^{0,0}, \\
[M_{\phi_3\phi_3}] &= \frac{1}{4} j D_{\phi_3\hat{p}\phi_3\hat{p}}^{0,0} G_{\phi_3\hat{q}\phi_3\hat{q}}^{0,0} H_{\hat{r}\hat{r}}^{0,0}, \quad [M_{\theta\theta}] = \frac{3}{4} j D_{\theta\hat{i}\theta\hat{i}}^{0,0} G_{\theta\hat{j}\theta\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olarak elde edilmiştir. Burada,

$$D_{\beta_1\tau_1\beta_2\tau_2}^{s,\bar{s}} = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^s (f_{\beta_1}^1(\xi)P_{\tau_1}(\xi))}{d\xi^s} \frac{d^{\bar{s}} (f_{\beta_2}^1(\xi)P_{\tau_2}(\xi))}{d\xi^{\bar{s}}} \right\} d\xi, \quad H_{\tau_1\tau_2}^{s,\bar{s}} = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^s P_{\tau_1}(\zeta)}{d\zeta^s} \frac{d^{\bar{s}} P_{\tau_2}(\zeta)}{d\zeta^{\bar{s}}} \right\} d\zeta,$$

$$G_{\beta_1\tau_1\beta_2\tau_2}^{s,\bar{s}} = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^s (f_{\beta_1}^2(\eta)P_{\tau_1}(\eta))}{d\eta^s} \frac{d^{\bar{s}} (f_{\beta_2}^2(\eta)P_{\tau_2}(\eta))}{d\eta^{\bar{s}}} \right\} d\eta, \quad \alpha_3 = \left(\frac{a}{2l} \right)^{\alpha-1} \quad (4.21)$$

$$(0 \leq s, \bar{s} \leq 1 \quad \beta_1, \beta_2 = u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \theta, \quad \tau_1, \tau_2 = i, j, k, l, m, n, p, q, r, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l}, \underline{m}, \underline{n},$$

$$\underline{p}, \underline{q}, \underline{r}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{l}, \hat{m}, \hat{n}, \hat{p}, \hat{q}, \hat{r}, \hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}}, \hat{\underline{l}}, \hat{\underline{m}}, \hat{\underline{n}}, \hat{\underline{p}}, \hat{\underline{q}}, \hat{\underline{r}}, \hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}}, \hat{\underline{l}}, \hat{\underline{m}}, \hat{\underline{n}})$$

şeklinde dir. Literatürde verilen örneklerle karşılaştırmak için boyutsuz frekans parametreleri

$$\Delta = \frac{b^2}{ah\pi^2} \sqrt{12(1-\nu^2)} \Omega = \frac{b^2 a^{\alpha-1} w}{h\pi^2 (2l)^{\alpha-1}} \sqrt{\frac{\rho t}{D}} \quad (4.22)$$

şeklinde ifade edilmiştir, burada $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ plağın eğilme rijitliğidir.

Klasik boyuna ve enine yer değiştirme dalgalarının yanısıra kuple “boyuna mikro genleme”, “enine mikro dönme dalgası” ve kuple olmayan “boyuna mikro dönme dalgası” olmak üzere üç yeni mikro dalganın varlığı literatürde çeşitli çalışmalar tarafından kanıtlanmıştır [89-91]. Bu yeni dalgaların varlığından dolayı klasik frekanslara ek olarak yeni frekanslar gözlenmektedir. Dahası, bu ek frekanslar mikro malzeme sabitlerine bağlıdır ve değerleri, mikro sabitler büyüdükçe hızla artar [88]. Bu çalışmada, Gauthier malzemesiyle [92] modellenen plak için ortamın mikro karakterinden dolayı hem klasik hem de ek frekansların kesirli türevin mertebesine olan bağlılığı incelenerek sonuçlar Çizelge 4.1 de verilmiştir. Burada, malzeme özellikleri $\nu=0.4$, $E=5.29 \text{ GPa}$, $j=1.96 \times 10^{-7} \text{ m}^2$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0.1$ and $\rho=2192 \text{ kg/m}^3$ olarak alınmıştır ve sınır koşulları SSSS dir.

Çizelge 4.1 : Dört kenarı basit bağlı olan mikrogermeli plağın frekansları.

Mikro Sabitler $\left(\kappa, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, a_0, \lambda_0, \lambda_1 \right)$	α	Frekanslar: Klasik (normal), mikropolar (altı çizgili), mikrojenleşme (italik) ve saptırılmış klasik frekanslar (koyu siyah).
0	0.90	1.8726, 3.9609, 3.9923, 4.9532, 5.0067, 5.8752, 6.8742, 6.8778, 8.0020, 8.5195,
	0.99	1.9221, 4.5228, 4.5231, 5.9262, 5.9268, 6.9041, 8.3680, 8.3680, 8.4817, 10.4776.
	1	1.9273, 4.5858, 4.5858, 6.0395, 6.0395, 7.0226, 8.5411, 8.5483, 8.5483, 10.7084
10^{-10}	0.90	<i>0.0151, 0.0263, 0.0348, 0.0398, 0.0433, 0.0553, 0.0556, 0.0754, 0.0767, 0.0826,</i> <i>0.0867, 0.0929, 0.1079, 0.1181, 0.1249, 0.1298, 0.1341, 0.1399, 0.1474, 0.1546</i>
	0.99	<i>0.0179, 0.0310, 0.0368, 0.0425, 0.0463, 0.0579, 0.0596, 0.0824, 0.0875, 0.0902,</i> <i>0.0969, 0.1052, 0.1139, 0.1261, 0.1273, 0.1319, 0.1357, 0.1427, 0.1529, 0.1584</i>
	1	<i>0.0182, 0.0315, 0.0371, 0.0428, 0.0466, 0.0580, 0.0600, 0.0829, 0.0888, 0.0909,</i> <i>0.0980, 0.1064, 0.1158, 0.1274, 0.1291, 0.1334, 0.1376, 0.1436, 0.1561, 0.1593</i>
10^{-6}	0.90	<i>1.5185, 1.8726, 2.6547, 3.4856, 3.9610, 3.9889, 3.9923, 4.3353, 4.95327, 5.5339,</i> <i>5.5397, 5.5677, 5.5864, 5.8752, 6.8742, 7.5405, 7.6748, 8.0020, 8.2654, 8.5195</i>
	0.99	<i>1.7908, 1.9221, 3.1018, 3.6851, 4.2515, 4.5228, 4.5232, 4.6371, 5.7921, 5.9262,</i> <i>5.9649, 5.9649, 6.9041, 8.2433, 8.3680, 8.3680, 8.4817, 8.7557, 9.0244, 9.6957</i>
	1	<i>1.8205, 1.9273, 3.1532, 3.7111, 4.2811, 4.5858, 4.5858, 4.6666, 5.8085, 6.0020,</i> <i>6.0395, 6.0395, 7.0226, 8.2907, 8.5411, 8.5484, 8.5484, 8.8846, 9.0938, 9.8004</i>
10^{-4}	0.90	1.8734, 3.9622, 3.9935, 4.9533, 5.0067, 5.8765, 6.8754, 6.8791, 8.0021, 8.5208
	0.99	1.9232, 4.5245, 4.5249, 5.9262, 5.9268, 6.9058, 8.3697, 8.3697, 8.4818, 10.4792
	1	1.9284, 4.5876, 4.5876, 6.0395, 6.0395, 7.0244, 8.5412, 8.5500, 8.5501, 10.7101
10^{-3}	0.90	1.8804, 3.9738, 4.0050, 4.9536, 5.0070, 5.8881, 6.8869, 6.8903, 8.0026, 8.5323
	0.99	1.9329, 4.5399, 4.5403, 5.9266, 5.9272, 6.9210, 8.3845, 8.3848, 8.4824, 10.4942
	1	1.9385, 4.6035, 4.6035, 6.0399, 6.0399, 7.0400, 8.5419, 8.5653, 8.5656, 10.7253

Çizelge 4.1 den açıkça görülebileceği gibi, hem mikro ek frekanslar hem de klasik frekanslar benzer davranışlar göstermektedir, yani kesirli türevin mertebesi, klasik tamsayı türev mertebesine yaklaştıkça, mikrogermeli nonlokal plağın frekans değerleri de klasik frekanslara yaklaşmaktadır.

4.1 Uygulamalar

Sayısal uygulama olarak dört kenarı basit bağlı (SSSS), serbest (FFFF) ve (CFSF) sınır koşullarına sahip plaklar, farklı simetri modları ve kesirli türevin farklı mertebeleri (α), birim uyum katsayısı ($l=0.5$) ve (4.10) denkleminde $8 \times 8 \times 4$ terim alınarak incelenmektedir. Tüm çizelgelerde kesirli türevin mertebesi adi türeve yaklaştıkça,

nonlokal etkinin azalarak, elde edilen frekansların klasik frekans değerlerine yaklaştığı, yani kesirli türevin tanımından kaynaklanan nonlokal etki ve bu etkinin kesirli türev mertebesi adi türeve yaklaştıkça azalmaya başladığı net olarak görülmektedir.

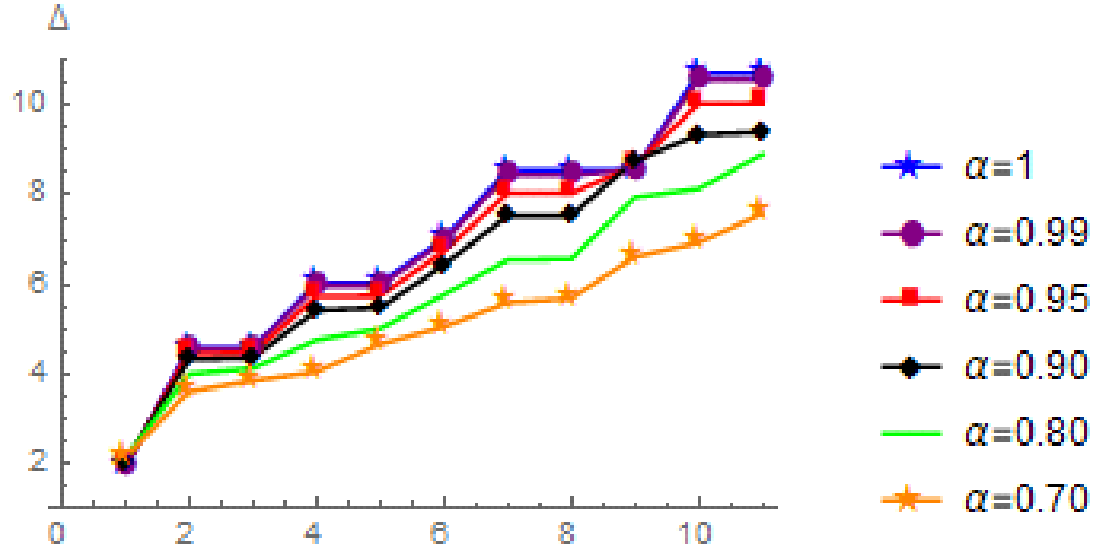
Bu çalışmada incelenen örnekler karşılaştırma amacıyla literatürde bulunan başka çalışmalardan alındığından sonuç frekanslarının karşılaştırılan çalışmalarda verilen klasik frekanslarla örtüşürecek malzeme sabitleri kullanılmıştır. Bu nedenle ek mikro frekanslar anlamlı frekans spektrumunda çok az sayıda gözlenmektedir. Ancak, bu bölümün başında daha ayrıntılı verildiği gibi, mikrogermeli ortam teorisinden bilindiği üzere klasik boyuna ve enine yer değiştirme dalgaların yanısıra ortaya çıkan ek mikro dalgalar bulunmaktadır [88-91]. Bu ek mikro dalgalara karşılık ek mikro frekanslarda ortaya çıkacaktır. Bu nedenle mikro frekansların ölçülebildiği deneysel çalışmalar beklenmektedir. Bu durumda mikro sabitlerin gerçek değerleri hesaplanarak frekans spektrumunda fiziksel gerçeklere daha uygun sonuçlar gözlenebilecektir. Bu çalışmanın temel amacı nonlokal etkinin Caputo kesirli türevi yardımıyla tanımlanarak frekans spektrumuna katkısının incelenmesidir.

4.1.1 Dört kenarı basit bağlı (SSSS) plak

Gauthier malzemesinin özellikleri Çizelge 4.2 de verilmiştir. Dört kenarı basit bağlı kare plağın ilk 11 frekansı farklı türev mertebesi için Çizelge 4.3 de, ayrıca bu frekans değerleri $\gamma = 0.1$ kalınlık oranı ve farklı α değerleri için Şekil 4.1 de verilmiştir. İlk 3 klasik ve mikro frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen kesirli ve klasik yer değiştirmelerin mutlak farkı sırasıyla Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5 de verilmiştir.

Çizelge 4.2 : Gauthier malzemesinin özellikleri [92].

Young Modülü (E)	5.31 GPa	Poisson oranı (ν)	0.4
Yoğunluk (ρ)	2192 kg / m ³	Mikro atalet (j)	1.96 × 10 ⁻⁷ m ²
Boyutlar ($a \times b \times h$)	1 × 1 × 0.1 m ³		
Sınır koşulları	SSSS (S: Basit bağlı)		
κ (GPa), $\alpha, \beta, \gamma, a_0, \lambda_0, \lambda_1$ (GN)	{1.32 × 10 ⁻⁴ , 8.32 × 10 ⁻² , 0.10, 3.33, 15.94, 0.57, 34.65}		



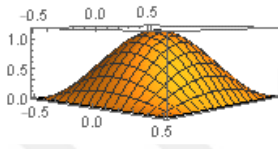
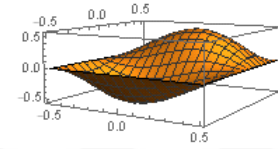
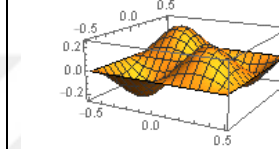
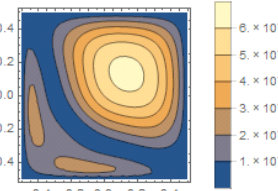
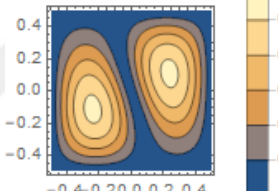
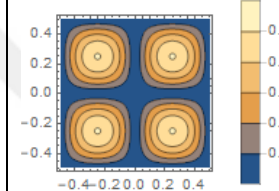
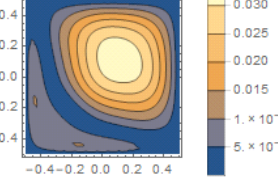
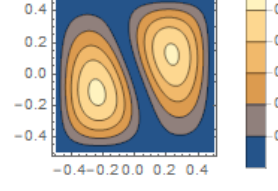
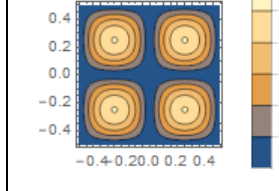
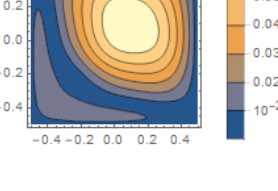
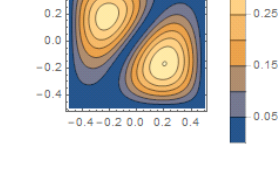
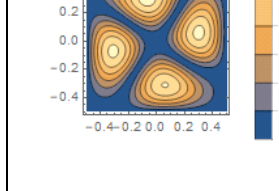
Şekil 4.1 : $\gamma = 0.1$ ve farklı α değerleri için dört kenarı basit bağlı kare plağın frekansları.

Çizelge 4.3: Dört kenar basit bağlı kare plağın farklı α değerleri için ilk 11 frekans değerleri.

α	Δ_{1-11}										
0.90	158.13	334.39	337.03	418.03	422.54	495.95	580.26	580.56	675.33	719.12	723.67
0.95	153.41	344.54	345.21	442.03	443.15	519.19	618.98	619.04	665.73	772.48	773.73
0.99	149.49	351.62	351.65	460.55	460.60	536.69	650.45	650.46	659.15	814.40	814.45
0.999	148.63	353.11	353.11	464.62	464.63	540.50	657.62	657.62	657.86	823.71	823.71
1	148.53	353.27	353.27	465.07	465.07	540.92	657.72	658.41	658.41	824.74	825.20
Klasik	148.41	353.13	353.13	465.07	465.07	540.77	657.70	658.26	658.26	824.59	824.59

Çizelge 4.4 : Dört kenarı basit-bağlı kare plağın farklı α değerleri için ilk 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı.

(κ (GPa), α , β , γ , a_0 , λ_0 , λ_1 (GN)= $5 \cdot 10^{(-6)}$ {0.004,0.8,0.8,0.8,0.7,0.7,0.7})

$\gamma = 0.1$	1. Frekans (148.41)	2. Frekans (353.13)	3. Frekans (465.06)
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.999$			
$\alpha = 0.95$			
$\alpha = 0.90$			

Çizelge 4.5 : Dört kenarı basit-bağlı kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı mikro frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğiştirmelerin mutlak farkı. (Burada kırmızı şekiller mikdönmeyi, yeşiller ise mikrogenleşmeyi temsil etmektedir.)

$\gamma = 0.1$	1.Mikro Frekans (34.33)	2. Mikro Frekans (262.26)	3.Mikro Frekans (447.29)
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.999$			
$\alpha = 0.95$			
$\alpha = 0.90$			

4.1.2 Dört kenarı serbest (FFFF) plak

Malzeme özellikleri Çizelge 4.6 da verilmiştir. Dört kenarı basit bağlı kare plağın ilk 12 frekansı farklı türev mertebesi ve farklı simetri modları için Çizelge 4.7 de, ilk 3 klasik ve mikro frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen kesirli ve klasik yer değiştirmelerin mutlak farkı sırasıyla Çizelge 4.8 ve Çizelge 4.9 da verilmiştir.

Çizelge 4.6 : Malzeme özellikleri.

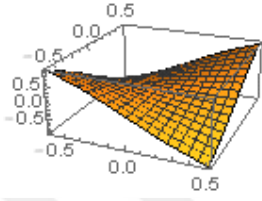
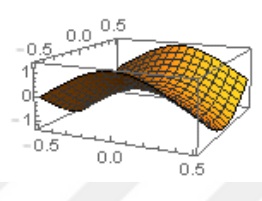
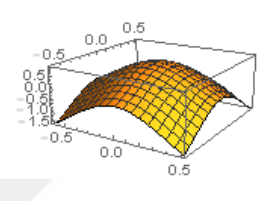
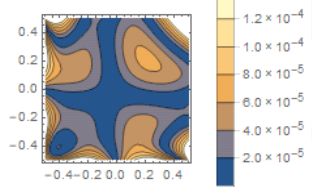
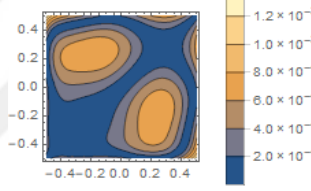
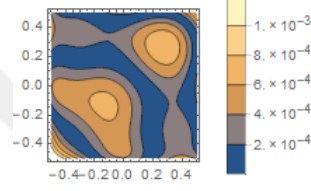
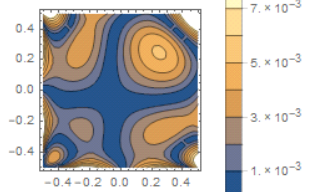
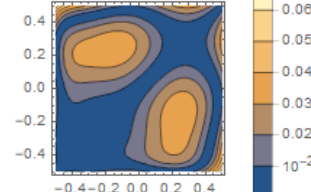
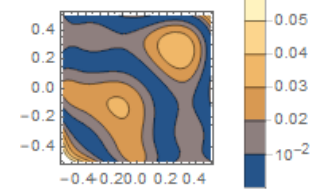
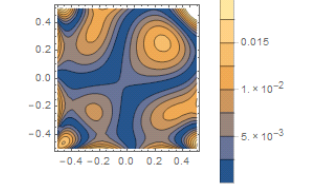
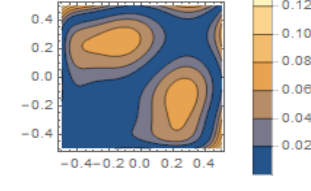
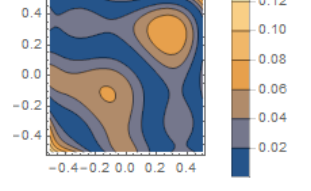
Young Modülü(E)	72 GPa	Poisson oranı(ν)	0.3
Yoğunluk(ρ)	2192 kg / m^3	Mikro atalet (j)	$1.96 \times 10^{-7} m^2$
Boyutlar ($a \times b \times h$)	$1 \times 1 \times 0.1 m^3$		
Sınır Koşulları	FFFF (F: Serbest)		
{ $\kappa, \alpha, \beta, \gamma, a_0, \lambda_0, \lambda_1$ }	{ $10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}$ } κ (GPa), diğerleri (GN)		

Çizelge 4.7 : Dört kenarı serbest bağlı plağın farklı α değerleri ve farklı simetri modları için frekansların incelenmesi

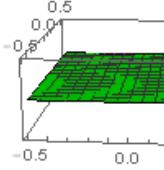
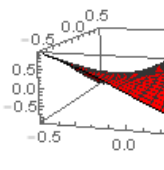
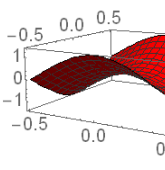
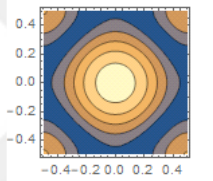
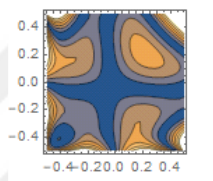
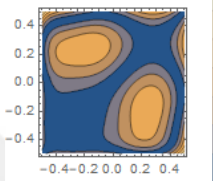
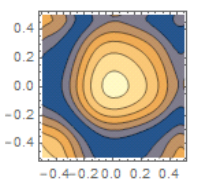
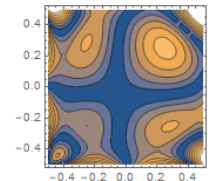
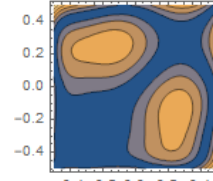
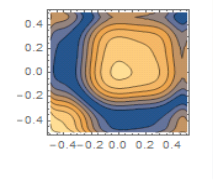
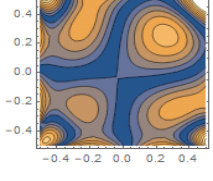
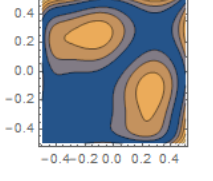
γ	α	SS-1	SS-2	SS-3	SA(AS)-1	SA(AS)-2	SA(AS)-3	AA-1	AA-2	AA-3
0.1	0.90	0.6511	0.7706	1.5622	1.0664	1.5612	2.3970	0.4932	1.8174	2.0133
	0.95	0.6102	0.7391	1.6206	1.0187	1.6205	2.5104	0.4357	2.0482	1.8174
	0.99	0.5803	0.7129	1.6681	0.9790	1.6681	2.5778	0.3948	1.8362	2.0482
	0.999	0.5743	0.7072	1.6789	0.9702	1.6789	2.5892	0.3864	1.8408	2.0559
	1	0.5736	0.7065	1.6961	0.9693	1.6801	2.5904	0.3855	1.8413	2.0568
	Klasik	0.5736	0.7065	1.6801	0.9692	1.6801	2.5904	0.3854	1.8412	2.0567
	[87]									

Çizelge 4.8 : Dört kenarı serbest kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı frekansının mod şekli ve bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğişirmelerin mutlak farkı.

(κ (GPa), α , β , γ , a_0 , λ_0 , λ_1 (GN)= $7.510^{(-6)}$ {0.05,0.8,0.8,0.8,0.7,0.7,0.7})

$\gamma = 0.1$	1. Frekans (0.3854)	2. Frekans (0.5736)	3. Frekans (0.7065)
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.999$			
$\alpha = 0.95$			
$\alpha = 0.90$			

Çizelge 4.9 : Dört kenarı serbest kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı mikro frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğişirmelerin mutlak farkı.

$\gamma = 0.1$	1. Mikro Frekans (0.3521)	2. Mikro Frekans (0.4362)	3. Mikro Frekans (0.6206)
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.999$			
$\alpha = 0.95$			
$\alpha = 0.90$			

4.1.3 Dört kenarı (CFSF) bağlı plak

Malzeme özellikleri Çizelge 4.10 da verilmiştir. Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın ilk 8 frekansı farklı türev mertebesi ve farklı simetri modları için Çizelge 4.11 de, ilk 3 klasik ve mikro frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen kesirli ve klasik yer değiştirmelerin mutlak farkı sırasıyla Çizelge 4.12 ve Çizelge 4.13 de verilmiştir. Farklı sınır koşullarına sahip kare plakların $\gamma = 0.1$ ve farklı l ve α değerleri için ilk 3 frekanslarının incelenmesi Çizelge 4.14 de verilmiştir.

Çizelge 4.10 : Malzeme özellikleri.

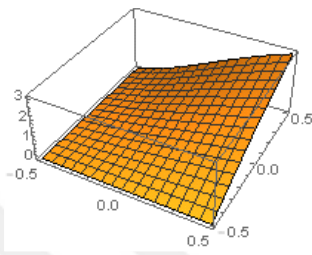
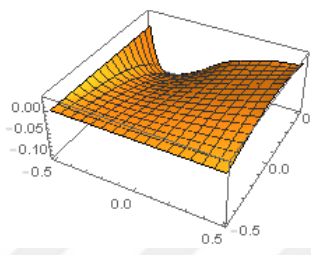
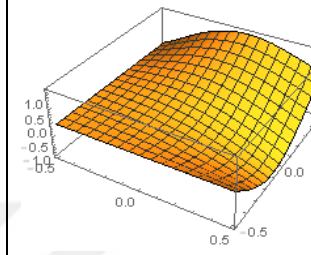
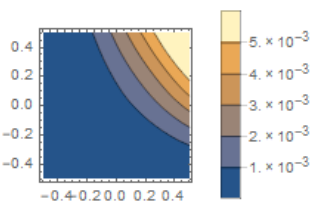
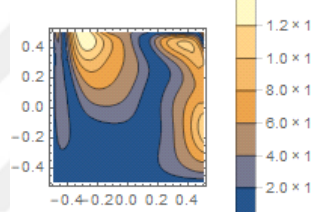
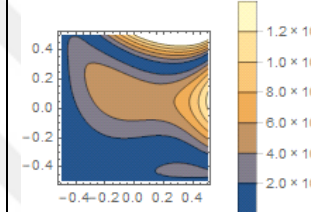
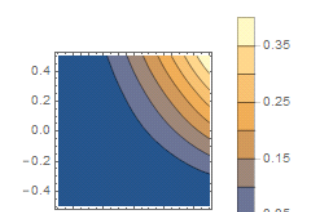
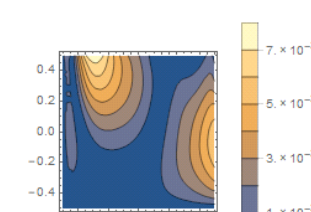
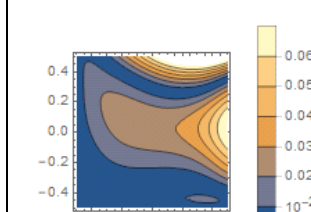
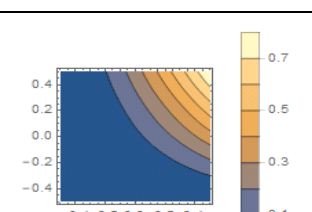
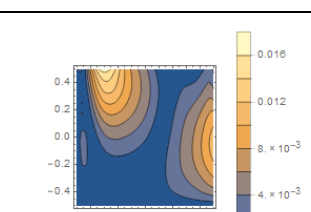
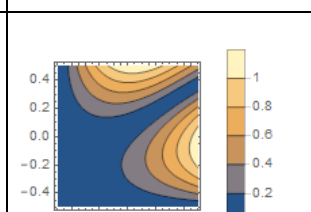
Young Modülü (E)	72 GPa	Poisson oranı (ν)	0.3
Yoğunluk (ρ)	2192 kg / m ³	Mikro atalet (j)	1.96×10 ⁻⁷ m ²
Boyutlar ($a \times b \times h$)	1×1×0.1 m ³ , 1×1×0.5 m ³		
Sınır Koşulları	CFSF (F: Free)		
{ $\kappa, \alpha, \beta, \gamma, a_0, \lambda_0, \lambda_1$ }	{10 ⁻³ , 10 ⁻³ , 10 ⁻³ , 10 ⁻³ , 10 ⁻⁴ , 10 ⁻⁴ , 10 ⁻⁴ } κ (GPa), diğerleri (GN)		

Çizelge 4.11 : Dört kenarı (CFSF) bağlı olan kare plağın farklı α ve γ değerleri için ilk 8 frekansın incelenmesi.

γ	α	1	2	3	4	5	6	Mikro	7	8
0.1	0.90	0.1872	0.5985	0.7224	0.8219	1.1656	1.3842	1.5369	1.5710	1.7066
	0.95	0.1707	0.5727	0.7113	0.8202	1.1720	1.4197	1.5369	1.6389	1.6960
	0.99	0.1602	0.5535	0.7038	0.8194	1.1767	1.4483	1.5369	1.6880	1.6943
	0.999	0.15833	0.5495	0.7024	0.8192	1.1778	1.4549	1.5369	1.6863	1.7070
	1	0.1581	0.5491	0.7023	0.8192	1.1779	1.4556	1.5369	1.6861	1.7084
	Klasik [87]	0.1577	0.5485	0.7018	0.8192	1.1774	1.4550	-	1.6861	1.7079
0.5	0.90	0.5947	0.8240	1.5965	1.7074	1.8038	2.3172	1.5369	2.6342	2.8586
	0.95	0.5962	0.8227	1.6388	1.6982	1.8598	2.3241	1.5369	2.7685	2.9558
	0.99	0.5980	0.8221	1.6691	1.6915	1.8996	2.3255	1.5369	2.8732	3.0357
	0.999	0.5985	0.8220	1.6755	1.6900	1.9079	2.3254	1.5369	2.8964	3.0532
	1	0.5985	0.8220	1.6762	1.6899	1.9088	2.3254	1.5369	2.8989	3.0551
	Klasik [87]	0.5985	0.8219	1.6761	1.6899	1.9087	2.3253	-	2.8988	3.0551

Çizelge 4.12 : Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın farklı α değerleri için ilk 3 farklı frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğişirmelerin mutlak farkı.

(κ (GPa), α , β , γ , a_0 , λ_0 , λ_1 (GN)= $3.5 \cdot 10^{-6}$ {0.05, 0.8, 0.8, 0.8, 0.7, 0.7, 0.7})

$\gamma = 0.5$	1. Frekans (0.5985)	2. Frekans (0.8219)	3. Frekans (1.6761)
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.999$			
$\alpha = 0.95$			
$\alpha = 0.90$			

Çizelge 4.13 : Dört kenarı (CFSF) bağlı kare plağın farklı α değerleri için 3 farklı mikro frekansının mod şekilleri ile bu frekanslara karşılık gelen klasik ve kesirli yerdeğıştirmelerin mutlak farkı.

$\gamma = 0.5$	1. Mikro Frekans (0.2405)	2. Mikro Frekans (0.7932)	3. Mikro Frekans (0.9616)
$\alpha = 1$			
$\alpha = 0.999$			
$\alpha = 0.95$			
$\alpha = 0.90$			

Çizelge 4.14 : Farklı sınır koşullarına sahip kare plakların $\gamma = 0.1$ ve farklı l ve α değerleri için ilk 3 frekans incelenmesi.

l	α	SSSS-1	SSSS-2	SSSS-3	FFFF-1	FFFF-2	FFFF-3	CFSF-1	CFSF-2	CFSF-3
0.5	0.90	2.0547	4.3771	4.4031	1.6513	2.1800	2.5804	0.6260	2.0025	2.4178
	0.95	1.9947	4.5072	4.5140	1.4591	2.0433	2.4749	0.5706	1.9158	2.3805
	0.99	1.9460	4.6005	4.6007	1.3221	1.9432	2.3871	0.5354	1.8514	2.3553
	0.999	1.9354	4.6204	4.6204	1.2939	1.9231	2.3679	0.5289	1.8381	2.3505
	1	1.9343	4.6226	4.6226	1.2909	1.9210	2.3658	0.5283	1.8367	2.3500
0.75	0.90	2.1397	4.5582	4.5853	1.7196	2.2702	2.6872	0.6519	2.0853	2.5178
	0.95	2.0355	4.5995	4.6064	1.4889	2.0851	2.5256	0.5823	1.9550	2.4292
	0.99	1.9539	4.6192	4.6194	1.3275	1.9511	2.3968	0.5376	1.8589	2.3648
	0.999	1.9362	4.6223	4.6223	1.2945	1.9239	2.3689	0.5292	1.8389	2.3515
	1	1.9343	4.6226	4.6226	1.2909	1.9210	2.3658	0.5283	1.8367	2.3500
0.99	0.90	2.2000	4.6865	4.7144	1.7680	2.3341	2.7628	0.6703	2.1440	2.5887
	0.95	2.0640	4.6638	4.6708	1.5098	2.1143	2.5609	0.5904	1.9824	2.4632
	0.99	1.9593	4.6320	4.6323	1.3311	1.9566	2.4035	0.5391	1.8641	2.3714
	0.999	1.9368	4.6235	4.6235	1.2948	1.9244	2.3695	0.5293	1.8394	2.3521
	1	1.9343	4.6226	4.6226	1.2909	1.9210	2.3658	0.5283	1.8367	2.3500

Mikro germeli ortam teorisiyle modellenen dört kenarı sırasıyla basit-bağlı (SSSS), serbest (FFFF), (CFSF) bağlı plaklar için farklı kalınlık, genişlik oranları ve farklı α değerleri için frekans değerleri ve mod şekilleri sırasıyla Çizelge 4.1-14 ve Şekil 4.1 de verilmiştir. Klasik durumda olduğu gibi çizelge ve şekillerde klasik durumdan uzaklaştıkça nonlokal etkinin daha baskın hale geldiği açıkça görülmektedir. Ayrıca, malzemenin mikro yapısı nedeniyle ortaya çıkan ek frekanslar ve bunlara karşı gelen mod şekillerinde de aynı etki gözlenmektedir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında klasik ve mikrogermeli ortam teorisiyle modellenen farklı sınır koşullarına sahip dikdörtgen plakların nonlokal üç boyutlu titreşim analizi farklı simetri modları, farklı boyut oranları ve farklı kesirli türev mertebeleri etkisinde incelenmiştir. Nonlokal etkileri gösterebilmek için klasik yer değiştirme gradyanları yerine, Caputo kesirli türevinden yararlanılmıştır. Burada analiz için Ritz yöntemi kullanılmış ve kabul edilebilir fonksiyonlar olarak sınır fonksiyonlarıyla çarpılmış Chebyshev polinomları seçilmiştir. Sınır fonksiyonları plağın temel geometrik sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilmiştir. Kesirli türevlerin nonlokalite üzerindeki etkisini göstermek için, farklı sınır koşullarına ((CCCC), (SSSS), (FFFF), (CFSF), (CFFF)) sahip bazı dikdörtgen plaklar ele alınmıştır. Chebyshev polinomunun simetri özelliği nedeniyle titreşim modları simetrik ve antisimetrik modlar olarak ayrılmış ve her farklı sınır koşulu için farklı simetri modları da (AAA, AAS, SSA, SSS) incelenmiştir. Böylece, doğruluk aynı kalırken daha küçük bir özdeğer-özvektör denklem kümesi ele alındığından, problem alt problemlere bölünerek basitleştirilmiştir. Bu incelemelerin tamamında, beklentilere uygun olarak, kesirli türevin mertebesi ($\alpha \rightarrow 1$) iken elde edilen frekans değerlerinin klasik durum ($\alpha = 1$) için elde edilen frekans değerlerine yaklaştığı, kesirli türev mertebesinin klasikten uzaklaştığı durumda ise nonlokal etkinin daha baskın hale geldiği gösterilmiştir. Ayrıca, bu çalışmada frekansların yanı sıra mod şekilleri ile klasik ve kesirli modlar arasındaki mutlak farklar verilmiş ve benzer sonuçlar sadece frekanslar için değil modlar içinde elde edilmiştir. Bu tezde ayrıca Eringen'in mikrogermeli ortam teorisi ile modellenen plakların titreşim analizi kesirli analiz yardımıyla incelenerek nonlokal etkiler de analize dahil edilmiştir. Örneklerde sınır koşulları (SSSS), (FFFF) ve (CFSF) olarak alınmıştır. Frekans spektrumları ve mod şekilleri farklı kesirli türev mertebeleri için çizelgeler yardımıyla verilmiştir. Klasik duruma benzer şekilde burada da kesirli türevlerin mertebesi klasik mertebeden türeve yaklaştıkça, frekans spektrumlarının ve modların da klasik frekans spektrumlarına ve modlarına yaklaştığı, aksi durumda nonlokal etkinin baskın hale geldiği gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen, kesirli türevin mertebesinin klasik türevin mertebesinden uzaklaştığında nonlokal etkinin plağın titreşim frekansları üzerinde daha baskın hale geldiği sonucu uluslararası bilimsel etkinliği yüksek bir dergi olan AIAA' da yayınlanmış olup [93], literatüre özgün bir katkı sunulmuştur.

Bu analizle, nonlokal etkinin kesirli türev kavramı yardımıyla kolayca probleme dahil edilebilmesi nedeniyle frekans spektrumu ve karşı gelen modların klasik yaklaşıma göre deneysel sonuçlara çok daha yakın olduğu gösterilebilir ve böylece deneysel sonuçlarla örtüşen malzeme parametreleri belirlenebilir. Bu çalışmada kesirli türevin mertebesinin nonlokal etkiye katkısı üzerinde birim uyum katsayısına nazaran daha çok durulmuştur. Ayrıca bu tez çalışması sonrasında, birim uyum katsayısı analize dahil edilerek, nonlokal etkinin daha fazla görüldüğü yapılar için daha iyi titreşim modelleri kurulmuş olup yayınlama çalışmaları devam etmektedir. Bunun yanısıra, termal etkilerin ve malzeme özelliklerinin fonksiyonel değiştiği durumlar için de benzer analiz de gelecek çalışmalarda yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Li, X., Xu, M., Jiang X.** (2009). Homotopy perturbation method to time-fractional diffusion equation with a moving boundary condition. *Applied Mathematics and Computation*, 208(2), 434–439. doi: 10.1016/j.amc.2008.12.023.
- [2] **Yang, Q., Liu, F., Turner, I.** (2010). Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives. *Applied Mathematical Modelling*, 34(1), 200–218. doi: 10.1016/j.apm.2009.04.006.
- [3] **Xiaoyun, J.** (2006). Analysis of fractional anomalous diffusion caused by an instantaneous point source in disordered fractal media. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(1), 156–165. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2004.07.023.
- [4] **Zhuang, P., Liu, F., Turner, I., Gu, Y. T.** (2014). Finite volume and finite element methods for solving a one-dimensional space-fractional Boussinesq equation. *Applied Mathematical Modelling*, 38(15), 3860–3870. doi: 10.1016/j.apm.2013.10.008.
- [5] **Qi, H., and Jiang, X.** (2011). Solutions of the space-time fractional Cattaneo diffusion equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390(11), 1876–1883. doi: 10.1016/j.physa.2011.02.010.
- [6] **Sabatelli, L., Keating, S., Dudley, J., Richmond, P.** (2002). Waiting time distributions in financial markets. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 27(2), 273–275. doi: 10.1140/epjb/e20020151.
- [7] **Magin, R. L., Ingo, C., Colon-Perez, L., Triplett, W., Mareci, T. H.** (2013). Characterization of anomalous diffusion in porous biological tissues using fractional order derivatives and entropy. *Microporous and Mesoporous Materials*, 178, 39–43. doi: 10.1016/j.micromeso.2013.02.054.
- [8] **Mindlin, R. D. ve Eshel, N. N.** (1968). On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 4(1), 1968, 109–124. doi: 10.1016/0020-7683(68)90036-X.
- [9] **Eringen, A. C. ve Edelen, D. G. B.** (1972). Nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3), 233–248. doi: 10.1016/0020-7225(72)90039-0.
- [10] **Eringen, A. C.** (1968). *Theory of micropolar elasticity*, New York, Fracture, an advanced treatise (Ed. Leibowitz H.): Academic Press.
- [11] **Eringen, A. C.** (1990). Theory of thermo-microstretch elastic solids. *International Journal of Engineering Science*, 28, 1291-1301. doi: 10.1016/0020-7225(90)90076-U.

- [12] **Mindlin, R. D.** (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16, 51–78. doi: 10.1007/BF00248490.
- [13] **Mindlin, R. D.** (1965). Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1(4), 417–438. doi: 10.1016/0020-7683(65)90006-5.
- [14] **Cosserat, E. ve Cosserat F.** (1896). Sur la théorie de l'élasticité, *Ann. Toulouse* 10, 1-116.
- [15] **Cosserat, E. ve Cosserat, F.** (1909). *Théorie des corps déformables*, Paris, Herman et Fils.
- [16] **Chong, C. M.** (2002). *Experimental investigation and modeling of size effect in elasticity*, (PhD thesis), The Hong Kong University of Science and Technology.
- [17] **Cuenot, S., Frétiigny, C., Demoustier-Champagne, S., Nysten, B.** (2004). Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Physical Review B*, 69(16), 165-410. doi: 10.1103/PhysRevB.69.165410.
- [18] **Cottone, G., Di Paola, M., Zingales, M.** (2009). Elastic waves propagation in 1D fractional non-local continuum. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(2), 95-103. doi: 10.1016/j.physe.2009.09.006.
- [19] **Stan, G., Ciobanu, C. V., Parthanga, P. M., Cook, R. F.** (2007). Diameter-dependent radial and tangential elastic moduli of ZnO nanowires. *Nano Letters*, 7(12), 3691–3697. doi: 10.1021/nl071986e.
- [20] **Khurana, A. and Tomar S. K.** (2017). Rayleigh-type waves in nonlocal micropolar solid half-space. *Ultrasonics*, 73, 162-168. doi: 10.1016/j.ultras.2016.09.005.
- [21] **Eringen, A. C.** (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54(9), 4703-4710. doi: 10.1063/1.332803.
- [22] **Eringen, A. C.** (1984). Plane waves in nonlocal micropolar elasticity. *International Journal of Engineering Science*. 22(8-10), 1113-1121. doi: 10.1016/0020-7225(84)90112-5.
- [23] **Klimek, M.** (2001). Fractional sequential mechanics models with symmetric fractional derivative. *Czechoslovak Journal of Physics*, 51(12), 1348–1354. doi: 10.1023/A:101337822.
- [24] **Vazquez, L.** (2004). A fruitful interplay: from nonlocality to fractional calculus. *Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects*. 153, 129–133. doi: 10.1007/1-4020-2190-9_10.
- [25] **Lazopoulos, K. A.** (2006). Non-local continuum mechanics and fractional calculus. *Mechanics Research Communications*, 33(6), 753–757. doi: 10.1016/j.mechrescom.2006.05.001.
- [26] **Drapaca, C. S. and Sivaloganathan S.** (2012). A fractional model of continuum mechanics. *Journal of Elasticity*, 107(2), 107–123. doi: 10.1007/s10659-011-9346-1.

- [27] **Di Paola, M., Failla, G., Zingales, M.** (2009). Physically-based approach to the mechanics of strong non-local linear elasticity theory. *Journal of Elasticity*, 97(2), 103–130. doi: 10.1007/s10659-009-9211-7.
- [28] **Atanackovic, T. M. and Stankovic, B.** (2009). Generalized wave equation in nonlocal elasticity. *Acta Mechanica*, 208(1-2), 1–10. doi: 10.1007/s00707-008-0120-9.
- [29] **Carpinteri, A., Cornetti, P., Sapora, A.** (2011). A fractional calculus approach to nonlocal elasticity. *The European Physical Journal Special Topics*, 193, 193–204. doi: 10.1140/epjst/e2011-01391-5.
- [30] **Sumelka, W.** (2016). Fractional calculus for continuum mechanics– anisotropic non-locality. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, 64(2), 361-372. doi: 10.1515/bpasts-2016-0041.
- [31] **Atanackovic, T. M., Pilipovic, S., Stankovic, B., Zorica, D.** (2014). *Fractional Calculus with Applications in Mechanics*. Wiley. doi: 10.1515/bpasts-2016-0041.
- [32] **Rahimi, Z., Shafiei, S., Sumelka W.** (2018). Fractional strain energy and its application to the free vibration analysis of a plate. *Microsystem Technologies*, 25(6), 2229-2238. doi: 10.1007/s00542-018-4087-8.
- [33] **Baker, W. P., Eldred, L. B., Palazotto, A. N.** (1996). Viscoelastic material response with a fractional-derivative constitutive model. *AIAA Journal*, 34(3), 596-600. doi:10.2514/3.13109.
- [34] **Lee, D. H. and Hwang, W. S.** (2004). Layout Optimization of Unconstrained Viscoelastic Layer on Beams Using Fractional Derivative Model. *AIAA Journal*, 42(10), 2167-2170. doi:10.2514/1.7482.
- [35] **Enelund, M. and Josefson, B. L.** (1997). Time-Domain Finite Element Analysis of Viscoelastic Structures with Fractional Derivatives Constitutive Relations. *AIAA Journal*, 35(10), 1630-1637.
- [36] **Taskin, M., Arikoglu, A., Demir, Ozgur.** (2019). Vibration and Damping Analysis of Sandwich Cylindrical Shells by the GDQM. *AIAA Journal*, 57(7), 3040-3051. doi:10.2514/1. J058128.
- [37] **Challamel, N., Zorica, D., Atanackovic, T. M., Spasic, D. T.** (2013). On the fractional generalization of Eringen' s nonlocal elasticity for wave propagation. *Comptes Rendus Mecanique*, 341, 298-303.
- [38] **Sapora, A., Cornetti, P., Carpinteri, A.** (2013). Wave propagation in nonlocal elastic continua modelled by a fractional calculus approach. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(1), 63-74.
- [39] **Malik, M. and Bert, C. W.** (1998). Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method. *International Journal of Solids and Structures*, 35, 299–319.
- [40] **Liew, K. M. and Teo, T. M.** (1999). Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates based on differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 220, 577–599.

- [41] **Zhou, D., Cheung, Y. K., Aub, F. T. K., Lo, S. H.** (2002). Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 6339–6353.
- [42] **Liew, K. M., Hung, K. C., Lim, M. K.** (1993). A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates. *International Journal of Solids and Structures*, 30, 3357–3379.
- [43] **Liew, K. M., Hung, K. C., Lim, M. K.** (1994). Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates: Variance of simple support conditions and influence of in-plane inertia. *International Journal of Solids and Structures*, 31, 3233–3247.
- [44] **Kirchhoff, G. R.** (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 40, 51-88.
- [45] **Leissa, A. W.** (1969). *Vibration of plates*, NASA SP-160.
- [46] **Ashton, J. E. and Whitney, J. M.** (1970). *Theory of Laminated Plates*. Technomic Publication.: Stanford.
- [47] **Reddy, J. N.** (1997). *Mechanics of Laminated Composite Plates, Theory and Analysis*. Boca Raton.:CRC Press.
- [48] **Jones, R. M.** (1999). *Mechanics of Composite Materials*. Philadelphia.:Taylor and Francis
- [49] **Autar, K. K.** (2006). *Mechanics of Composite Materials*. (2nd ed.). Boca Ratom, Fl.:CRC Press.
- [50] **Reissner, E.** (1945). The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *The Journal of Applied Mechanics*, 12, A69–A77.
- [51] **Mindlin, R. D.** (1951). Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of American Society of Mechanical Engineers*, 18(1), 31-38.
- [52] **Liew, K. M., Xiang, Y., Kitipornchai S.** (1993). Transverse vibration of thick rectangular plates—I. Comprehensive sets of boundary conditions. *Computers & Structures*, 49(1), 1-29.
- [53] **Reddy, J. N.** (1984)., A Simple High-Order Theory for Laminated Composite Plates. *The Journal of Applied Mechanics*, 51, 745–752.
- [54] **Krishnamurthy, C.S.** (1987). *Finite Element Analysis*. New Delhi.Tata McGrawHill.
- [55] **Liew, K. M. ve Lim, C. W.** (1996). Vibration of doubly-curved shallow shells, *Acta Mechanica*, 114, 95-119.doi:10.1007/BF01170398.
- [56] **Kant, T., Pandya, B. N.** (1988). A simple finite element formulation of a higher order theory of unsymmetrically laminated composite plates. *Composite Structures*, 9, 215-246.
- [57] **Putch, N. S., Reddy, J. N.** (1983). A mixed shear flexible finite element for the analysis of laminated plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 44(2), 213-227.

- [58] **Liu, W. K., Zhang, Y. F., Ramirez, M. R.** (1991). Multiple scale finite element methods. *Numerical Methods in Engineering*, 32(5), 969-990.
- [59] **Noor, A. K., Peters, J. M.** (1994). Finite element buckling and postbuckling solutions for multilayered composite panels, *Composite Structures*, 23, 233-251.
- [60] **Srinivas, S., Rao, A. K., Rao, C. V. J.** (1969). Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 49, 449- 458.
- [61] **Srinivas, S., Rao, C. V. J., Rao, A. K.** (1970). An Exact Analysis for Vibration of Simply-Supported Homogeneous and Laminated Thick Rectangular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, 12, 187–199.
- [62] **Leissa, A. W., Zhang, Z. D.** (1983). On the three-dimensional vibrations of the cantilevered rectangular parallelepiped. *Journal of Acoustical Society of America*, 73, 2013–2021.
- [63] **Rossikhin, Y. A., Shitikova, M.** (2006). Analysis of free non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the conditions of different internal resonances. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41, 313-325.
- [64] **Datta, P., Ray, M. C.** (2016). Three-dimensional fractional derivative model of smart constrained layer damping treatment for composite plates. *Composite Structures*, 156, 291–306.
- [65] **Amabili, M.** (2016). Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, 3, 142–156.
- [66] **Litewka, P., Lewandowski, R.** (2017). Nonlinear harmonically excited vibrations of plates with Zener material, *Nonlinear Dynamics*, 89(1), 1–22. doi: 10.1007/s11071-017-3480-7.
- [67] **Permoon, M. R., Haddadpour, H., Javadi, M.** (2018). Nonlinear vibration of fractional viscoelastic plate: Primary, subharmonic, and superharmonic response. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 99, 154–164.
- [68] **Kilbas, A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.** (2006). *New book: “theory and applications of fractional differential equations”*. Elsevier.:North-Holland Mathematics Studies.
- [69] **Podlubny, I.** (1999). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, USA, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, Vol. 198.
- [70] **Leibniz, G. W.** (1697). Letter from Hanover, Germany, to J. Wallis, *Leibnizen Mathematische Schriften*, Vol. 4, p. 25. Olms Verlag., Hildesheim.
- [71] **Euler, L.** (1738). De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebrae dari nequeunt. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Scientiarum Petropolitanae*, 5, 55.
- [72] **Fourier, J. B. J.** (1822). Theorie Analytique de la Chaleur, in Oeuvres de Fourier. Paris (Firmin Didot), 1, 508.

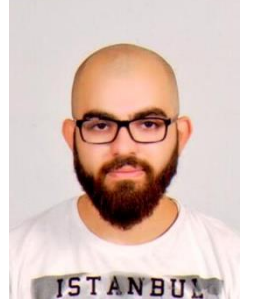
- [73] **Liouville, J.** (1832). Mémoire sur quelque Question de Géométrie et de Mécanique, et sur un genre de calcul pour résoudre ces questions. *Journal de l'École polytechnique*, 13, 1–69.
- [74] **Riemann, B.** (1876). Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. *Gesammelte Werke*, 62.
- [75] **Grünwald, A.** (1867). Über “begrenzte” Derivationen und deren Anwendung. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 12, 441–480.
- [76] **Letnikov, A.** (1868). Theory of differentiation with an arbitrary index. *Matematicheskii Sbornik*, 3, 1–68.
- [77] **Caputo, M.** (1967). Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent II. *Geophysical Journal International*, 13, 529–539.
- [78] **Ross, B.** (1975). *A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus*, in: *B. Ross (Ed.), Fractional Calculus and Its Applications*, in: *Lect. Notes Math.* (pp.1–36). Berlin: Springer-Verlag Heidelberg.
- [79] **Khalil, R., Horani, M. Al., Yousef, A., Sababheh, M.** (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70.
- [80] **Tarasov, V. E.** (2012). A unified approach to fractional derivatives. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12), 5151–5157.
- [81] **Tarasov, V. E.** (2013). No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(11), 2945–2948.
- [82] **Ortigueira, M. D. ve Machado, J. A. T.** (2015). What is a fractional derivative?. *Journal of Computational Physics*, 293, 4–13.
- [83] **Tarasov, V. E.** (2018). No nonlocality. No fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 62, 157-163.
- [84] **Leszczynski, J. S.** (2011). *An introduction to fractional mechanics*, Monographs No. 198, The Publishing Office of Czestochowa University of Technology.
- [85] **Leissa, A. W.** (1973). The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), 257–93. doi: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2.
- [86] **Hung, K. C.** (1996). *A treatise on three dimensional vibration of a class of elastic solids*. (Ph.D. Thesis), Singapore, Nanyang Technological University.
- [87] **Lim, C. W., Liew, K. M., Kitipornchai, S.** (1998). Numerical aspects for free vibration of thick plates part I: Formulation and verification. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 156, 15-29.
- [88] **Kiris, A. ve Inan, E.** (2008). On the identification of microstretch elastic moduli of materials by using vibration data of plates, *International Journal of Engineering Science*, 46, 585-597.

- [89] **Parfitt, V. R. and Eringen, A. C.** (1969). Reflection of Plane Waves from the Flat Boundary of a Micropolar Elastic Half-Space, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 45, 1258.
- [90] **Singh, B. ve Kumar, R.** (1998). Wave propagation in a generalized thermo-microstretch elastic solid, *International Journal of Engineering Science*, 36, 891-912.
- [91] **Wang, F. Y. ve Zhou, Y.** (1991). On the Vibration Modes of Three-Dimensional Micropolar Elastic Plates, *Journal of Sound and Vibration*, 146, 1-16.
- [92] **Gauthier, R. D.** (1974). *Analytical and experimental investigations in linear isotropic micropolar elasticity.* (PhD Thesis), University of Colorado.
- [93] **Aydinlik, S. ve Kiris, A.** (2020). Fractional Calculus Approach to Nonlocal Three-Dimensional Vibration Analysis of Plates, *AIAA*, 58, 355-361.





ÖZGEÇMİŞ



Ad-Soyad : Soner AYDINLIK
Doğum Tarihi ve Yeri : 07.06.1991, İSTANBUL
E-posta : aydinliks@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Doktora** : 2020, İTÜ, Matematik Mühendisliği, Matematik Mühendisliği
- **Yüksek Lisans** : 2015, İTÜ, Matematik Mühendisliği, Matematik Mühendisliği
- **Lisans** : 2014, İTÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği
- **Lisans** : 2014, Açıköğretim İşletme Fakültesi, İşletme Bölümü

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2017- İstanbul Teknik Üniversitesinde Araştırma Görevlilisi olarak çalışıyor.
- 2015-2017 Işık Üniversitesinde Araştırma Görevlilisi olarak çalıştı.
- 2015 Özyeğin Üniversitesi Part-Time Öğretim Elemanı olarak bir dönem çalıştı.
- 2012-2013 İstanbul Teknik Üniversitesi Öğrenci Asistanlığı yaptı.
- 2011-2014 Uğur Dershanesi Stajyer Matematik Öğretmeni olarak çalıştı.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYIN

- **Aydinlik, S.** ve Kiris, A. 2020. Fractional Calculus Approach to Nonlocal Three-Dimensional Vibration Analysis of Plates, *AIAA*, 58, 355-361.