İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ REKÜRANT RİEMANN VE WEYL MANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zehra HAFIZOĞLU GÖKDAĞ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2019

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ REKÜRANT RİEMANN VE WEYL MANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zehra HAFIZOĞLU GÖKDAĞ
(509161295)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Güler GÜRPINAR ARSAN

HAZİRAN 2019

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509161295 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Zehra HAFIZOĞLU GÖKDAĞ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ REKÜRANT RİEMANN VE WEYL MANİFOLDLARI" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Güler GÜRPINAR ARSAN** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Gülçin ÇİVİ BİLİR** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Doç. Dr. Bahar KIRIK Marmara Üniversitesi	....
		....

Teslim Tarihi : **3 Mayıs 2019**
Savunma Tarihi : **13 Haziran 2019**

Hocama ve Aileme,

ÖNSÖZ

Üniversiteye adım attığım ilk günden bu yana her türlü desteğini esirgemeyen, yüksek lisans tez çalışmamda da benimle yakından ilgilenen kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Güler GÜRPINAR ARSAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her konuda bana destek veren canım anneme, babama, kardeşlerime ve eşime tüm kalbimle teşekkür ederim.

Haziran 2019

Zehra HAFIZOĞLU GÖKDAĞ
(Matematik Yüksek Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER

$\mathbf{C^{\infty}(M)}$	: Diferansiyellenebilen manifold
$\mathbf{T_pM}$	: Tanjant vektörlerinin uzayı
$\mathbf{TM}$	: Tanjant demeti
$\chi\mathbf{(M)}$	: Diferansiyellenebilen vektör alanlarının uzayı
$\mathbf{g}$	: Metrik tensör
$\mathbf{v}$	: Vektör alanı
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{kl} \end{matrix} \right\}$	: Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları
$(\mathbf{M_n}, \mathbf{g})$	: Riemann manifoldu
$\mathbf{W_n}(\mathbf{g}, \mathbf{T})$	: Weyl manifoldu
$\Gamma^{\mathbf{i}}{}_{\mathbf{jk}}$	: Weyl konneksiyonunun katsayıları
$\dot{\nabla}$	: Genelleştirilmiş kovaryant türev operatörü
$\mathbf{R^h{}_{ijk}}$	: Eğrilik tensörü
$\mathbf{R_{ij}}$	: Ricci tensörü
$\mathbf{R}$	: Ricci skaleri
$\mathbf{C^h{}_{ijk}}$	: Konform eğrilik tensörü
$\delta^{\mathbf{i}}{}_{\mathbf{j}}$	: Kronecker deltası

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ REKÜRANT RİEMANN VE WEYL MANİFOLDLARI

ÖZET

Bu çalışmada, ilk olarak genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldları ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalar ayrıntılı olarak incelenmiş, daha sonra genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldları ele alınmış ve bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann ve Weyl manifoldlarının ele alındığı bu tez çalışması, beş bölümden oluşmaktadır.

Tez çalışmasının ilk bölümünde, geometrinin tarihi gelişiminden ve Öklid geometrisinden bahsedilerek, Riemann ve Weyl manifoldları ile ilgili bilgiler verilmiştir. Weyl manifoldları 1918 yılında H. Weyl tarafından fizikteki birleşik alanlar teorisini formüle etmek için tanımlanmıştır. Weyl manifoldları, fizikçiler ve matematikçiler tarafından ilgi görmüş ve bu alanda birçok çalışmalar yapılmıştır.

Simetrik bir ∇ konneksiyonuna ve bu konneksiyon tarafından korunan simetrik konform g metrik tensörüne sahip n-boyutlu bir W_n manifolduna Weyl manifoldu denir. Buna göre,

$$\nabla_k g_{ij} = 2 g_{ij} T_k$$

uygunluk koşulunu sağlayan bir T_k kovaryant vektör alanı (komplemanter vektör alanı) mevcuttur.

İkinci bölümde, Riemann, Weyl, Einstein ve yarı-Einstein manifoldlarının tanımları ile bu çalışmada geçen bazı temel tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş Ricci rekürant manifoldları göz önüne alınmıştır. Düz olmayan bir Riemann manifoldunun Ricci tensörü

$$\nabla_k R_{ij} = A_k R_{ij}$$

bağıntısını sağlıyorsa, manifolda Ricci rekürant Riemann manifoldu denir. Burada A, sıfırdan farklı bir vektör alanıdır.

Eğer Ricci tensörü, A ve B sıfır olmayan 1-form olmak üzere

$$\nabla_k R_{ij} = A_k R_{ij} + B_k g_{ij}$$

bağıntısını sağlıyorsa, manifolda genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldu denir.

Ricci rekürant manifold ilk olarak Patterson [1] tarafından ortaya atılmış ve daha sonra Ricci rekürant manifoldlar konusu bir çok yazar tarafından çalışılmıştır [2], [3], [4].

Eğer Ricci tensörü

$$\nabla_k R_{ij} = \nabla_j R_{ik}$$

bağıntısını sağlıyorsa, Ricci tensörü simetrik ise Codazzi tipindendir denir.

Daha sonra bu bölümde, [5] numaralı çalışmada yer alan teoremler incelenmiş ve global şekilde yapılmış olan teoremler lokal koordinatlarda yeniden ispatlanmıştır. Genelleştirimiş Ricci rekürant Riemann manifoldunun konform olarak düz $(C = 0)$ ve Codazzi tipinde Ricci tensörüne sahip olması ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca, devirli paralel Ricci tensörüne sahip genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, [6] numaralı çalışmada yer alan pseudo devirli Ricci simetrik Riemann manifoldları ile ilgili global şekilde yapılmış olan teoremler lokal koordinatlarda ispatlanmıştır.

Eğer Riemann manifoldunun Ricci tensörü,

$$\nabla_k R_{ij} + \nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ki} \;=\; 2A_k R_{ij} + A_i R_{jk} + A_j R_{ki}$$

bağıntısını sağlıyorsa, manifolda pseudo devirli Ricci simetrik Riemann manifoldu denir. Burada, A sıfırdan farklı 1-formdur.

Bu bölümde, pseudo devirli Ricci simetrik bir Riemann manifoldunun özel tipte bir yarı-Einstein manifoldu olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, Weyl manifoldları göz önüne alınarak, tezin önceki bölümlerinde genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldları için elde edilen teoremlere benzer olarak, genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldları için bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu çeşit manifoldlarla ilgili olarak aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem: Temel vektör alanları aynı doğrultuda olan konform olarak düz genelleştirilmiş Ricci rekürent $W_n(g,T)$, $(n > 3)$ Weyl manifoldu

$$g^{jp} A_i \dot{\nabla}_p (\nabla_{[k} T_{j]}) + g^{jp} A_p \dot{\nabla}_k (\nabla_{[i} T_{j]}) = 0$$

koşulu altında bir yarı-Einstein Weyl manifoldudur.

Teorem: Eğer T_k komplemanter vektörü lokal gradient ($\nabla_{[i} T_{k]} = 0$) ise temel vektör alanları aynı doğrultuda olan konform düz genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldu yarı sabit eğriliklidir.

Teorem: Codazzi tipi Ricci tensörüne sahip genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldunun Einstein-Weyl manifold olması için gerek ve yeter koşul skaler eğriliğin genelleştirilmiş kovaryant olarak sabit olmasıdır.

GENERALIZED RICCI RECURRENT RIEMANNIAN AND WEYL MANIFOLDS

SUMMARY

In this work, firstly we have widely examined the generalized Ricci recurrent Riemannian manifolds in existing literature. Then, we have considered the generalized Ricci recurrent Weyl manifolds and obtained some new results.

This thesis contains five chapters.

In the first chapter, we have briefly dealt with the historical developments of geometry. We have given the basic knowledge on Euclidean geometry, Riemannian and Weyl manifolds.

Weyl geometry was introduced by Hermann Weyl. H. Weyl generalized Riemannian geometry by introducing scale freedom of the underlying metric. He formulated unified field theory in 1918.

Weyl geometry was taken up explicitly in different research fields of theoretical physics during the second half of the 20^{th} century.

A differantiable manifold W_n of dimension n having a symmetric connection ∇ and a conformal metric tensor g preserved by ∇ is called a Weyl manifold. In local coordinates, there exists a covariant vector field T (complementary vector field) such that the condition

$$\nabla_k g_{ij} = 2 g_{ij} T_k$$

holds. Under the renormalization $\bar{g} = \lambda^2 g$ of the metric tensor, the vector field T is transformed into by

$$\bar{T}_k = T_k + \partial_k (ln\lambda).$$

In the second chapter, we have stated the definition of Riemannian, Weyl, Einstein and quasi-Einstein manifolds and given the main definitions related by the thesis. Firstly, we have defined the properties of the n-dimensional topological manifold, the differentiable manifold, Riemannian metric, and Levi-Civita connection. Then, we have mentioned the Riemannian curvature tensor, scalar curvature, Einstein and quasi-Einstein manifolds. Later on, we have reviewed the fundamental definitions concerning Weyl manifolds.

In the third chapter, firstly, we have considered the generalized Ricci recurrent Riemannian manifolds.

A non-flat Riemannian manifold is a Ricci recurrent manifold if its Ricci tensor R_{ij} satisfies the condition

$$\nabla_k R_{ij} = A_k R_{ij}$$

where A is non-zero 1-form.

A non-flat Riemannian manifold is a generalized Ricci recurrent manifold if its Ricci tensor R_{ij} satisfies the condition

$$\nabla_k R_{ij} = A_k R_{ij} + B_k g_{ij}$$

where A and B are 1-forms, and B is non-zero.

The idea of Ricci recurrent manifold was introduced by Patterson [1]. Then, Ricci recurrent manifolds have been studied by many authors [2], [3], [4].

In 1995, De, Guha and Kamilya [7] introduced and studied the generalized Ricci-recurrent Riemannian manifolds for $(n > 2)$.

In this chapter, we have studied some theorems given in [5]. These theorems have already studied in global form, we studied and proved these theorems in local coordinates. The following theorems concerning such spaces are proved:

Theorem: A conformally flat generalized Ricci recurrent Riemannian manifold provided the basic vector fields are co-directional, is a quasi-Einstein manifold [5].

Theorem: A conformally flat generalized Ricci recurrent Riemannian manifold provided the basic vector fields co-directional, is a manifold of quasi-constant curvature [5].

Theorem: A generalized Ricci recurrent Riemannian manifold having Codazzi type of Ricci tensor is an Einstein manifold.

Theorem: A generalized Ricci recurrent Riemannian manifold having cyclic parallel Ricci tensor is an Einstein manifold.

Also, at the end of this chapter an example for the generalized Ricci recurrent Riemannian manifold is given.

In fourth chapter, we have considered pseudo Ricci symmetric and pseudo cyclic Ricci symmetric Riemannian manifolds. We have studied and proved some theorems given in [6]. A Riemannian manifold is called pseudo Ricci symmetric manifold if its Ricci tensor R_{ij} satisfies the condition

$$\nabla_k R_{ij} = 2A_k R_{ij} + A_i R_{jk} + A_j R_{ki}$$

where A is non-zero 1-form. A Riemannian manifold is called pseudo cyclic Ricci symmetric manifold if its Ricci tensor R_{ij} satisfies the condition

$$\nabla_k R_{ij} = A_k R_{ij} + B_k g_{ij}$$

where A and B are 1-forms and they are not identically zero. A Riemannian manifold is called the generalized pseudo Ricci symmetric manifold if its Ricci tensor R_{ij} satisfies the condition

$$\nabla_k R_{ij} = 2A_k R_{ij} + B_i R_{jk} + D_j R_{ki}$$

where A, B and D are not identically zero.

In this section, It is shown that a pseudo cyclic Ricci symmetric Riemannian manifold is a special quasi-Einstein manifold.

In the last chapter, Weyl manifolds are examined. The definitions of Ricci recurrent and generalized Ricci recurrent Weyl manifolds are given. Also, the condition is given for a Weyl manifold satisfying Codazzi type of Ricci tensor. Based on these definitions, some original results are obtained on the generalized Ricci recurrent Weyl manifolds. The following theorems are proved:

Theorem: A conformally flat generalized Ricci recurrent Weyl manifold $(n > 3)$ provided the basic vector fields are co-directional, will be a quasi-Einstein Weyl manifold if the condition

$$g^{jp}A_i\dot{\nabla}_p(\nabla_{[k}T_{j]}) + g^{jp}A_p\dot{\nabla}_k(\nabla_{[i}T_{j]}) = 0$$

holds true.

Theorem: A conformally flat generalized Ricci recurrent Weyl manifold $(n > 3)$ provided the basic vector fields are co-directional, will have a quasi-constant curvature tensor if the complementary vector field T is locally a gradient.

Theorem: A necessary and sufficient condition for a generalized Ricci recurrent Weyl manifold satisfying Codazzi type of Ricci tensor to be an Einstein-Weyl manifold is that its scalar curvature is prolonged covariant constant.

1. GİRİŞ

Geometrinin ilk sistematik çalışması M.Ö. 300 yıllarında Öklid (Euclid) tarafından yazılmış olan 13 ciltten oluşan " Öğeler" adlı eserde yer alan tanım ve postulatlardır. Bu eserle geometrinin temelleri atılmıştır. Öklid'in tanımladığı postulatlar uzun yıllar geometride başvuru kaynağı olarak kullanılmıştır ve hala da kullanılmaktadır.

19. yüzyıla kadar rakipsiz kalan Öklid geometrisi 1827 yılında Carl Friedrich Gauss'un Theorema Egregium çalışmasında, yüzeyin eğriliğini ölçmek için günümüzde Gauss eğriliği denilen bir ölçümün varlığını ortaya koydu. Bu ölçümün yüzey üzerindeki eğrilere bağlı olduğunu gösterdi. Gauss, diferansiyel geometri ve manifold kavramının oluşmasında temel olacak çalışmalar yaptı.

Gauss'un doktora öğrencisi olan Georg Friedrich Bernhard Riemann, Öklid dışı geometrinin varlığını ileri sürmüş ve manifold kavramı ile geometri için yeni bir bakış açısı getirmiştir. Manifold kavramı, izafiyet teorisi ve uzay-zaman yapısının temelini oluşturmuştur.

Riemann, manifold üzerinde çeşitli işlemlerin yapıldığı n-boyutlu nokta kümesini tanımladı. Öklid uzayında tanımlanan uzunluk kavramını, Riemann manifoldlar üzerinde tanımladı. Riemann eğrilik tensörü ismini verdiği ölçüyü tanımladı.

Riemann'ın ileri sürdüğü bu bakış açısı ile Einstein izafiyet teorisinin uzay-zaman kavramının temelini attı.

1918 yılında Hermann Weyl, Riemann geometrisinin daha geneli olan Weyl geometrisini tanımlamıştır. Bu geometriyi fizikteki birleşik alan teorisini formule etmek için ortaya koymuştur. Weyl'in tanıttığı Gauge (ölçer) değişmezlikleri günümüz kuantum fiziğinin dönüm noktalarından biri olarak kabul edilmektedir.

Elektromanyetik kuvvet, kütle çekim kuvveti, güçlü nükleer kuvvet ve zayıf nükleer kuvvet olmak üzere evreni yöneten 4 temel kuvvetin; tek bir kuvvetin farklı görünümleri olduğu teorisine süper birleşik alan teorisi denir. Birleşik alan teorisi, evreni tanımlamak için kolaylık sağlar. Weyl manifoldları, 1918 yılında H. Weyl tarafından fizikteki birleşik alanlar teorisini formüle etmek için tanımlanmıştır [8]. Bu teori başta fizikçiler tarafından kabul görmemesine rağmen daha sonra Weyl manifoldları, hem fizikçilerin hem de matematikçilerin birçok çalışmalarında yardımcı olmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanımlar

Bu bölümde tez çalışmamızda geçen temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 M, topolojik bir uzay olsun. M, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa M'ye n-boyutlu topolojik manifold denir.

i) M, bir Hausdorff uzayıdır.

ii) M'nin her açık alt kümesi n-boyutlu öklid uzayı E^n'e veya E^n'nin bir açık alt kümesine homeomorftur.

iii) M sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülür.

Tanım 2.1.2 M, n-boyutlu topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından diferansiyellenebilir bir yapı tanımlanabiliyorsa, M manifolduna C^k sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir.

Tanım 2.1.3 M, n-boyutlu topolojik manifold olsun. M manifolduna ait bir p noktasının teğet uzayı T_pM olmak üzere, M üzerinde v vektör alanı,

$$v : M \rightarrow T_pM$$

kuralı ile her $p \in M$ için,

$$p \rightarrow v(p) = v_p$$

bir v_p teğet vektörü karşı getiren bir dönüşümdür. M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilen vektör alanların kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 M diferansiyellenebilir bir manifold olsun. M'nin her p noktasına

$$g : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

bir iç çarpım karşı getiren g dönüşümüne M üzerinde Riemann metriği denir.

g Riemann metriği simetrik, pozitif tanımlı, $(2,0)$ tensör alanıdır. Riemann metriği $X, Y \in T_pM$ olmak üzere,

1. $g(X,Y) = g(Y,X)$ (simetrik)

2. $g(X+Y,Z) = g(X,Y) + g(Y,Z)$

   $g(aX,Y) = ag(X,Y)$ (2-lineer)

3. $g(X,X) \geq 0$ (her x için)

   $g(X,X) = 0 \iff x = 0$ (pozitif tanımlı)

şartlarını sağlar. Bir g Riemann metriği tanımlanmış olan diferansiyellenebilir M manifolduna Riemann manifoldu denir ve genellikle (M,g) ikilisi ile gösterilir, [9].

Tanım 2.1.5 M, $C^\infty(M)$ sınıfından n- boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümü $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $a,b \in \mathbb{R}$ sabitleri için;

1. $\nabla_X(aY+bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$

2. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

3. $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ operatörüne M üzerinde lineer konneksiyon denir, [9].

Tanım 2.1.6 M_n diferansiyellenebilir manifold üzerinde

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \qquad \forall X,Y \in \chi(M)$$

şeklinde tanımlanan τ tensörüne ∇ lineer konneksiyonuna göre M_n manifoldunun burulma tensörü denir. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için $\tau(X,Y) = 0$ ise M_n manifoldu, burulmasız manifold olarak adlandırılır, [9].

Tanım 2.1.7 ∇ lineer konneksiyonu (M_n,g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlansın. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere,

∇ dönüşümü:

i) $\tau(X,Y) = 0$

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$

koşullarını sağlıyor ise, ∇ lineer konneksiyonuna M nin Levi-Civita konneksiyonu adı verilir, [9].

Tanım 2.1.8 (M_n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ lineer konneksiyonu, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad \forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$$

olarak tanımlanan M üzerinde (1,3)-tensör alanı olan R fonksiyonuna, M nin Riemann eğrilik tensörü denir. Öte yandan $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ tensörü, M nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü olarak adlandırılır.

Levi-Civita konneksiyonu ∇ nın katsayıları lokal koordinatlarda

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{km} \Big(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij} \Big)$$

şeklindedir. Buradan lokal koordinatlarda Riemann eğrilik tensörü

$$R^i_{jkl} = \partial_k \left\{ \begin{array}{c} i \\ jl \end{array} \right\} - \partial_l \left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} h \\ jl \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} i \\ hk \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} h \\ jk \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} i \\ hl \end{array} \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

(M_n, g) Riemann manifoldunda Ricci tensörü R_{ij}, simetrik bir tensördür. R_{ij} nın lokal koordinatlarda gösterimi,

$$R_{ij} = R^k_{ijk} = g^{hk} R_{hijk} \tag{2.1}$$

şeklindedir.

R skaler eğriliği,

$$R = g^{ij} R_{ij} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır, [9].

Diğer taraftan,

$$R_{hjkl} = g_{hp} R^p_{jkl} \tag{2.3}$$

eşitliği mevcuttur.

Tanım 2.1.9 (0,2) tipinde simetrik R_{ij} tensörü Codazzi tipinde olsun. Öyleyse,

$$\nabla_k R_{ij} \;\; = \;\; \nabla_j R_{ik} \tag{2.4}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.10 (M_n, g) bir Riemann manifoldu olsun.Eğer manifoldun Ricci tensörü

$$R_{ij} = \alpha g_{ij} + \beta A_i A_j \tag{2.5}$$

koşulunu sağlıyorsa, M_n manifolduna yarı Einstein manifoldu adı verilir. Burada α ve β, M_n üzerinde reel değerli fonksiyonlardır. U, manifold üzerinde birim teğet vektör alanı olmak üzere A

$A(X) = g(X, U)$ olarak tanımlanan 1-formdur, [10].

Tanım 2.1.11 (M_n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer manifoldun Ricci tensörü

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij} \tag{2.6}$$

koşulunu sağlıyorsa, M_n manifolduna Einstein manifoldu adı verilir, [11].

Tanım 2.1.12 λ sıfırdan farklı bir reel sayı olsun. A ve B sıfır olmayan $1-form$ olmak üzere aralarında,

$$B_k = \lambda A_k \tag{2.7}$$

bağıntısı varsa A_k ile B_k birbirine paraleldir.

Tanım 2.1.13 (M_n, g) Riemann manifoldunda konform eğrilik tensörü;

$$\begin{aligned} C^h_{ijk} &= R^h_{ijk} - \frac{1}{n-2}\left(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik} + R^h_k g_{ij} - R^h_j g_{ik}\right) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ij}\delta^h_k - g_{ik}\delta^h_j\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır, [12].

Tanım 2.1.14 (M_n, g) Riemann manifoldunun konform olarak düz olması için gerek ve yeter şart

$$C^h_{ijk} = 0 \tag{2.9}$$

olmalıdır, [12].

2.2 Weyl Manifoldları

Tanım 2.2.1 ∇ simetrik konneksiyonuna ve konform bir g_{ij} metrik tensörüne sahip $n-$ boyutlu bir W_n manifoldunda g_{ij} metrik tensörü ile konneksiyon arasında

$$\nabla_k g_{ij} - 2g_{ij}T_k = 0 \tag{2.10}$$

uygunluk şartı mevcut ise, W_n manifolduna bir Weyl uzayı denir. Weyl uzayı, $W_n(g,T)$ şeklinde ifade edilir. Burada T_k kovaryant vektörüne, Weyl uzayının komplemanter vektörü denir.

$\lambda > 0$ skaler fonksiyonu için g_{ij} metrik tensörünün

$$\bar{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij} \tag{2.11}$$

şeklindeki dönüşümü altında T_k komplemanter vektörü,

$$\bar{T}_k = T_k + \partial_k(\ln\lambda) \tag{2.12}$$

eşitliğine uygun bir şekilde dönüşür, [13].

(2.11) ve (2.12) yardımıyla (g_{ij}, T_k) tensör çiftine karşı gelen $(\bar{g}_{ij}, \bar{T}_k)$ tensör çiftini oluşturan dönüşüm, gauge dönüşümü olarak adlandırılır.

$\left\{ {i \atop kl} \right\}$ Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları ve ∇ simetrik konneksiyonunun Γ^i_{kl} katsayıları için (2.10) denkleminden

$$\Gamma^i_{kl} = \left\{ {i \atop kl} \right\} - g^{im}(g_{mk}T_l + g_{ml}T_k - g_{kl}T_m). \tag{2.13}$$

elde edilir.

Öyleyse, (2.10) denklemini sağlayan T_k kovaryant vektörü ve g_{ij} metrik tensörü bulunuyorsa, (2.13) bağıntısı simetrik konneksiyonu tanımlar.

Tanım 2.2.2 Bir A büyüklüğü, (2.11) dönüşümü altında

$$\bar{A} = \lambda^p A \tag{2.14}$$

şeklindeyse, A ya g_{ij} tensörünün $\{p\}$ ağırlıklı bir uydusu denir. g_{ij} tensörünün $\{p\}$ ağırlıklı A uydusunun genelleştirilmiş türevi $\dot{\partial}_k A$ ile ifade edilir ve

$$\dot{\partial}_k A = \partial_k A - pT_k A \tag{2.15}$$

formülü tanımlanır, [14], genelleştirilmiş kovaryant türevi ise

$$\dot{\nabla}_k A = \nabla_k A - pT_k A \tag{2.16}$$

şeklindedir ve genelleştirilmiş türev ile genelleştirilmiş kovaryant türev uyduların ağırlıklarını korur.

Tanım 2.2.3 W_n manifolduna ait eğrilik tensörü ve Ricci tensörünün lokal kordinat sistemindeki bileşenleri,

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl} - \Gamma^i_{hl}\Gamma^h_{jk} \tag{2.17}$$

$$R_{ij} = R^a_{ija} = R^{ha}_{hija} \tag{2.18}$$

şeklinde ifade edilir. Böylelikle eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün gauge invaryant olduğu görülür.

Tanım 2.2.4 Weyl uzayında birinci Bianchi özdeşliği,

$$R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} = 0 \tag{2.19}$$

şeklindedir, [15].

Weyl uzayında ikinci Bianchi özdeşliği ise

$$\dot{\nabla}_l R^h_{ijk} + \dot{\nabla}_k R^h_{ijk} + \dot{\nabla}_j R^h_{ikl} = 0 \tag{2.20}$$

şeklindedir, [15].

Tanım 2.2.5 Weyl manifoldunda, R_{ij} tensörünün simetrik kısmı;

$$R_{(ij)} = \frac{R_{ij} + R_{ji}}{2}. \tag{2.21}$$

R_{ij} tensörünün antisimetrik kısmı;

$$R_{[ij]} = \frac{R_{ij} - R_{ji}}{2}. \tag{2.22}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.6 Weyl konneksiyonu simetrik bir konneksiyon olmadığı için Ricci tensörü simetrik değildir. Buradan, $R_{[ij]} = R_{ij} - R_{ji}$ olmak üzere

$$R_{[ij]} = n\nabla_{[j}T_{i]}. \tag{2.23}$$

şeklinde bir bağıntı vardır, [16].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ REKÜRANT RİEMANN MANİFOLDU

Tanım 3.1 (M_n, g), düz olmayan bir Riemann manifoldu olsun. Eğer Ricci tensörü

$$\nabla_k R_{ij} = A_k R_{ij} \tag{3.1}$$

bağıntısını sağlıyorsa manifolda Ricci rekürant manifold denir. Burada A, sıfırdan farklı bir vektör alanıdır, [1].

Tanım 3.2 A ve B sıfır olmayan 1-form olmak üzere (M_n, g) Riemann manifoldu,

$$\nabla_k R_{ij} = A_k R_{ij} + B_k g_{ij} \tag{3.2}$$

bağıntısını sağlıyorsa, manifolda genelleştirilmiş Ricci rekürant manifold denir, [7].

3.1 Konform Olarak Düz Genelleştirilmiş Ricci Rekürant Riemann Manifoldu

(M_n, g) Riemann manifoldu konform olarak düz olsun. Bu durumda $C = 0$ olacağı için (2.8) ve (2.9) denklemlerinden

$$\begin{aligned} R^h_{ijk} &= \frac{1}{n-2}\left(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik} + R^h_k g_{ij} - R^h_j g_{ik}\right) \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ij}\delta^h_k - g_{ik}\delta^h_j\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir.

Ayrıca, (M_n, g) Riemann manifoldunun genelleştirilmiş Ricci rekürant manifold olduğunu kabul edelim. Bu durumda, Ricci tensörü (3.2) denklemini sağlar.

(3.2) denkleminin her iki tarafı g^{ij} tensörü ile çarpılırsa

$$\nabla_k R = A_k R + nB_k \tag{3.4}$$

elde edilir.

Konform olarak düz Riemann manifoldu için

$$\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} = -\frac{1}{2(n-1)}\left(g_{ik}\nabla_j R - g_{ij}\nabla_k R\right) \tag{3.5}$$

denklemi sağlanır, [17] .

O halde, konform olarak düz Riemann manifoldu için Ricci rekürant olma şartı göz önüne alınırsa, (3.2), (3.4) ve (3.5) denklemlerinden

$$A_kR_{ij}+B_kg_{ij}-A_jR_{ik}-B_jg_{ik}=-\frac{1}{2(n-1)}\left[g_{ik}(A_jR+nB_j)-g_{ij}(A_kR+nB_k)\right]$$

elde edilir. Buradan,

$$2(n-1)\left[A_kR_{ij}+B_kg_{ij}-A_jR_{ki}-B_jg_{ik}\right]=g_{ij}A_kR+ng_{ij}B_k-g_{ik}A_jR-ng_{ik}B_j \quad (3.6)$$

bulunur.

(3.6) denkleminin her iki tarafı g^{ij} tensörü ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2(n-1)\left[A_kR+nB_k-A_jR^j_k-B_k\right]=nA_kR+n^2B_k-A_kR-nB_k$$

denklemi bulunur ve buradan da

$$A_jR^j_k=\frac{1}{2}A_kR+\frac{(n-2)}{2}B_k \quad (3.7)$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3.6) denklemi A_pg^{jp} ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}2(n-1)&\left[A_kA_pR^p_i+A_iB_k-A_pA^pR_{ki}-B_jA^jg_{ik}\right]\\&=RA_kA_i-RA_pA^pg_{ik}+nB_kA_i-nB_jA^jg_{ik}\end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. A_p vektörünün büyüklüğü

$$A_pA^p=|A_p|^2=\mu \quad (3.9)$$

olarak gösterilir ve (3.7), (3.9) denklemleri (3.8) denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned}2(n-1)&\left[A_k\left(\frac{1}{2}A_iR+\frac{(n-2)}{2}B_i\right)+A_iB_k-\mu R_{ki}-B_jA^jg_{ik}\right]\\&=RA_kA_i-\mu Rg_{ik}+nB_kA_i-nB_jA^jg_{ik}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}\mu R_{ki}&=\frac{1}{2}A_kA_iR+\frac{(n-2)}{2}A_kB_i+A_iB_k-B_jA^jg_{ik}-\frac{1}{2(n-1)}A_kA_iR\\&+\frac{\mu}{2(n-1)}Rg_{ik}-\frac{(n)}{2(n-1)}B_kA_i+\frac{(n)}{2(n-1)}B_jA^jg_{ik}\end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir.

B_k ve A_k vektörlerinin aynı doğrultuda olduğu kabul edilirse, yani λ sıfırdan farklı bir skaler olmak üzere

$$B_k = \lambda A_k$$

olarak alınırsa, (3.10) denkleminden

$$\begin{aligned} \mu R_{ki} &= \Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n-1)}\Big] A_k A_i R + \frac{(n-2)\lambda}{2} A_k A_i + \lambda A_i A_k - \lambda A_j A^j g_{ik} \\ &+ \frac{\mu}{2(n-1)} R g_{ik} + \frac{n}{2(n-1)}\Big(- \lambda A_k A_i + \lambda A_j A^j g_{ik}\Big) \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Buradan R_{ki} Ricci tensörü

$$R_{ki} = \Big[\frac{3\lambda n - 2\lambda + R}{2(n-1)}\Big] g_{ki} + \Big[\frac{(n-2)R + n^2\lambda - 2n\lambda}{2\mu(n-1)}\Big] A_k A_i \tag{3.12}$$

şeklinde elde edilir. Bu da manifoldun yarı Einstein manifold olduğunu gösterir.

O halde, şu teorem elde edilir:

Teorem 3.1.1 Temel vektör alanları paralel olan konform olarak düz, genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldu, bir yarı-Einstein manifoldudur, [5].

Şimdi temel vektör alanları paralel olan ve ayrıca konform düz olan Ricci rekürant Riemann uzaylarını göz önüne alalım.

Konform olarak düz Riemann manifoldunda (0,4) tipindeki eğrilik tensörü,

$$\begin{aligned} R_{kijl} &= \frac{1}{n-2}\Big[R_{ij} g_{kl} - R_{kj} g_{il} + R_{kl} g_{ij} - R_{il} g_{kj}\Big] \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)}\Big[g_{ij} g_{kl} - g_{kj} g_{il}\Big] \end{aligned} \tag{3.13}$$

denklemini sağlar, [17].

Konform düz Ricci rekürant Riemann manifoldu, $B_k = \lambda A_k$ şartı altında (3.12) denklemini sağladığından, (3.12) ve (3.13) denklemlerinden

$$R_{kijl} = \frac{1}{n-2}\Big[\Big(\frac{3\lambda n - 2\lambda + R}{2(n-1)}\Big)\Big(g_{ij}g_{kl} - g_{kj}g_{il} + g_{kl}g_{ij} - g_{il}g_{kj}\Big)$$

$$+\Big(\frac{(n-2)R + n^2\lambda - 2n\lambda}{2\mu(n-1)}\Big)\Big(A_iA_jg_{kl} - A_kA_jg_{il} + A_kA_lg_{ij} - A_iA_lg_{kj}\Big)\Big]$$

$$-\frac{R}{(n-1)(n-2)}\Big[g_{ij}g_{kl} - g_{kj}g_{il}\Big]$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} R_{kijl} &= \frac{\lambda(3n-2)}{(n-1)(n-2)}\Big[g_{ij}g_{kl} - g_{kj}g_{il}\Big] \\ &+ \frac{n\lambda + R}{2\mu(n-1)}\Big[A_iA_jg_{kl} - A_kA_jg_{il} + A_kA_lg_{ij} - A_iA_lg_{kj}\Big] \end{aligned} \tag{3.14}$$

denklemi elde edilir. Burada (3.14) denklemi g^{kl} ile daraltılırsa ortaya çıkan denklem sonucunda uzay, yarı Einstein manifoldu olur. Ardından g^{ij} ile daraltıldığında ise sabit eğrilik denklemi elde edilir. Bu yüzden, (3.14) denklemi, manifoldun yarı sabit eğrilikli bir manifold olduğunu ifade eder.

O halde şu teorem elde edilir;

Teorem 3.1.2 Temel vektör alanları paralel olan konform olarak düz genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldu, yarı sabit eğriliklidir, [5].

3.2 Codazzi Tipinde Ricci Tensörüne Sahip Genelleştirilmiş Ricci Rekürant Riemann Manifoldları

Teorem 3.2.1 Codazzi tipinde Ricci tensörüne sahip genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldu bir Einstein manifoldudur.

İspat. R_{ij} Ricci tensörü Codazzi tipinden bir tensör olsun. Yani (2.4) denklemi sağlanıyor olsun. (2.4) denkleminin her iki tarafı g^{ij} ile çarpılırsa

$$\nabla_k R = \nabla_j R_k^j$$

bulunur. Diğer taraftan, ikinci Bianchi özdeşliğinden elde edilen $\nabla_j R^j_k = \frac{1}{2}\nabla_k R$ eşitliği burada kullanılırsa

$$\nabla_k R \;=\; \frac{1}{2}\nabla_k R$$

elde edilir. O halde, bu son denklemden $\nabla_k R = 0$ bulunur. Dolayısıyla, R skaler eğriliğin sabit olduğu sonucu çıkar.

Riemann manifoldunun genelleştirilmiş Ricci rekürant manifold olduğunu kabul edelim. O halde, (3.2) ve dolayısıyla (3.4) denklemleri sağlanır. R skaler eğriliğin sabit olmasından ve (3.4) denkleminden

$$B_k = -\frac{R}{n}A_k \tag{3.15}$$

elde edilir. Öte yandan (2.4) denkleminden,

$$\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} = 0$$

olduğu açıktır. Burada (3.2) denklemi yerine yazılırsa

$$\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} \;=\; A_k R_{ij} + B_k g_{ij} - A_j R_{ik} - B_j g_{ik} \tag{3.16}$$

ifadesi elde edilir. (3.16) denklemi, g^{ij} ile çarpılırsa

$$\nabla_k R - \nabla_j R^j_k \;=\; A_k R + nB_k - A_j R^j_k - B_k$$

elde edilir. Burada ikinci Bianchi özdeşliğinden elde edilen eşitlik kullanılırsa,

$$\nabla_k R \;=\; 2A_k R + 2(n-1)B_k - 2A_j R^j_k$$

bulunur. $\nabla_k R = 0$ olduğundan,

$$A_j R^j_k \;=\; A_k R + (n-1)B_k \tag{3.17}$$

elde edilir. (2.4) ve (3.16) denklemlerinden,

$$A_k R_{ij} + B_k g_{ij} - A_j R_{ik} - B_j g_{ik} \;=\; 0$$

olduğu açıktır. Bu denklem, $A_p g^{jp}$ ile çarpılırsa

$$A_k A_p g^{jp} R_{ij} + B_k A_p g^{jp} g_{ij} - A_j g^{jp} A_p R_{ik} - B_j g^{jp} A_p g_{ik} \;=\; 0 \tag{3.18}$$

bulunur. (3.15) denklemi yardımıyla,

$$A_k A_p R_i^p + B_k A_i - \mu R_{ik} + \frac{R}{n} A_j A^j g_{ik} \;=\; 0 \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.17) denklemi, (3.19) denklemine yerine konursa

$$R_{ik} \;=\; \frac{R}{n} g_{ik} \tag{3.20}$$

bulunur. Bu da, manifoldun Einstein manifoldu olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1 Tersine manifold Einstein ise, Ricci tensörü Codazzi tipindedir ve manifold, reküranlık vektörü sıfır veya skaler eğriliği sıfır olan Rekürant bir manifolddur.

3.3 Devirli Paralel Ricci Tensörüne Sahip Genelleştirilmiş Ricci Rekürant Riemann Manifoldları

Teorem 3.3.1 Devirli paralel Ricci tensörüne sahip genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldu bir Einstein manifoldudur.

İspat.

Riemann manifoldu devirli paralel Ricci tensörüne sahip ise,

$$\nabla_k R_{ij} + \nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ki} \;=\; 0 \tag{3.21}$$

denklemi sağlanır. (3.21) denklemi, g^{ij} ile çarpılırsa

$$\nabla_k R + \nabla_i R_k^i + \nabla_j R_k^j \;=\; 0$$

bulunur. Burada, ikinci Bianchi özdeşliğinden elde edilen $\nabla_j R_k^j = \frac{1}{2}\nabla_k R$ denklemi kullanılırsa

$$\nabla_k R + \frac{1}{2}\nabla_k R + \frac{1}{2}\nabla_k R \;=\; 0$$

ve dolayısıyla $\nabla_k R = 0$ elde edilir. Skaler eğrilik R sabit olduğundan, genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldu için (3.4) denkleminden $B_k = -\frac{R}{n} A_k$ sonucuna varılır.

(3.2) denklemi ve (3.21) denklemlerinden

$$A_k R_{ij} + B_k g_{ij} + A_i R_{jk} + B_i g_{jk} + A_j R_{ki} + B_j g_{ki} \;=\; 0 \tag{3.22}$$

elde edilir. Bu denklem, g^{ij} ile çarpılırsa

$$A_kR + nB_k + A_iR^i_k + B_k + A_jR^j_k + B_k \;=\; 0$$

ve dolayısıyla,

$$2A_iR^i_k \;=\; -A_kR - (n+2)B_k$$

bulunur. Buradan,

$$A_iR^i_k \;=\; -\frac{1}{2}A_kR - \frac{(n+2)}{2}B_k \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.22) denklemi, A_pg^{kp} ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} A_pA_kg^{kp}R_{ij} + A_pg^{kp}B_kg_{ij} + A_iA_pg^{kp}R_{jk} + B_iA_pg^{kp}g_{jk} \;&+\; A_jA_pg^{kp}R_{ki} \\ &+\; B_jA_pg^{kp}g_{ki} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.23) eşitliğinden yararlanarak işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \mu R_{ij} - \frac{\mu R}{n}g_{ij} \;&+\; A_i\Big(-\frac{1}{2}A_jR + \frac{(2+n)R}{2n}A_j\Big) - \frac{R}{n}A_iA_j \\ &+\; A_j\Big(-\frac{1}{2}A_iR + \frac{(2+n)R}{2n}A_iA_j\Big) - \frac{R}{n}A_iA_j = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$R_{ij} \;=\; \frac{R}{n}g_{ij}$$

bağıntısı elde edilir. O halde, devirli paralel Ricci tensörüne sahip genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldu bir Einstein manifoldudur.

3.4 Genelleştirilmiş Ricci Rekürant Riemann Manifoldu İçin Örnek

$q = \dfrac{e^{x^1}}{k^2}$ ve $k \neq 0$, $(i,j = 1,2,3,4)$ olmak üzere g metriği;

$g = g_{ij}dx^idx^j = (1+2q)\Big[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2\Big]$

şeklinde tanımlanan 4 boyutlu bir Riemann manifoldu göz önüne alalım [7].

g metriğinin kovaryant bileşenini g_{ij} ve tersini g^{ij} ile gösterelim.

$1+2q = \dfrac{k^2+2e^{x^1}}{k^2}$ ve $\dfrac{1}{1+2q} = \dfrac{k^2}{k^2+2e^{x^1}}$ olacak şekilde,

$$
\mathbf{g_{ij}} = \begin{pmatrix} 1+2q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2q \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{g^{ij}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+2q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+2q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+2q} \end{pmatrix}
$$

şeklindedir.

$\left\{ {i \atop jl} \right\}$ Levi-Civita konneksiyon katsayıları olmak üzere,

$$
[k,ij] = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial k}\Big), \tag{3.24}
$$

$(i,j,k = 1,2,3,4)$ için

$$
g^{kl}[k,ij] = \left\{ {l \atop ij} \right\} = \Gamma^{l}_{ij} \tag{3.25}
$$

şeklindedir.

(3.24) bağıntısı yardımıyla sıfır olmayan $[k,ij]$ değerleri;

$[1,11] = [2,12] = [2,21] = [3,13] = [3,31] = [4,14] = [4,41] = \dfrac{e^{x^1}}{k^2}$,

$[1,22] = [1,33] = [1,44] = -\dfrac{e^{x^1}}{k^2}$

şeklinde bulunur. $q = \dfrac{e^{x^1}}{k^2}$ eşitliğinden

$$
e^{x^1} = k^2 q \tag{3.26}
$$

olduğu açıktır. (3.25) ve (3.26) bağıntılarından sıfır olmayan Christoffel sembolleri:

$\Gamma^1_{11} = g^{11}[1,11] = \dfrac{e^{x^1}}{k^2+2e^{x^1}} = \dfrac{q}{1+2q}$,

$\Gamma^1_{22} = g^{11}[1,22] = -\dfrac{e^{x^1}}{k^2+2e^{x^1}} = -\dfrac{q}{1+2q}$,

$$\Gamma^1_{33} = g^{11}[1,33] = -\frac{e^{x^1}}{k^2+2e^{x^1}} = -\frac{q}{1+2q},$$

$$\Gamma^1_{44} = g^{11}[1,44] = -\frac{e^{x^1}}{k^2+2e^{x^1}} = -\frac{q}{1+2q},$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = \frac{e^{x^1}}{k^2+2e^{x^1}} = \frac{q}{1+2q}$$

olarak elde edilir.

Riemann eğrilik tensörü:

$$R^a_{ijk} = \partial_j \Gamma^a_{ik} - \partial_k \Gamma^a_{ij} + \Gamma^a_{bj}\Gamma^b_{ik} - \Gamma^a_{bk}\Gamma^b_{ij} \tag{3.27}$$

bağıntısıyla ifade edilir. Buradan,

$$R^1_{221} = R^1_{331} = R^1_{441} = \frac{e^{x^1}k^2}{(k^2+2e^{x^1})^2},$$

$$R^2_{332} = R^2_{442} = R^3_{443} = \frac{(e^{x^1})^2}{(k^2+2e^{x^1})^2}$$

elde edilir. (2.3) bağıntısından,

$$R_{1221} = R_{1331} = R_{1441} = \frac{e^{x^1}}{k^2+2e^{x^1}} = \frac{q}{1+2q},$$

$$R_{2332} = R_{2442} = R_{3443} = \frac{(e^{x^1})^2}{k^2(k^2+2e^{x^1})} = \frac{q^2}{1+2q}$$

bulunur. (2.1) denkleminden,

$$R_{11} = g^{11}R_{1111} + g^{22}R_{2112} + g^{33}R_{3113} + g^{44}R_{4114} \implies R_{11} = \frac{3q}{(1+2q)^2},$$

$$R_{22} = g^{11}R_{1221} + g^{22}R_{2222} + g^{33}R_{3223} + g^{44}R_{4224} \implies R_{22} = \frac{q}{1+2q}$$

elde edilir. Aynı şekilde, $R_{33} = R_{44} = \dfrac{q}{1+2q}$ bulunur. Buradan,

$$R_{11} = \frac{3q}{(1+2q)^2} = \frac{3e^{x^1}}{k^2\left(\frac{k^2+2e^{x^1}}{k^2}\right)^2} \implies R_{11,1} = \frac{\frac{3e^{x^1}k^2}{k^4} - \frac{24(e^{x^1})^3}{k^6}}{\left(\frac{k^2+2e^{x^1}}{k^2}\right)^4} = \frac{3q(1-2q)}{(1+2q)^3},$$

$$R_{22} = R_{33} = R_{44} = \frac{q}{1+2q} = \frac{\frac{e^{x^1}}{k^2}}{\left(\frac{k^2+2e^{x^1}}{k^2}\right)} \text{ ise}$$

$$R_{22,1} = R_{33,1} = R_{44,1} = \frac{\frac{e^{x^1}}{k^2}}{\left(\frac{k^2+2e^{x^1}}{k^2}\right)^2} = \frac{q}{(1+2q)^2} \text{ elde edilir.}$$

(2.2) denkleminden skaler eğrilik;

$R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44}$ eşitliğinden,

$R = \dfrac{6q(1+q)}{(1+2q)^3}$

olarak elde edilir.

O halde, herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ noktası için

$$A_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1-4q}{(1+2q)(1-q)} & \text{i=1} \\ 0 & \text{i} \neq 1 \end{cases}$$

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{3q^2}{(1+2q)^3(1-q)} & \text{i=1} \\ 0 & \text{i} \neq 1 \end{cases}$$

olarak alınırsa, bu değerlere göre (3.2) yardımıyla,

$R_{11,1} = A_1R_{11} + B_1g_{11}$,

$R_{22,1} = A_1R_{22} + B_1g_{22}$,

$R_{33,1} = A_1R_{33} + B_1g_{33}$,

$R_{44,1} = A_1R_{44} + B_1g_{44}$

bağıntıları doğrulanır. O halde, $(\mathbb{R}^4, g)$ manifoldu bir genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldudur. Bu örneğe göre, genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldu ne Ricci simetrik, ne de Ricci rekürant bir manifolddur, [7].

4. PSEUDO DEVİRLİ RİCCİ SİMETRİK RİEMANN MANİFOLDLARI

Tanım 4.1 $(n > 2)$ için (M^n, g) Riemann manifoldunun Ricci tensörü

$$\nabla_k R_{ij} \;=\; 2A_k R_{ij} + A_i R_{jk} + A_j R_{ki} \tag{4.1}$$

bağıntısını sağlıyorsa, manifolda pseudo Ricci simetrik Riemann manifoldu denir. Burada A sıfırdan farklı 1-formdur, [18].

Tanım 4.2 $(n > 2)$ için (M^n, g) Riemann manifoldunun Ricci tensörü

$$\nabla_k R_{ij} + \nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ki} \;=\; 2A_k R_{ij} + A_i R_{jk} + A_j R_{ki} \tag{4.2}$$

bağıntısını sağlıyorsa, manifolda pseudo devirli Ricci simetrik Riemann manifoldu denir, [6].

Tanım 4.3 $(n > 2)$ için (M^n, g) Riemann manifoldunda genelleştirilmiş pseudo Ricci simetrik manifoldu

$$\nabla_k R_{ij} \;=\; 2A_k R_{ij} + B_i R_{jk} + D_j R_{ki} \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, A, B ve D sıfırdan farklı 1-formlardır, [19].

Pseudo devirli Ricci simetrik manifoldunun Ricci tensörü, Codazzi tipi olarak kabul edilirse

$$\nabla_k R_{ij} = \nabla_i R_{jk} = \nabla_j R_{ki} \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.2) denkleminden

$$3\nabla_k R_{ij} = 2A_k R_{ij} + A_i R_{jk} + A_j R_{ki}$$

bulunur. Buradan,

$$\nabla_k R_{ij} = 2\frac{A_k}{3} R_{ij} + \frac{A_i}{3} R_{jk} + \frac{A_j}{3} R_{ki}$$

elde edilir. $A_m = 3B_m$ olarak tanımlanırsa

$$\nabla_k R_{ij} \;=\; 2B_k R_{ij} + B_i R_{jk} + B_j R_{ki} \tag{4.5}$$

pseudo Ricci simetrik manifoldu elde edilir.

Sonuç 4.1 Pseudo devirli Ricci simetrik Riemann manifoldunun Ricci tensörü Codazzi tipi ise, manifold bir pseudo Ricci simetrik manifoldudur.

(4.2) denkleminde k ile i değiştirilirse

$$\nabla_i R_{kj} + \nabla_k R_{ji} + \nabla_j R_{ik} = 2A_i R_{kj} + A_k R_{ji} + A_j R_{ik} \tag{4.6}$$

elde edilir.

(4.2) denklemi ve (4.6) denkleminden

$$A_k R_{ij} = A_i R_{kj}$$

bulunur. Bu denklem, $g^{im}A_m$ ile çarpılırsa

$$R_{jk} = \frac{1}{\mu} A_k A_m R^m_j \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada μ, A_k vektörünün büyüklüğüdür.

(4.6) denklemi g^{kj} ile çarpılırsa

$$2\nabla_i R = 2A_i R + 2A_k R^k_i \tag{4.8}$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.6) denklemi g^{ik} ile çarpılırsa

$$2\nabla_j R = 3A_i R^i_j + A_j R$$

elde edilir. Burada j yerine i, i yerine k yazılırsa

$$2\nabla_i R = 3A_k R^k_i + A_i R \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.8) ve (4.9) farkından,

$$A_k R^k_i = A_i R$$

bulunur.

Bu denklem (4.7) denkleminde yerine konursa

$$R_{jk} = \frac{1}{\mu} A_k A_j R \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada, skaler eğrilik $R=0$ ise $R_{jk}=0$ olur ki, bu durum pseudo devirli Ricci simetrik manifoldunun tanımına aykırıdır. Buna göre;

Sonuç 4.2 Pseudo devirli Ricci simetrik manifoldunda, skaler eğrilik R hiçbir zaman sıfır olamaz ve Ricci tensörü (4.7) formundadır, [6].

Sonuç 4.3 Yarı-Einstein manifoldunda eğer $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ ise manifold özel tipte bir yarı-Einstein manifoldudur. O halde, pseudo devirli Ricci simetrik bir Riemann manifoldu için Ricci tensörü

$$R_{ki} = \beta A_k A_i$$

olduğundan, manifold özel tipte yarı-Einstein manifoldudur, [6].

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ REKÜRANT WEYL MANİFOLDLARI

Burulmasız ∇ konneksiyonuna ve konform g_{ij} metrik tansörüne sahip olan

$$\nabla_k g_{ij} - 2T_k g_{ij} = 0$$

uygunluk koşulunu sağlayan diferansiyellenebilen n boyutlu manifolda Weyl manifoldu denir ve $W_n(g,T)$ ile gösterilir.

Tanım 5.1 A sıfırdan farklı 1-form olmak üzere n boyutlu $W_n(g,T)$ Weyl manifoldu,

$$\dot{\nabla}_k R_{ij} = A_k R_{ij} \tag{5.1}$$

bağıntısını sağlıyorsa Ricci rekürant Weyl manifoldu olarak adlandırılır.

Tanım 5.2 Weyl manifoldunun Ricci tensörü

$$\dot{\nabla}_k R_{ij} = A_k R_{ij} + B_k g_{ij} \tag{5.2}$$

koşulunu sağlıyorsa genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldu denir. Burada A ve B ağırlıkları, sırasıyla, $\{0\}$ ve $\{-2\}$ olan sıfırdan farklı 1-formlardır.

Genelleştirilmiş Ricci rekürant $W_n(g,T)$ Weyl manifoldu için Ricci tensörünün antisimetrik ve simetrik kısımları

$$\dot{\nabla}_k R_{[ij]} = A_k R_{[ij]}$$

ve

$$\dot{\nabla}_k R_{(ij)} = A_k R_{(ij)} + B_k g_{ij}, \tag{5.3}$$

olarak elde edilir.

Tanım 5.3 Weyl uzayında konform eğrilik tensörü,

$$\begin{aligned} C^h_{ijk} \;=\; & R^h_{ijk} + \frac{2}{n(n-2)}\Big(\delta^h_k R_{[ij]} - \delta^h_j R_{[ik]} - g_{ik} g^{hm} R_{[mj]} + g_{ij} g^{hm} R_{[mk]} \\ & -(n-2)\delta^h_i R_{[kj]}\Big) - \frac{1}{n-2}\Big(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik} - g_{ik} g^{hm} R_{mj} + g_{ij} g^{hm} R_{mk}\Big) \\ & + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ij}\delta^h_k - g_{ik}\delta^h_j\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

olarak tanımlanır, [20].

$$L_{ij} = -\frac{R_{ij}}{n-2} + \frac{2}{n(n-2)}R_{[ij]} + \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)(n-2)} \tag{5.5}$$

olmak üzere, konform eğrilik tensörü

$$C^h_{ijk} \;=\; R^h_{ijk} + \delta^h_k L_{ij} - \delta^h_j L_{ik} + L^h_k g_{ij} - L^h_j g_{ik} - 2\delta^h_i L_{[jk]}$$

şeklinde elde edilir. L_{ij} tensörünün antisimetrik kısmı

$$L_{[jk]} = \frac{1}{n}R_{[kj]} = \nabla_{[k}T_{j]} = \frac{\nabla_k T_j - \nabla_j T_k}{2} \tag{5.6}$$

olarak bulunur. $n > 3$ boyutlu bir Weyl manifoldu için

$$\dot{\nabla}_h C^h_{ijk} = (n-3)(\dot{\nabla}_j L_{ik} - \dot{\nabla}_k L_{ij}), \tag{5.7}$$

$$\dot{\nabla}_k L_{[ji]} + \dot{\nabla}_j L_{[ik]} + \dot{\nabla}_i L_{[kj]} = 0 \tag{5.8}$$

bağıntıları sağlanır, [21]. (5.5) denkleminden,

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_j L_{ik} - \dot{\nabla}_k L_{ij} \;=\; & \dot{\nabla}_j\Big(\frac{-R_{ik}}{n-2} + \frac{2}{n(n-2)}R_{[ik]} + \frac{Rg_{ik}}{2(n-1)(n-2)}\Big) \\ & -\dot{\nabla}_k\Big(\frac{-R_{ij}}{n-2} + \frac{2}{n(n-2)}R_{[ij]} + \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)(n-2)}\Big)\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $n > 3$ için $W_n(g,T)$ manifoldu konform düz ise yani $C^h_{ijk} = 0$ ise (5.7) denkleminden $\dot{\nabla}_j L_{ik} - \dot{\nabla}_k L_{ij} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, (5.6) denkleminden

$$\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Big[\dot{\nabla}_k R_{ij} - \dot{\nabla}_j R_{ik}\Big] + \frac{1}{n}\Big[\dot{\nabla}_k R_{ji} - \dot{\nabla}_j R_{ki}\Big] + \frac{1}{2(n-1)}\Big[g_{ik}(\dot{\nabla}_j R) - g_{ij}(\dot{\nabla}_k R)\Big] = 0$$

bulunur, [21]. Buradan,

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k R_{ij} - \dot{\nabla}_j R_{ik} \;-\; & \frac{2}{n}(\dot{\nabla}_k R_{[ij]} - \dot{\nabla}_j R_{[ik]}) \\ +\; & \frac{1}{2(n-1)}\Big[g_{ik}(\dot{\nabla}_j R) - g_{ij}(\dot{\nabla}_k R)\Big] = 0\end{aligned} \tag{5.9}$$

bulunur. (5.9) denkleminde R_{ij} tensörünün simetrik ve antisimetrik kısımları göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}&\dot{\nabla}_k R_{(ij)} - \dot{\nabla}_j R_{(ik)} + \Big(\frac{n-2}{n}\Big)\dot{\nabla}_k R_{[ij]} - \Big(\frac{n-2}{n}\Big)\dot{\nabla}_j R_{[ik]} \\ &\qquad = -\frac{1}{2(n-1)}\Big[g_{ik}(\dot{\nabla}_j R) - g_{ij}(\dot{\nabla}_k R)\Big]\end{aligned} \tag{5.10}$$

elde edilir.

(2.23) ve (5.10) denklemlerinden konform olarak düz bir Weyl uzayı için

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k R_{(ij)} - \dot{\nabla}_j R_{(ik)} &= -(n-2)\dot{\nabla}_k(\nabla_{[i}T_{j]}) + (n-2)\dot{\nabla}_j(\nabla_{[i}T_{k]}) \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)}\Big[g_{ik}(\dot{\nabla}_j R) - g_{ij}(\dot{\nabla}_k R)\Big]\end{aligned} \tag{5.11}$$

bağıntısı elde edilir.

[5] de, temel vektör alanları aynı doğrultuda olan konform düz genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldunun yarı-Einstein manifold olduğu ispatlanmıstır. Biz bu çalışmada, aynı teoremi Weyl manifoldu için düşündük ve aşağıdaki teoremi ispat ettik.

Teorem 5.1 Temel vektör alanları aynı doğrultuda olan konform olarak düz genelleştirilmiş Ricci rekürant $W_n(g,T)$, $(n>3)$ Weyl manifoldu

$$g^{jp}A_i\dot{\nabla}_p(\nabla_{[k}T_{j]}) + g^{jp}A_p\dot{\nabla}_k(\nabla_{[i}T_{j]}) = 0$$

koşulu altında bir yarı-Einstein Weyl manifoldudur.

İspat.

Genelleştirilmiş Ricci rekürant konform olarak düz n boyutlu bir Weyl manifoldu göz önüne alalım. Bu durumda, Ricci tensörü (5.2) denklemi ile ifade edilir. (5.2) denkleminin her iki tarafı g_{ij} ile çarpılırsa

$$\dot{\nabla}_k R = A_k R + nB_k \tag{5.12}$$

elde edilir. (5.2) ve (5.12) denklemleri, (5.11) denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned}A_k R_{(ij)} + B_k g_{ij} - A_j R_{(ik)} - B_j g_{ik} &= -(n-2)\dot{\nabla}_k(\nabla_{[i}T_{j]}) + (n-2)\dot{\nabla}_j(\nabla_{[i}T_{k]}) \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)}\Big[g_{ik}(A_j R + nB_j) - g_{ij}(A_k R + nB_k)\Big]\end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir.

(5.13) denklemi g^{ij} ile çarpılırsa ve $g^{ij}(\nabla_{[i}T_{j]}) = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$g^{ji}A_j R_{(ik)} = \frac{1}{2}(A_k R - nB_k) + (n-1)B_k - (n-2)g^{ij}\dot{\nabla}_j(\nabla_{[i}T_{k]}) \tag{5.14}$$

bulunur.

(5.13) denklemi $g^{jp}A_p$ ile çarpılırsa ve (3.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} A_k g^{jp} A_p R_{(ij)} &+ A_i B_k - \mu R_{(ik)} - g^{jp} A_p B_j g_{ik} \\ &= (2-n)\Big[g^{jp}A_p\dot{\nabla}_k(\nabla_{[i}T_{j]}) - g^{jp}A_p\dot{\nabla}_j(\nabla_{[i}T_{k]})\Big] \\ &- \frac{1}{2(n-1)}\Big[\mu g_{ik}R + n g^{jp}A_pB_jg_{ik} - A_iA_kR - nA_iB_k\Big] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (5.14) denklemi kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} R_{(ik)} &= \Big[\frac{1}{2\mu}A_iR + \Big(\frac{n-2}{2\mu}\Big)B_i + \frac{(n-2)}{\mu}g^{jp}\dot{\nabla}_p(\nabla_{[i}T_{j]})\Big]A_k + \frac{1}{\mu}A_iB_k - \frac{1}{\mu}g^{jp}A_pB_jg_{ik} \\ &+ \frac{(n-2)}{\mu}\Big[g^{jp}A_p\dot{\nabla}_k(\nabla_{[i}T_{j]}) - g^{jp}A_p\dot{\nabla}_j(\nabla_{[i}T_{k]})\Big] \\ &+ \frac{1}{2\mu(n-1)}\Big[\mu g_{ik}R + n g^{jp}A_pB_jg_{ik} - A_iA_kR - nA_iB_k\Big] \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, temel vektör alanlarının aynı doğrultuda olduğunu, yani $B_k = \lambda A_k$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, yukarıdaki denklemden,

$$\begin{aligned} R_{(ik)} &= \Big[\frac{3n\lambda - 2\lambda + R}{2(n-1)}\Big]g_{ik} + \Big[\frac{(n^2-2n)\lambda + (n-2)R}{2(n-1)\mu}\Big]A_iA_k \\ &+ \frac{(n-2)}{\mu}\Big[g^{jp}A_p\dot{\nabla}_k(\nabla_{[i}T_{j]}) + g^{jp}A_k\dot{\nabla}_p(\nabla_{[i}T_{j]}) - g^{jp}A_p\dot{\nabla}_j(\nabla_{[i}T_{k]})\Big] \end{aligned} \tag{5.15}$$

bulunur. (5.15) nin sağ tarafında bulunan toplam,

$$\varphi_{ik} = g^{jp}A_p\dot{\nabla}_k(\nabla_{[i}T_{j]}) + g^{jp}A_k\dot{\nabla}_p(\nabla_{[i}T_{j]}) - g^{jp}A_p\dot{\nabla}_j(\nabla_{[i}T_{k]})$$

ile gösterelim. Burada (5.6) denklemi kullanılırsa

$$\varphi_{ik} = g^{jp}A_p\Big(\dot{\nabla}_kL_{[ji]} - \dot{\nabla}_jL_{[ki]}\Big) + g^{jp}A_k\dot{\nabla}_pL_{[ji]} \tag{5.16}$$

elde edilir. (5.8) ve (5.16) denklemlerinden

$$\varphi_{ik} = g^{jp}A_k\dot{\nabla}_pL_{[ji]} - g^{jp}A_p\dot{\nabla}_iL_{[kj]} \tag{5.17}$$

bulunur. O halde, (5.15) denklemi

$$R_{(ik)} = \Big[\frac{3n\lambda - 2\lambda + R}{2(n-1)}\Big] g_{ik} + \Big[\frac{(n^2-2n)\lambda + (n-2)R}{2(n-1)\mu}\Big] A_i A_k + \frac{(n-2)}{\mu}\varphi_{ik} \tag{5.18}$$

olarak yazılır. (5.18) denkleminde i ile k nın rolleri değiştirilip taraf tarafa çıkartılırsa,

$$\varphi_{ik} - \varphi_{ki} = g^{jp}\Big(A_k \dot{\nabla}_p L_{[ji]} - A_i \dot{\nabla}_p L_{[jk]} + g^{jp} A_p \Big(\dot{\nabla}_k L_{[ij]} - \dot{\nabla}_i L_{[kj]}\Big) = 0$$

elde edilir. $\dot{\nabla}_k L_{[ij]} - \dot{\nabla}_i L_{[kj]} = \dot{\nabla}_j L_{[ik]}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$g^{jp} A_p \dot{\nabla}_j L_{[ik]} + g^{jp} A_k \dot{\nabla}_p L_{[ji]} - g^{jp} A_i \dot{\nabla}_p L_{[jk]} = 0$$

bulunur. Buradan

$$g^{jp} A_i \dot{\nabla}_p L_{[jk]} = g^{jp} A_k \dot{\nabla}_p L_{[ji]} - g^{jp} A_p \dot{\nabla}_j L_{[ki]} \tag{5.19}$$

elde edilir. (5.19) denklemi, (5.16) de yerine konursa

$$\varphi_{ik} = g^{jp}\Big(A_i \dot{\nabla}_p L_{[jk]} + A_p \dot{\nabla}_k L_{[ji]}\Big) \tag{5.20}$$

olarak bulunur. (5.6) denklemi (5.20) denklemine yerleştirilirse

$$\varphi_{ik} = g^{jp} A_i \dot{\nabla}_p (\nabla_{[k} T_{j]}) + g^{jp} A_p \dot{\nabla}_k (\nabla_{[i} T_{j]})$$

bulunur.

$n > 3$ olmak üzere eğer $\varphi_{ik} = 0$ ise (5.18) denkleminden

$$R_{(ik)} = \Big[\frac{3n\lambda - 2\lambda + R}{2(n-1)}\Big] g_{ik} + \Big[\frac{(n^2-2n)\lambda + (n-2)R}{2(n-1)\mu}\Big] A_i A_k$$

elde edilir. Bu da $W_n(g,T)$, $(n > 3)$ Weyl manifoldunun bir yarı-Einstein Weyl manifoldu olduğunu gösterir.

Teorem 5.2 Eğer T_k komplemanter vektörü, lokal gradient vektör alanı ise temel vektör alanları aynı doğrultuda olan konform düz genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldu yarı sabit eğriliklidir.

İspat.

T lokal gradient ise $\nabla_{[i}T_{j]} = 0$ olur. Bu durumda, (2.23) denkleminden Ricci tensörünün antisimetrik kısmının $R_{[ij]} = 0$ olduğu görülür. Buradan Weyl manifoldu, Riemann manifolduna düşer.

Konform olarak düz $W_n(g,T)$ Weyl manifoldu için (2.9) ve (5.4) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
R^h_{ijk} &= \frac{2}{n(n-2)}\left(\delta^h_j R_{[ik]} - \delta^h_k R_{[ij]} + g_{ik}g^{hm}R_{[mj]} - g_{ij}g^{hm}R_{[mk]} + (n-2)\delta^h_i R_{[kj]}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n-2}\left(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik} - g_{ik}g^{hm}R_{mj} + g_{ij}g^{hm}R_{mk}\right) - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ij}\delta^h_k - g_{ik}\delta^h_j\right).
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu denklem, g_{hl} ile çarpılır, simetrik olmayan kısım sıfırlanır ve $R_{ij} = R_{(ij)} + R_{[ij]}$ eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \frac{\lambda(3n-2)}{(n-1)(n-2)}\left[g_{ij}g_{kl} - g_{ik}g_{jl}\right] \\
&+ \frac{n\lambda + R}{2(n-1)\mu}\left[g_{kl}A_iA_j - g_{jl}A_iA_k - g_{ik}A_lA_j + g_{ij}A_lA_k\right]
\end{aligned}
$$

yarı sabit eğriliklidir.

Teorem 5.3 Codazzi tipi Ricci tensörüne sahip genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldunun Einstein-Weyl manifold olması için gerek ve yeter koşul skaler eğriliğin genelleştirilmiş kovaryant olarak sabit olmasıdır.

İspat.

Codazzi tipi Ricci tensörüne sahip olan genelleştirilmiş Ricci rekürant $W_n(g,T)$ Weyl manifoldunun Einstein-Weyl olduğunu kabul edelim. Weyl manifoldu, Codazzi tipi Ricci tensörüne sahip olduğundan sıfırdan farklı R_{ij} Ricci tensörü için,

$$\dot{\nabla}_k R_{(ij)} = \dot{\nabla}_j R_{(ik)} \tag{5.21}$$

koşulu gerçeklenir. Manifoldun Einstein-Weyl olması için

$$R_{(ij)} = \frac{R}{n} g_{ij} \tag{5.22}$$

olmalıdır. O halde, (5.21) ve (5.22) denklemlerinden,

$$\left(\dot{\nabla}_k R\right) g_{ij} - \left(\dot{\nabla}_j R\right) g_{ik} = 0 \tag{5.23}$$

elde edilir.

(5.23) denkleminin her iki tarafı g^{ij} ile çarpılırsa

$$(n-1)\dot{\nabla}_k R = 0$$

bulunur. Buradan $n \neq 1$ için

$$\dot{\nabla}_k R = \nabla_k R + 2RT_k = 0 \tag{5.24}$$

elde edilir. Bu R skaler eğriliğin genelleştirilmiş kovaryant olarak sabit olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, manifoldun genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldu olduğu göz önüne alınırsa, (5.3) denkleminden

$$\dot{\nabla}_k R = A_k R + nB_k \tag{5.25}$$

elde edilir. O halde, (5.24) ve (5.25) denklemlerinden,

$$B_k = -\frac{R}{n} A_k$$

bulunur.

Tersine olarak, Codazzi tipi Ricci tensörüne sahip genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldunu göz önüne alalım. Bu durumda, Ricci tensörü, (5.21) koşulunu sağlar.

(5.21) denklemi g^{ij} ile çarpılırsa

$$\dot{\nabla}_k R = \dot{\nabla}_j R^j_k, \tag{5.26}$$

elde edilir.

Herhangi bir $W_n(g,T)$ Weyl manifoldu için

$$\dot{\nabla}_j R^j_k = \frac{1}{2}\dot{\nabla}_k R + 2g^{ij}\dot{\nabla}_j(\nabla_{[i}T_{k]}) \tag{5.27}$$

bağıntısı sağlanır, [22].

O halde, Codazzi tipi Ricci tensörüne sahip bir Weyl manifoldu için (5.26) ve (5.27) denklemlerinden

$$\dot{\nabla}_k R = 4g^{ij}\dot{\nabla}_j(\nabla_{[i}T_{k]}) \tag{5.28}$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldu için (5.3) denklemi sağlanır.

Şimdi, Codazzi tipi Ricci tensörüne sahip Weyl manifoldunun genelleştirilmiş Ricci rekürant ve $\dot{\nabla}_k R = 0$ olduğunu farz edelim. Bu durumda, (5.3) ve (5.21) denkleminden,

$$A_k R_{(ij)} + B_k g_{ij} - A_j R_{(ik)} - B_j g_{ik} = 0 \tag{5.29}$$

elde edilir. (5.29) denklemi g^{ik} ile çarpılırsa,

$$A_k g^{ik} R_{(ij)} + B_j - A_j R - nB_j = 0$$

bulunur. Buradan da,

$$A_k g^{ik} R_{(ij)} = A_j R + (n-1)B_j \tag{5.30}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (5.29) denklemi $g^{pj}A_p$ ile çarpılırsa,

$$A_k g^{pj} A_p R_{(ij)} + g^{pj} A_p B_k g_{ij} - g^{pj} A_p A_j R_{(ik)} \;-\; g^{pj} A_p B_j g_{ik} = 0 \tag{5.31}$$

bulunur. $g^{pj}A_pA_j = \mu$ olmak üzere (5.31) denkleminden

$$\mu R_{(ik)} \;=\; A_k g^{pj} A_p R_{(ij)} + A_i B_k - g^{pj} A_p B_j g_{ik} \tag{5.32}$$

elde edilir. (5.30) denklemi (5.32)'de yerine konursa,

$$\mu R_{(ik)} = A_k \Big[A_i R + (n-1)B_i \Big] + A_i B_k - g^{pj} A_p B_j g_{ik} \tag{5.33}$$

bulunur.

(5.28) denklemi, (5.25)'de yerine yazılırsa,

$$B_k = \frac{4}{n} g^{ij} \dot{\nabla}_j (\nabla_{[i} T_{k]}) - \frac{1}{n} A_k R \tag{5.34}$$

bulunur.

(5.33) ve (5.34) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mu R_{(ik)} \;&=\; A_i A_k R + (n-1) A_k \Big(\frac{4}{n} g^{mj} \dot{\nabla}_j (\nabla_{[m} T_{i]}) - \frac{1}{n} A_i R \Big) \\ &+\; A_i \Big(\frac{4}{n} g^{mj} \dot{\nabla}_j (\nabla_{[m} T_{k]}) - \frac{1}{n} A_k R \Big) - g^{pj} A_p \Big(\frac{4}{n} g^{lm} \dot{\nabla}_m (\nabla_{[l} T_{j]}) - \frac{1}{n} A_j R \Big) g_{ik} \end{aligned} \tag{5.35}$$

bulunur. (5.28) ve (5.35) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} R_{(ik)} &= \left(\frac{R}{n} - \frac{g^{jp}A_p}{n\mu}\dot{\nabla}_j R\right) g_{ik} \\ &+ \frac{n-1}{n\mu} A_k \dot{\nabla}_i R + \frac{1}{n\mu} A_i \dot{\nabla}_k R \end{aligned} \tag{5.36}$$

elde edilir.

$\dot{\nabla}_k R = 0$ olduğundan (5.36) denkleminden

$$R_{(ik)} = \frac{R}{n} g_{ik}$$

elde edilir. O halde, Codazzi tipi Ricci rekürant Weyl manifoldunun skaler eğriliği genelleştirilmiş kovaryant olarak sabit ise manifold bir Einstein-Weyl manifoldudur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldları ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalar ayrıntılı olarak incelenerek, [5] referans numaralı çalışmada yer alan genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann manifoldları ile ilgili teoremler lokal koordinatlarda ifade edilerek ispatlanmıştır.

Daha sonra, [6] referans numaralı çalışmada verilen teoremler ve önermelerin ispatları ayrıntılı bir şekilde yapılmıştır.

Son bölümde, genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldları göz önüne alınmış ve Riemann manifoldu için tezde verilen teoremlere benzer çalışmalar, genelleştirilmiş Ricci rekürant Weyl manifoldları için yapılarak bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Bundan sonra, genelleştirilmiş ϕ- rekürant manifoldlar çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Patterson, E.** (1952). Some Theorems on Ricci-Recurrent Spaces, *Journal of the London Mathematical Society*, *1*(3), 287–295.

[2] **Chandra Chaki, M.** (1956). Some theorems on recurrent and Ricci-recurrent spaces, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, *26*, 168–176.

[3] **Prakash, N.** (1962). A note on Ricci-recurrent and recurrent spaces, *Bull. Cal Math. Society*, *54*, 1–7.

[4] **Matsumoto, M.** (1968). On Riemannian spaces with recurrent projective curvature, *Tensor (NS)*, *19*, 11–18.

[5] **Mallick, S.**, **De, A. ve De, U.C.** (2013). On generalized Ricci recurrent manifolds with applications to relativity, *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, *83*(2), 143–152.

[6] **Shaikh, A.A. ve Hui, S.K.** (2009). On pseudo cyclic Ricci symmetric manifolds, *Asian-European Journal of Mathematics*, *2*(02), 227–237.

[7] **Kamilya, Guha, D.U.C.** (1995). On generalized Ricci-recurrent manifolds, *Tensor. New series*, *56*(3), 312–317.

[8] **Weyl, H.** (1918). Gravitation and electricity, *Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.*, *26*, 465–480.

[9] **Boothby, W.M.** (1986). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, cilt120, Academic press.

[10] **Chaki, M.** (2000). On quasi Einstein manifolds, *Publicationes Mathematicae, Debrecen*, *57*, 297–306.

[11] **Besse, A.L.** (2007). *Einstein manifolds*, Springer Science & Business Media.

[12] **Yano, K.**, **Sawaki, S.** *ve diğerleri* (1968). Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group, *Journal of Differential Geometry*, *2*(2), 161–184.

[13] **Norden, A.** (1976). Affinely connected spaces, *GRMFL Moscow*.

[14] **Hlavaty, V.** (1949). Theorie d'immersion d'une W_m dans W_n, *Ann. Soc. Polon. Math.*, *21*, 196–206.

[15] **Canfes, E.Ö. ve Özdeğer, A.** (1997). Some applications of prolonged covariant differentiation in Weyl spaces, *Journal of Geometry*, *60*(1-2), 7–16.

[16] **Özdeğer, A.** (2006). On sectional curvatures of a Weyl manifold, *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, *82*(8), 123–125.

[17] **Eisenhart, L.** (1949). Riemannian geometry 2nd ed, *Princeton Univ. Press, Princeton, NJ) Math. Rev*.

[18] **Chaki, M.** (1988). On pseudo Ricci symmetric manifolds, *Bulgarian journal of physics*, *15*(6), 526–531.

[19] **Chaki, M. ve Koley, S.** (1994). On generalized pseudo Ricci symmetric manifolds, *Periodica Mathematica Hungarica*, *28*(2), 123–129.

[20] **Miron, R.** (1968). Mouvements conformes dans les espaces Wn et Nn, *Tensor NS*, *19*, 33–41.

[21] **Civi, G. ve Arsan, G.G.** On Weyl manifolds with harmonic conformal curvature tensor, *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Mat. (N.S.)*, 328–330.

[22] **Özdeğer, A.** (2013). Generalized Einstein tensor for a Weyl manifold and its applications, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, *29*(2), 373–382.

PHOTO

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Zehra Hafızoğlu

Doğum Tarihi ve Yeri: 13 Nisan 1994 - İstanbul

E-Posta: hafizoglu@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2017, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği.
- **Y. Lisans:** 2019, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği.

MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER:

- 2014-2015 Satuk Buğra Han İlim ve Medeniyet Vakfı Matematik ve IQ Eğitmenliği.
- 2014 İstanbul Teknik Üniversitesi Öğrenci Asistanlığı.
- 2015 Ulusal Yüksek Başarımlı Hesaplama Merkezi UYBHM (Yaz Stajı)
- 2015 AlbarakaTürk Genel Müdürlük Sistem Analistliği (Yarı-Zamanlı)
- 2016-2018 Biltiz Eğitim Kurumu Matematik ve IQ Eğitmenliği