

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TÜRKİYE'DEKİ DÖRT BÜYÜK DEPREM VERİ SETİNE ÜÇ BOYUTTA
SPLİNE İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

İBRAHİM HALİL KILIÇ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

ARALIK 2019

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TÜRKİYE'DEKİ DÖRT BÜYÜK DEPREM VERİ SETİNE ÜÇ BOYUTTA
SPLİNE İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İBRAHİM HALİL KILIÇ
(509151211)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet DURAN

ARALIK 2019

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509151211 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi İbrahim Halil KILIÇ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “TÜRKİYE’DEKİ DÖRT BÜYÜK DEPREM VERİ SETİNE ÜÇ BOYUTTA SPLİNE İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI” başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Ahmet DURAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Tekin YEKEN**
Kocaeli Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ali KARACA
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi **: 15 Kasım 2019**
Savunma Tarihi **: 12 Aralık 2019**





Aileme,



ÖNSÖZ

Yüksek lisansa başladığım ilk günden itibaren beni sürekli destekleyip devamlılığımı sağlayan, tez konumun belirlenmesinden bitimine kadar benden yardımını, bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ahmet DURAN'a ve yapıcı eleştiri ve önerileri için Sayın Doç. Dr. Tekin YEKEN ve Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ali KARACA'ya, bu süreç boyunca bana güvendikleri ve zor zamanlarımda bana destek oldukları için ailem ve arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

Aralık 2019

İbrahim Halil KILIÇ



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. JEOFİZİK VERİ.....	3
3. ÜÇ BOYUTTA ÇOK DEĞİŞKENLİ SPLİNE İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİ.....	5
3.1 En Yakın Komşu İnterpolasyonu	5
3.1.1 En yakın komşu interpolasyonu algoritması	5
3.2 Lineer Spline İnterpolasyonu	6
3.2.1 Lineer spline interpolasyon algoritması	6
3.3 Kübik Spline İnterpolasyonu.....	7
3.3.1 Kübik spline interpolasyon algoritması	11
3.4 Biharmonik Spline İnterpolasyonu	13
3.5 İnce Tabakalı Spline İnterpolasyonu.....	14
3.6 Hata Analizi	15
4. JEOFİZİKSEL VERİ UYGULAMASI	17
5. SONUÇ.....	35
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : Erzincan depreminin 1934-1939 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.....	21
Çizelge 4.2 : Erzincan depreminin 1938-1939 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.....	22
Çizelge 4.3 : Erzincan depreminin 1939-1940 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.....	23
Çizelge 4.4 : Erzincan depreminin 1939-1944 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.....	24
Çizelge 4.5 : Samsun depreminin 1938-1943 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	25
Çizelge 4.6 : Samsun depreminin 1942-1943 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	26
Çizelge 4.7 : Samsun depreminin 1943-1944 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	27
Çizelge 4.8 : Samsun depreminin 1943-1948 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	28
Çizelge 4.9 : Van depreminin 1971-1976 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	29
Çizelge 4.10 : Van depreminin 1975-1976 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	30
Çizelge 4.11 : Van depreminin 1976-1977 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	31
Çizelge 4.12 : Van depreminin 1976-1981 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	32
Çizelge 4.13 : Gölcük depreminin 1994-1999 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	33
Çizelge 4.14 : Gölcük depreminin 1998-1999 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	34
Çizelge 4.15 : Gölcük depreminin 1999-2000 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	35
Çizelge 4.16 : Gölcük depreminin 1999-2004 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.	36



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

- Şekil 4.1** : Erzincan depremi öncesi durum için 1934-1939 yılları arasında 66 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **21**
- Şekil 4.2** : Erzincan depremi öncesi durum için 1938-1939 yılları arasında 13 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **22**
- Şekil 4.3** : Erzincan depremi sonrası durum için 1939-1940 yılları arasında 29 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **23**
- Şekil 4.4** : Erzincan depremi sonrası durum için 1939-1944 yılları arasında 98 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **24**
- Şekil 4.5** : Samsun depremi öncesi durum için 1938-1943 yılları arasında 87 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **25**
- Şekil 4.6** : Samsun depremi öncesi durum için 1942-1943 yılları arasında 13 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **26**
- Şekil 4.7** : Samsun depremi sonrası durum için 1943-1944 yılları arasında 25 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **27**
- Şekil 4.8** : Samsun depremi sonrası durum için 1943-1948 yılları arasında 62 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **28**
- Şekil 4.9** : Van depremi öncesi durum için 1971-1976 yılları arasında 1259 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **29**
- Şekil 4.10** : Van depremi öncesi durum için 1975-1976 yılları arasında 728 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **30**
- Şekil 4.11** : Van depremi sonrası durum için 1976-1977 yılları arasında 498 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi. **31**

- Şekil 4.12** : Van depremi sonrası durum için 1976-1981 yılları arasında 2063 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntem. **32**
- Şekil 4.13** : Gölcük depremi öncesi durum için 1994-1999 yılları arasında 5118 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntem. **33**
- Şekil 4.14** : Gölcük depremi öncesi durum için 1998-1999 yılları arasında 923 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntem. **34**
- Şekil 4.15** : Gölcük depremi sonrası durum için 1999-2000 yılları arasında 1838 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntem. **35**
- Şekil 4.16** : Gölcük depremi sonrası durum için 1999-2004 yılları arasında 8464 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntem. **36**

TÜRKİYE'DEKİ DÖRT BÜYÜK DEPREM VERİ SETİNE ÜÇ BOYUTTA SPLİNE İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

ÖZET

Bu çalışmada, gerçek deprem veri setlerine spline interpolasyon teknikleri uygulamak, literatürdeki 3 boyutta spline interpolasyon yöntemlerini öğrenmek, parçalı yüzey grafikleri elde etmeyi öğrenmek ve bunları yeni veri setlerine uygulamak amaçlanmıştır.

Spline interpolasyon yöntemleri Türkiye'de son yüzyılda gerçekleşmiş büyük depremlerin veri setlerine uygulandı. Bu deprem veri setleri, Türkiye enlem ve boylam dereceleri içinde son yüzyılda gerçekleşmiş 4 büyük deprem olan Erzincan, Samsun, Van ve Gölcük depremleri veri setinden alınmıştır. Depremlerin öncü depremler ve artçı depremler hakkında fikir verebilmesi adına, gerçekleşen her depremin deprem öncesi durum ve deprem sonrası durum olmak üzere iki durum incelendi. İncelemeyi daha detaylı yapmak ve öncü-artçı deprem tahmini yapacak jeofizik uzmanlarına yardımcı olması için; deprem öncesi için depremden 1 yıl ve 5 yıl öncesinden deprem anına kadar olan durumlar ve deprem sonrası için ise depremden 1 yıl ve 5 yıl sonrasına kadar olan durumlar incelendi. Öncü ve artçı depremler hakkında bilgi verebilmesi amaçlandığı için deprem veri setlerine 4 büyük deprem dâhil edilmemiştir.

Deprem veri setlerine uygulanan 5 farklı spline interpolasyon yöntemi açıklandı. Spline interpolasyon tekniklerinin birbirlerine karşı avantajları ve dezavantajları hakkında bilgi verilip ve bu teknikler uygulanırken beklenen durumlara değinildi. Böylece değişik koşullara göre farklı spline interpolasyon tekniği uygulanabilir. Uygulanan spline interpolasyon yöntemleri ile Matlab programında parçalı yüzey grafikleri çizdirildi. Spline interpolasyon yöntemleri kıyaslanarak parçalı yüzey grafiklerinin düzgünlüğü ve yöntemlerin kesinliği araştırıldı.

Son olarak spline interpolasyon tekniklerinin her veri seti için R^2 ve SSE (karesi alınmış hatalar toplamı) hata analizleri yapıldı. Bu hata analizleri sonucuna göre yöntemlerin karşılaştırılması yapıldı. Veri sayısının az olması ve çok olması durumunda R^2 ve SSE hata analizleri yapıldı, analiz sonuçları kıyaslanarak R^2 ve SSE hata analizlerine göre yöntemlerin avantaj ve dezavantajlarına değinildi.



APPLYING 3D SPLINE INTERPOLATION TECHNIQUES TO 4 BIG EARTHQUAKE DATASETS IN TURKEY

SUMMARY

In this study, it is aimed to apply spline interpolation techniques to real earthquake data sets, learn 3 dimensional spline interpolation methods in literature, learn to obtain segmented surface graphs and apply them to new data sets.

Spline interpolation methods were applied to data sets of large earthquakes in Turkey in the last century. These earthquake data sets were taken from Erzincan, Samsun, Van and Gölcük earthquakes, which were 4 major earthquakes in the last century within the latitude and longitude degrees of Turkey. In order to give an idea about the possible precursor earthquakes and aftershocks, two cases of each earthquake were examined: the pre-earthquake and post-earthquake situation. In order to make the investigation more detailed and to assist geophysical experts who will make a pioneer-aftershock prediction; for the pre-earthquake period 1 year and 5 years before the earthquake to the earthquake and for after the earthquake 1 year and 5 years after the earthquake conditions were examined. 4 large earthquakes were not included in the earthquake data sets because it was intended to provide information on precursor and aftershock earthquakes.

5 different spline interpolation methods applied to earthquake data sets were explained. Information about the advantages and disadvantages of Spline interpolation techniques against each other was given and expected situations were addressed while these techniques were applied. Thus, different spline interpolation techniques can be applied according to different conditions. Partial surface graphs were drawn in Matlab program with spline interpolation methods applied. By comparing Spline interpolation methods, the smoothness of fragmentary surface graphs and the accuracy of the methods were investigated.

Finally, R2 and SSE (sum of squared errors) error analyses were performed for each data set of spline interpolation techniques. Comparison of methods was made according to the result of this error analysis. R2 and SSE error analyses were performed if the number of data is small and large, and the results of the analysis were compared and the advantages and disadvantages of the methods were addressed according to R2 and SSE error analyses.



1. GİRİŞ

Bu çalışmada, gerçek deprem veri setlerine spline interpolasyon teknikleri uygulamak, literatürdeki 3 boyutta spline interpolasyon yöntemlerini öğrenmek, parçalı yüzey grafikleri elde etmeyi öğrenmek ve bunları yeni veri setlerine uygulamak amaçlanmıştır. Çalışmada uygulanan gerçek veri setleri B.Ü. Kandilli Rasathanesi BDTİM Deprem Sorgulama Sistemi'nden alınmıştır [1]. Türkiye'de son yüzyılda gerçekleşmiş büyük depremlerden 4'üne ait veriler sistemden çekilerek bu veri setlerine spline interpolasyon yöntemleri [2-4,21] uygulanarak Matlab programından 'curve fitting' uygulanarak yüzey grafikleri çizdirildi. Bu spline interpolasyon yöntemleri; en yakın komşu spline interpolasyon yöntemi, lineer interpolasyon yöntemi, kübik interpolasyon yöntemi, biharmonik interpolasyon yöntemi ve ince tabakalı spline interpolasyon yöntemidir.

Matlab programında parçalı yüzey çizdirmek için; en yakın komşu ve lineer yöntemi için scatteredinterpolant fonksiyonu, kübik ve biharmonik yöntemler için griddata fonksiyonu ve ince-tabakalı spline metodu için tpaps fonksiyonu kullanılır [5-7].

Çok değişkenli spline interpolasyon yöntemleri kısmında; en yakın komşu yöntemi [8,9] ve algoritması [10], lineer interpolasyon yöntemi [11] ve algoritması [12,13], kübik interpolasyon yöntemi [13-18] ve algoritması [19,20], biharmonik yöntem [21,22] ve ince tabakalı spline interpolasyon yöntemi [21,23] açıklanmıştır. Spline interpolasyon yöntemleri farklı zamanlardaki 4 büyük depremin veri setleri ile Matlab programında parçalı yüzey grafikleri oluşturuldu.

Matlab programında çizilen parçalı yüzey grafiklere r-squared ve sse hata analizleri uygulanarak spline interpolasyon yöntemlerinin kesinlikleri hesaplandı [24,25]. Programda çizdirelen parçalı yüzey grafiklerine bu hata analizi uygulanıp, daha sonra hata analizleri karşılaştırılacak. Oluşan grafiklere hata analizi yapılmasının sebebi yöntemlerin farklı veri setleri ile oluşturulan grafiklere karşı nasıl yaklaştığıdır. Eldeki verilerin artması ve azalması durumunda yöntemlerin hata analizleri kıyaslaması yapıldı. Yapılan kıyas sonucunda; R^2 hata analizine göre hangi

durumlarda analiz sonucu 1 değerine yakın sonuç veriyor ve hangi durumlarda 1 değerinden uzaklaşıyor analizi, SSE'ye göre hangi durumda analiz sonucu 0 değerine yaklaşıyor ve hangi durumda 0 değerinden uzaklaşıyor analizleri yapıldı.



2. JEOFİZİK VERİ

Bu çalışmada Türkiye konumu (26-45 Doğu meridyenleri ile 36-42 Kuzey paralelleri) esas alınarak, B.Ü. Kandilli Rasathanesi BDTİM Deprem Sorgulama Sisteminden gerçek deprem veri setleri çekilmiştir [1]. Çekilen bu veri setlerinde; Türkiye’de meydana gelmiş depremler, depremlerin oluştuğu saat, depremlerin meydana geldiği bölgeler, deprem bölgesine ait enlem ve boyla bilgisi, depremin şiddeti ve oluşan depremin derinliği gibi bilgilere ulaşılabilmektedir. Deprem Sorgulama Sisteminden veri çekilirken uyguladığımız kriterler şu şekildedir;

- i. Uygulanması istenen enlem aralığı: 36-42 Enlemler arası
- ii. Uygulanması istenen boylam aralığı: 26-45 Boylamlar arası
- iii. Aranmak istenen deprem büyüklüğü: 3-8 büyüklük aralığındaki depremler
- iv. Aranmak istenen deprem derinliği: 0-50 km aralığındaki derinlikler
- v. İstenen tarih aralığı: Uygulanması istenen konumun tarih aralığı



3. ÜÇ BOYUTTA ÇOK DEĞİŞKENLİ SPLİNE İNTERPOLASYON YÖNTEMLERİ

Spline interpolasyonu yönteminde eldeki veri setinde her aralığa bir polinom uyumlanıyor. Tüm aralığa tek bir polinom uyarlamak yerine, parçalı polinomlar elde etmeye olanak sağlıyor. Her aralığa polinom uyarlandığı için tek bir fonksiyon yerine her aralık için farklı fonksiyonlar elde edilmiş oluyor. Yüksek derecede polinomlarla değişimi temsil etmek neredeyse mümkün olmadığı için, düşük dereceden polinomlarla değişim temsil ediliyor. Spline interpolasyonları ile tüm noktalardan geçen ve düşük dereceden polinomlarla sürekli bir uyum elde etmek mümkündür. Ve aynı zamanda bu uyumlu polinomlardan ara değer hesabı yapmak mümkündür. Spline interpolasyon yöntemleri, Çok fazla gerçek veri seti aralığına sahip örneklerle spline interpolasyon yöntemi çok hızlı uygulandığı gibi, hata oranlarının da çok küçük olduğu görülmektedir [2-4].

Yüzey çizdirmek için, en yakın komşu ve lineer metodu için scatteredinterpolant fonksiyonu, kübik ve biharmonik yöntemler için griddata fonksiyonu ve ince-tabakalı spline metodu için tpaps fonksiyonu kullanılır .

Lineer ve en yakın komşu yöntemleri hızlıdır, ancak ortaya çıkan eğriler çok düzgün değildir. Kübik spline ve biharmonik yöntemleri daha yavaştır, ancak ortaya çıkan eğriler çok düzgündür. İnce tabakalı spline, biharmonik metod gibi çok düzgün yüzey çizdirir [5,6].

3.1 En Yakın Komşu İnterpolasyonu

En yakın komşu algoritması en yakın noktanın değerini seçer ve komşu noktaların değerlerini hiç dikkate almaz. Bu yöntem istenilen noktaya en yakın olan veri noktasını verir. Bu nedenle, bu yöntem herhangi bir yeni veri noktaları oluşturmaz [8,9].

3.1.1 En yakın komşu interpolasyonu algoritması

“En Yakın Komşu algoritması.

- 1- Bir k değeri ve uzaklık metriği seçelim.
- 2- Veri seti içerisinde sınıflandırmak istediğimiz örneğe ait en yakın k adet komşuyu bulalım.
- 3- Çoğunluk kararına göre örneğin sınıfı atanır.

En Yakın Komşu algoritması bu kadar etkin ve kolay bir algoritma olmasına karşın bazı önemli dezavantajlara sahiptir.

Örnek sayısı arttığında yapmamız gereken karşılaştırma işlemlerinin sayısı da lineer bir şekilde artmaktadır ve bu çok ağır bir işlem yükü getirmektedir.

Özellikle boyut sayısı ve k sayısı arttığında algoritma "overfitting" problemi ile karşı karşıya kalmaktadır.” [10].

3.2 Lineer Spline İnterpolasyonu

Bu yöntem, eğriler için her bir veri noktası çifti arasında veya yüzeyler için üç nokta kümeleri arasında farklı bir lineer polinom uyduruyor. Lineer interpolasyonun bir dezavantajı, alt aralıkların uç noktalarında türevlenebilir olmamasıdır ve dolayısıyla fonksiyonun düzgün olmamasıdır. Düzgün olabilmesi için, sürekli türevlenebilir olmalıdır. En yakın komşu interpolasyonunun kesinliği sınırlıdır ve lineer interpolasyon genellikle çok zaman alır [9,11].

3.2.1 Lineer spline interpolasyonu algoritması

Lineer spline interpolasyon için veri noktaları n tane alt aralığa bölünür ve her bir alt aralık için parçalı polinomlar elde edilir [12,13]. Bu polinomlar,

$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0); \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

$$f(x) = f(x_i) + m_i(x - x_i); \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

...

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}); \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Burada,

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

olup m_i 'ler doğruların eğimleridir.

Örnek: (2, 1.5), (4, 0.5), (7.5, 3) ve (8.5, 2) noktalarından geçen $f(x)$ fonksiyonu için lineer spline interpolasyon yöntemi ile $x=6$ için ara değer hesabı yapınız.

Çözüm: Eğimler hesaplanacak olursa,

$$m_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0.5 - 1.5}{4 - 2} = -0.5$$

$$m_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0.5}{7.5 - 4} = 0.714$$

$$m_2 = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{2 - 3}{8.5 - 7.5} = -1$$

bulunur.

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1})$$

denkleminde Lineer spline polinomları hesaplanacak olursa,

$$f_1(x) = 1.5 - 0.5(x - 2), \quad 2 \leq x \leq 4$$

$$f_2(x) = 0.5 + 0.714(x - 4), \quad 4 \leq x \leq 7.5$$

$$f_3(x) = 3 - 1(x - 7.5), \quad 7.5 \leq x \leq 8.5$$

elde edilir. İstenen ara değer $4 \leq (x = 6) \leq 7.5$ aralığında olduğu için,

$$f_2(6) = 0.5 + 0.714(6 - 4) = 1.928$$

bulunur.

3.3 Kübik Spline İnterpolasyonu

Bu yöntem, eğriler için her bir veri noktası çifti arasında veya yüzeyler için üç nokta kümeleri arasında farklı bir kübik polinom uyduruyor. Kübik spline interpolasyonu en yaygın parçalı polinom yaklaşımıdır ve her ardışık düğüm çifti arasında kübik polinomlar kullanır [13-18].

$S(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında k dereceden bir splinedir, eğer aşağıdaki koşullar sağlıyorsa;

- $S \in C^{k-1}[a, b]$.
- $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ve

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & t_0 \leq x \leq t_1 \\ S_1(x), & t_1 \leq x \leq t_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{n-1}(x), & t_{n-1} \leq x \leq t_n \end{cases}$$

burada $S_i(x) \in \mathbb{P}^k$.

Kübik spline

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0, & t_0 \leq x \leq t_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x^3 + b_{n-1}x^2 + c_{n-1}x + d_{n-1}, & t_{n-1} \leq x \leq t_n \end{cases}$$

denklem aşağıdaki koşullar sağlar,

$$S(x) \in C^2 [t_0, t_n] : \left. \begin{array}{l} S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) \\ S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \\ S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \end{array} \right\}, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Bu koşullar ve toplam bağlantı sayıları birlikte yazılacak olursa ;

1. İç noktalarda fonksiyon değeri eşit olmalıdır. Bu şekilde $(2n-2)$ bağıntı elde edilir.
2. Baştaki ve sonraki fonksiyonlar uç noktalardan geçmelidir. Böylece 2 bağıntı elde edilir.
3. İç noktalarda birinci mertebeden türevler eşit olmalıdır. Bu şekilde $(n-1)$ bağıntı elde edilir.
4. İç noktalarda ikinci mertebeden türevler eşit olmalıdır. Bu şekilde $(n-1)$ bağıntı elde edilir.
5. İlk ve son noktalarda ikinci mertebeden türevler sıfır olmalıdır. Bu şekilde 2 bağıntı elde edilir.

Herhangi bir $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında $f_k(x)$ fonksiyonlarının ikinci türevi lineer olacağından, Lagrange İnterpolasyon formülüne göre,

$$f''_k(x) = f''(x_{k-1}) \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f''(x_k) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

yazılabilir. Dikkat edilirse $[x_k, x_{k+1}]$ aralığındaki ikinci türev, uç noktalardaki türev değerleri cinsinden ifade edilmiş oldu. Son bağıntının art arda iki defa integrali alınır,

$$f'_k(x) = f''(x_{k-1}) \frac{(x - x_k)^2}{2(x_{k-1} - x_k)} + f''(x_k) \frac{(x - x_{k-1})^2}{2(x_k - x_{k-1})} + c_1,$$

$$f_k(x) = f''(x_{k-1}) \frac{(x - x_k)^3}{6(x_{k-1} - x_k)} + f''(x_k) \frac{(x - x_{k-1})^3}{6(x_k - x_{k-1})} + c_1 x + c_2$$

bulunur. Öte yandan bu fonksiyonun her bir aralığın uç noktalarından geçmesi gerektiği koşulunu kullanırsak c_1 ve c_2 sabitleri belirlenmiş olur. Yani x_{k-1} için $f(x_{k-1})$ ve $f(x_k)$ olacağından,

$$f_k(x_{k-1}) = f''(x_{k-1}) \frac{(x_{k-1} - x_k)^3}{6(x_{k-1} - x_k)} + c_1 x_{k-1} + c_2$$

$$f_k(x_k) = f''(x_k) \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{6(x_k - x_{k-1})} + c_1 x_k + c_2$$

yazılabilir. Son iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa,

$$f_k(x_k) - f_k(x_{k-1}) = f''(x_k) \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{6} - f''(x_{k-1}) \frac{(x_{k-1} - x_k)^2}{6} + c_1(x_k - x_{k-1})$$

bulunur. Buradan c_1 ,

$$c_1 = \frac{f_k(x_k) - f_k(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} - \frac{f''(x_k) - f''(x_{k-1})}{6} (x_k - x_{k-1})$$

olarak elde edilir ve c_2 ,

$$c_2 = \frac{x_k f(x_{k-1}) - x_{k-1} f(x_k)}{x_k - x_{k-1}} - \left[\frac{x_k f''(x_{k-1}) - x_{k-1} f''(x_k)}{6} \right] (x_k - x_{k-1})$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{f''(x_{k-1})}{6(x_k - x_{k-1})} (x_k - x)^3 + \frac{f''(x_k)}{6(x_k - x_{k-1})} - (x_k - x)^3 \\ &\quad + \left[\frac{f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})} - \frac{f''(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{6} \right] (x_k - x) \\ &\quad + \left[\frac{f(x_k)}{(x_k - x_{k-1})} - \frac{f''(x_k)(x_k - x_{k-1})}{6} \right] (x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifade başlangıçta verileden çok daha karmaşık olsa da sadece iki bilinmeyen içermektedir. Yani, aralığın uç noktalarında ikinci türevler belli ise, bu aralıkta söz konusu spline fonksiyonu elde edilmiş olur.

İkinci türevleri, birinci türevlerin düğüm noktalarındaki sürekliliği koşulunu kullanarak hesaplayabiliriz. Yani,

$$f'_k(x_k) = f'_k(x_k)$$

koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (x_k - x_{k-1})f''(x_{k-1}) + 2(x_{k+1} - x_{k-1})f''(x_k) + (x_{k+1} - x_k)f''(x_{k+1}) \\ = \frac{6}{(x_{k+1} - x_k)} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] + \frac{6}{(x_k - x_{k-1})} [f(x_{k-1}) - f(x_k)] \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir.

Örnek: (2, 1.5), (4, 0.5), (7.5, 3) ve (8.5, 2) noktalarından geçen $f(x)$ fonksiyonu için kübik spline interpolasyon yöntemi ile $x=6$ için ara değer hesabı yapınız.

Çözüm: 5.koşula göre ilk ve son noktadaki ikinci türevler sıfır olmalıdır. Böylece, $f''(2) = 0$ ve $f''(8.5) = 0$ olur.

Diğer düğüm noktalarının ikinci mertebeden türevini elde etmek için;

$$(x_k - x_{k-1})f''(x_{k-1}) + 2(x_{k+1} - x_{k-1})f''(x_k) + (x_{k+1} - x_k)f''(x_{k+1}) \\ = \frac{6}{(x_{k+1} - x_k)} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] + \frac{6}{(x_k - x_{k-1})} [f(x_{k-1}) - f(x_k)]$$

denkleminde k yerine sırayla 1 ve 2 yazılacak olursa; $k=1$ için,

$$(x_1 - x_0)f''(x_0) + 2(x_2 - x_0)f''(x_1) + (x_2 - x_1)f''(x_2) \\ = \frac{6}{(x_2 - x_1)} [f(x_2) - f(x_1)] + \frac{6}{(x_1 - x_0)} [f(x_0) - f(x_1)]$$

ve denkleminde $x_0 = 2$, $x_1 = 4$ ve $x_2 = 7.5$ değerleri yazılıp gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$11 f''(4) + 3.5 f''(7.5) = 7.286$$

elde edilir. $k=2$ için,

$$(x_2 - x_1)f''(x_1) + 2(x_3 - x_1)f''(x_2) + (x_3 - x_2)f''(x_3) \\ = \frac{6}{(x_3 - x_2)} [f(x_3) - f(x_2)] + \frac{6}{(x_2 - x_1)} [f(x_1) - f(x_2)]$$

ve denkleminde, $x_1 = 4$, $x_2 = 7.5$ ve $x_3 = 8.5$ değerleri yazılıp gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$3.5 f''(4) + 9 f''(7.5) = -10.286$$

elde edilir. Böylece elde edilen,

$$11 f''(4) + 3.5 f''(7.5) = 7.286$$

$$3.5 f''(4) + 9 f''(7.5) = -10.286$$

denklemler sistemi çözümlerse,

$$f''(4) = 1.17$$

$$f''(7.5) = -1.598$$

elde edilir.

Kübik spline interpolasyonu için,

$$f_k(x) = \frac{f''(x_{k-1})}{6(x_k - x_{k-1})} (x_k - x)^3 + \frac{f''(x_k)}{6(x_k - x_{k-1})} - (x_k - x)^3 \\ + \left[\frac{f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})} - \frac{f''(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{6} \right] (x_k - x) \\ + \left[\frac{f(x_k)}{(x_k - x_{k-1})} - \frac{f''(x_k)(x_k - x_{k-1})}{6} \right] (x - x_{k-1})$$

denkleminde k yerine sırasıyla 1,2 ve 3 değerlerini yazarsak $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ ve $f_3(x_3)$ kübik fonksiyonları elde edilmiş olur. İstenen ara değer hesabı $4 \leq (x=6) \leq 7.5$ aralığında olduğu için $f_2(x_2)$ bulmak yeterli olacaktır. k=2 için;

$$f_2(x) = \frac{f''(x_1)}{6(x_2 - x_1)} (x_2 - x)^3 + \frac{f''(x_2)}{6(x_2 - x_1)} - (x_2 - x)^3 \\ + \left[\frac{f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f''(x_1)(x_2 - x_1)}{6} \right] (x_2 - x) \\ + \left[\frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f''(x_2)(x_2 - x_1)}{6} \right] (x - x_1)$$

denklemden gerekli kısaltmalar yapırsa,

$$f_2(x) = -0.02(7.5 - x)^3 - 0.54(7.5 - x) + 1.789(x - 4) \text{ ve}$$

$$f_2(6) = 2.7$$

bulunur.

3.3.1 Kübik spline interpolasyonu algoritması

3.dereceden $q(x)$ polinomu için [19,20];

$$q(x_1) = y_1$$

$$q(x_2) = y_2$$

$$q'(x_1) = k_1$$

$$q'(x_2) = k_2$$

Şeklinde simetrik formda yazılabilir.

$$q(x) = (1 - t(x))y_1 + t(x)y_2 + t(x)(1 - t(x)) \left((1 - t(x))a + t(x)b \right)$$

$t(x)$, a ve b'yi tanımlayacak olursak;

$$t(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

$$a = k_1(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1),$$

$$b = -k_2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1).$$

q'nun türevini alacak olursak,

$$q' = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dq}{dt} \frac{1}{x_2 - x_1}$$

Ve aynı zamanda,

$$q' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + (1 - 2t) \frac{a(1 - t) + bt}{x_2 - x_1} + t(1 - t) \frac{b - a}{x_2 - x_1},$$

$$q'' = 2 \frac{b - 2a + (a - b)3t}{(x_2 - x_1)^2}$$

$x = x_1$, $x = x_2$ eşitsizlerini yukarıdaki denklemlerde yerine yazacak olursak ve ilk türevler $q'(x_1) = k_1$ ve $q'(x_2) = k_2$ ve aynı zamanda ikinci türevleri şu şekildedir;

$$q''(x_1) = 2 \frac{b - 2a}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$q''(x_2) = 2 \frac{a - 2b}{(x_2 - x_1)^2}$$

Eğer (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ set sayısı $n + 1$ nokta olursa

$$q_i = (1 - t)y_{i-1} + ty_i + t(1 - t)((1 - t)a_i + tb_i)$$

burada $i = 0, 1, \dots, n$ ve $t = 2 \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ dir.

$i = 1, \dots, n$ için $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ öyle ki $i = 1, \dots, n - 1$ için $q'_i(x_i) = q'_{i+1}(x_i)$ dir.

$x_0 \leq x \leq x_n$ ve

$$a_i = k_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - (y_i - y_{i-1})$$

$$b_i = -k_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + (y_i - y_{i-1})$$

$i = 1, \dots, n$ için

$$k_0 = q'_i(x_0)$$

$$k_i = q'_i(x_i) = q'_{i+1}(x_i) \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$k_n = q'_n(x_n)$$

Eğer for $i = 1, \dots, n-1$ için $q'_i(x_i) = q'_{i+1}(x_i)$ sağlıyorsa, daha sonra ortaya çıkan fonksiyonun sürekli bir ikinci türevi bile olacaktır.

Eşsizlikler ancak ve ancak $i = 1, \dots, n-1$ için;

$$\frac{k_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) 2k_i + \frac{k_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$$

$$= 3 \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} \right)$$

eşsizliği $n+1$ tane k_0, k_1, \dots, k_n değer için, $n - 1$ tane lineer denklem içeriyor.

Spline interpolasyonu için model olan elastik cetveller için, en soldaki "düğüm" in solunda ve en sağdaki "düğüm" in sağında cetvel serbestçe hareket edebilir ve bu nedenle $q'' = 0$ ile düz bir çizgi şeklinde olacaktır. "Doğal Splines" için q'' , x 'in

sürekli bir fonksiyonu olması gerektiği gibi, $n - 1$ tane doğrusal denkleme de sahip olmalıdır.

$$q_1''(x_0) = 2 \frac{3(y_1 - y_0) - (k_1 + 2k_0)(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2} = 0,$$

$$q_n''(x_n) = -2 \frac{3(y_n - y_{n-1}) - (k_n + 2k_{n-1})(x_n - x_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})^2} = 0,$$

Yani,

$$\frac{2}{x_1 - x_0} k_0 + \frac{1}{x_1 - x_0} k_1 = 3 \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^2}$$

$$\frac{1}{x_n - x_{n-1}} k_{n-1} + \frac{2}{x_n - x_{n-1}} k_n = 3 \frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})^2}$$

Eşitsizliklerinden $n + 1$ tane lineer denklem oluştu.

Diğer uç koşullar : "Kenetlenmiş spline", spline'in uç noktalarındaki eğimi belirtir.

"Düğüm olmayan spline" için, x_1 ve x_{n-1} noktalarında üçüncü türev sürekli olmalıdır.

"Düğüm olmayan spline" için, gerekli ek denklemler:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1} \text{ iken}$$

$$q_1'''(x_1) = q_2'''(x_1) \rightarrow \frac{1}{\Delta x_1^2} k_0 + \left(\frac{1}{\Delta x_1^2} - \frac{1}{\Delta x_2^2} \right) k_1 - \frac{1}{\Delta x_2^2} k_2 = 2 \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1^3} - \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2^3} \right)$$

$$q_{n-1}'''(x_{n-1}) = q_n'''(x_{n-1}) \rightarrow \frac{1}{\Delta x_{n-1}^2} k_{n-2} + \left(\frac{1}{\Delta x_{n-1}^2} - \frac{1}{\Delta x_n^2} \right) k_{n-1} - \frac{1}{\Delta x_n^2} k_n$$

$$= 2 \left(\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}^3} - \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n^3} \right)$$

3.4 Biharmonik Spline İnterpolasyonu

R3'deki polinom spline'lar aşağıdaki denkleme verilen fonksiyonlardır:

$$S(x) = p(x) + \sum_{i=1}^N d_i |x - x_i|^{2v-1},$$

v pozitif bir tamsayı ve p en fazla v ye eşit derecede bir polinomdur. 'Poliharmonik spline' isminin bir nedeni; $|x|^{2v-1}$, dağıtım denklemi için temel Φ çözümünün bir katı olmasıdır.

$$\Delta^{v+1} \Phi = \delta_0,$$

Laplacian'ın Δ ve δ_0 ile belirtildiği yer ise orjindeki Dirac ölçüsüdür. Poliharmonik kullanmanın temel avantajı splineların düzeltici interpolasyon özelliğidir. R^3 durumuna odaklanma, bir dizi farklı nokta verildiğinde, $\{x_i\}_{i=1}^N \in R^3$ durumunda π_v^3 için tek çözücü ve $f_i \in R$ için karşılık gelen fonksiyonel değerler, interpolasyon koşullarının sağlayan formun eşsiz $(v + 1)$ -harmonik S spline formları vardır.

$$S(x_i) = f_i, i = 1, 2, \dots, N,$$

Sınır koşulları

$$\sum_{i=1}^N d_i q(x_i) = 0, \quad \forall q \in \pi_v^3.$$

Biharmonik, $v = 1$ için denklemde özel bir durumdur.

Genel olarak, bi-harmonik operatör için Green fonksiyonlar, bir veya iki boyutta, düzensiz aralıklı veri noktaları için minimum eğrilik interpolasyon tekniği için kullanılır.

İnterpolasyon eğrisi (bu durumda yüzey), her veri noktasında ortalanmış Green fonksiyonların doğrusal bir birleşimidir. Green fonksiyonun genliği, doğrusal bir denklem sistemi çözülerek elde edilebilir. Bir (veya iki) boyutta bu yöntem kübik interpolasyon yöntemine eşittir, üç boyutta ise çoklu kuadratik interpolasyona karşılık gelir. Bu yeni teknik, spline yönteminden daha esnek, çünkü bu yöntem geleneksel spline yönteminden nispeten daha yavaş olmasına rağmen, yeni yüzeyi bulmak için hem eğim hem de değer kullanılabilir. Dahası, modeldeki parametre sayısını azaltarak gürültülü veri en küçük kare şeklinde yerleştirilebilir. Genellikle kübik eğri çizgiler, düzensiz aralıklı veri noktalarından geçen en yumuşak bir eğri veya yüzeyi bulmak için kullanılır. Bu teknik, veri noktalarına uyacak şekilde elastik bir ışının (veya 2D'de elastik tabaka) zorlanmasına fiziksel olarak karşılık gelir. Dolayısıyla, biharmonik denklemi sağlayan interpolasyon eğrisi (veya yüzeyi) eğriliği azaltır [21,22].

3.5 İnce Tabakalı Spline İnterpolasyonu

Bu yöntem, değerleri iyi hesaplayan düzgün yüzeyler çizdirir. R^2 uzayında (x_i, y_i) ve $i = 1, 2, \dots, n$ verildiğinde ince tabakalı spline, fonksiyon olarak tanımlanır [21,23]:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i r_i^2(x, y) \log r_i(x, y) + a_{n+1} + a_{n+2}x + a_{n+3}y$$

Burada:

$$r_i^2(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i y_i = 0$$

Bu fonksiyon aşağıdaki pürüzlülük ölçümünü en aza indirir.

$$J_2(U) = \int \Omega (U_{xx}^2 + 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2) dx dy$$

Tüm fonksiyonlar $U(x_i, y_i) = f_i$, $i = 1, \dots, n$ ile Ω 'deki ikinci türevleri sağlar ve Ω 'nin tanım aralığı R^2 'ye eşittir.

3.6 Hata Analizi

Spline interpolasyon yöntemlerinin kesinliğini hesaplayıp yöntemleri karşılaştırmak için R^2 (R-square) ve SSE (karesi alınmış hataların toplamı) hata analizleri kullanıldı. SSE değeri sıfıra yaklaştıkça hata oranının daha az olduğu dolayısıyla daha kesin sonuçlar verdiğini gösteriyor. R^2 değeri $[0,1]$ aralığındadır. Sonucun 0 değerine yakın olması fazla hata verdiğini, 1 değerine yakın olması ise hatanın az olduğunu ve daha kesin bir sonuç verdiğini gösteriyor [24,25].

- Veri setleri $y_i (i = 1, 2, 3 \dots)$ olsun. \bar{y} , verilerin ortalamasını veren formül;

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

- SSE değeri için her bir değer ile ortalama arasındaki farkın karesi toplamı alınır.

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

- R^2 hesaplanması için her y_i değerine karşılık gelen f_i değeri arasındaki farkın kareleri toplamı hesaplandıktan sonra hata analizi yapılır.

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - f_i)^2$$

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$



4. JEOFİZİKSEL VERİ UYGULAMASI

Bu bölümde yukarıda anlatılan 5 interpolasyon tekniği Türkiye’de son yüzyılda gerçekleşmiş 4 büyük deprem veri setine uygulandı. Böylece interpolasyon tekniklerini hem daha fazla veri setine uyarlamış oldu hem de Türkiye’de gerçekleşmiş bu 4 büyük deprem ile ilgili matlab programında çizdirilen parçalı yüzey grafikleri ile hata analizleri yapıldı. Bu 4 büyük deprem ile ilgili değerler verildikten sonra matlab programında çizdirilen parçalı yüzey grafikleri ve bunların hata analizleri tablosu bilgileri yer alacaktır. Bu 4 büyük depreme ait tarih ve deprem büyüklük bilgileri şu şekildedir:

- 26.12.1939 tarihinde Erzincan’da 7,9 büyüklüğünde deprem gerçekleşmiştir.
- 26.11.1943 tarihinde Samsun’da 7,2 büyüklüğünde deprem gerçekleşmiştir.
- 24.11.1976 tarihinde Van’da 7,5 büyüklüğünde deprem gerçekleşmiştir.
- 17.08.1999 tarihinde Gölcük’te 7,4 büyüklüğünde deprem gerçekleşmiştir.

Jeofizik uzmanlarının öncü ve artçı depremler hakkında tahminlerine yardımcı olmak adına her depremin öncesi ve sonrası olacak şekilde iki farklı durum ele alındı. Hem deprem öncesi hem de deprem sonrası analizi için daha detaylı bilgi edinmek için 1 yıl ve 5 yıllık dönemlere bakıldı.

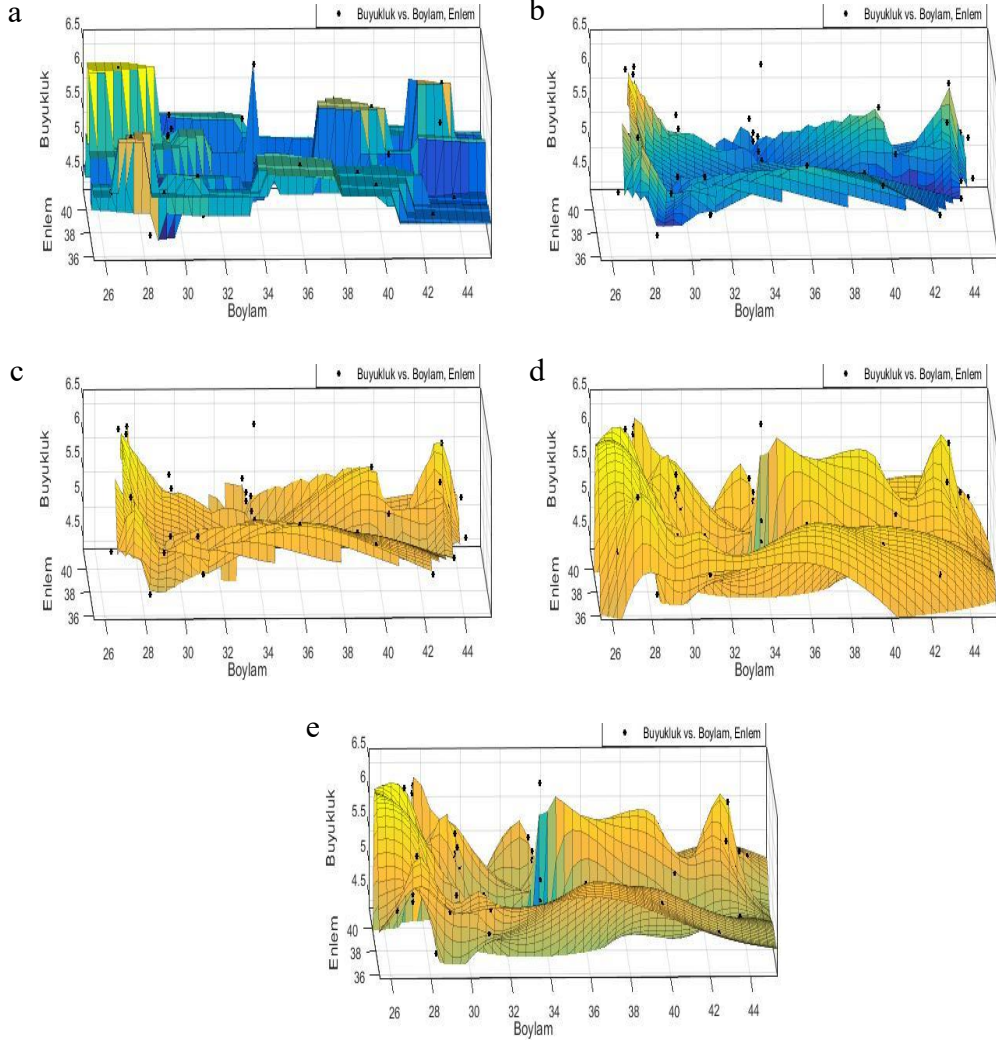
Erzincan depremi öncesi durum Şekil 4.1 ve Şekil 4.2’de gösterilmiştir, deprem sonrası durum Şekil 4.3 ve Şekil 4.4’de gösterilmiştir. Samsun depremi öncesi durum Şekil 4.5 ve Şekil 4.6’da gösterilmiştir, deprem sonrası durum Şekil 4.7 ve Şekil 4.8’de gösterilmiştir. Van depremi öncesi durum Şekil 4.9 ve Şekil 4.10’da gösterilmiştir, deprem sonrası durum Şekil 4.11 ve Şekil 4.12’de gösterilmiştir. Gölcük depremi öncesi durum Şekil 4.13 ve Şekil 4.14’de gösterilmiştir, deprem sonrası durum Şekil 4.15 ve Şekil 4.16’de gösterilmiştir.

Her büyük deprem öncesi ve sonrası olmak üzere 4 durum için 5 farklı interpolasyon teknikleri ile hata analizleri yapılmıştır ve analiz sonuçları çizelgelere yazılmıştır. 4 büyük deprem veri setlerinden elde edilen hata analizleri sonuçlarına göre:

- Veri sayısı az olduğunda (25 veriye kadar: Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.6) tüm yöntemlerin hata analizleri R^2 ’ye göre 1’e yakın olduğu ve SSE’ye göre 0

yakın olduğu görülüyor. En yakın komşu yöntemi dışındaki yöntemlerde R^2 'ye göre sonucun 1 çıktığı ve SSE'ye göre sonucun 0 değerinin çok az üstünde olduğu, en yakın komşu yönteminde ise SSE'e göre sonucun 0 olduğu ve R^2 'ye göre değerin 1 değerinin çok az altında olduğu görülüyor.

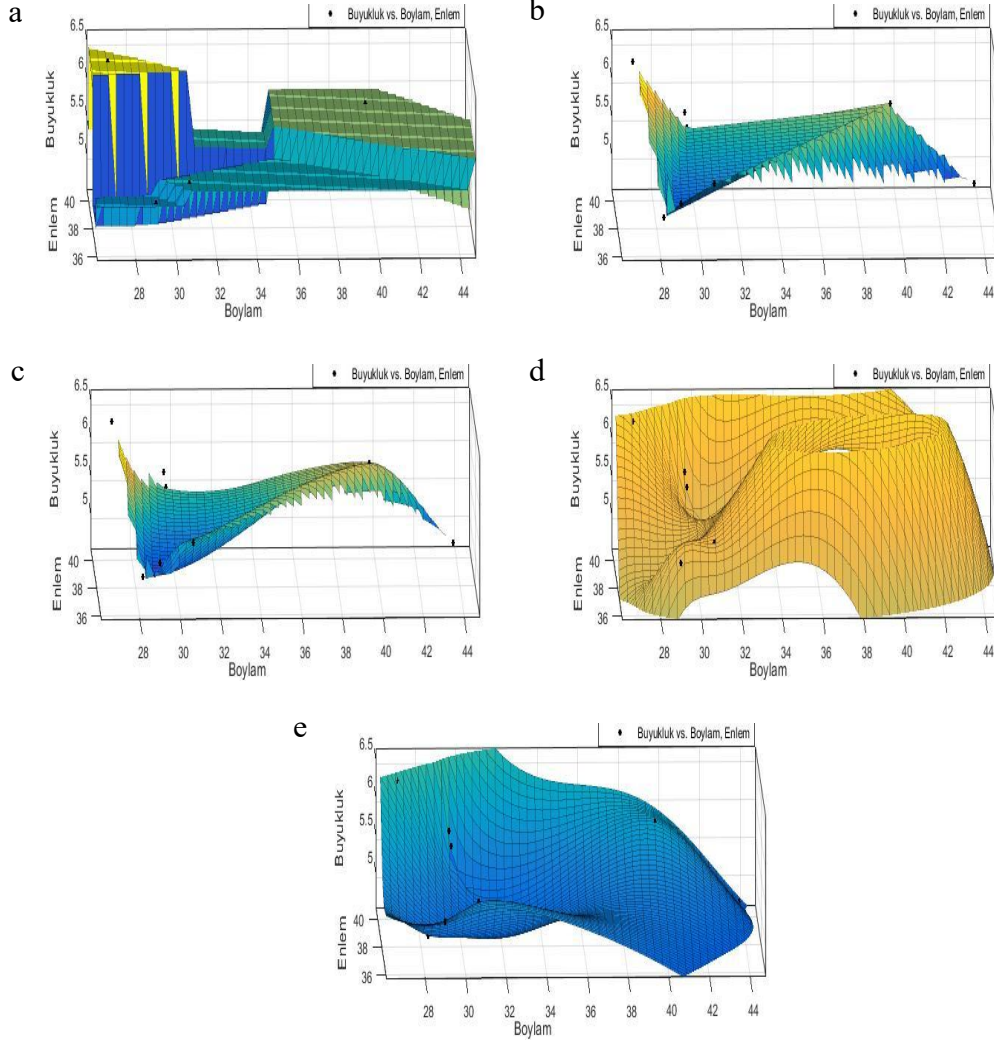
- Analiz sonuçlarına göre belli bir veri sayısı aralığında olduğuunda (25-728 veri aralığında: Çizelge 4.1, Çizelge 4.3, Çizelge 4.4, Çizelge 4.5, Çizelge 4.7, Çizelge 4.8, Çizelge 4.10, Çizelge 4.11) 5 spline interpolasyon yöntemine göre de hata oranın R^2 'ye göre 1 yakın olduğu ve SSE'ye göre sonucun 0 değerine yakın olduğu görülüyor. Aynı veri aralığında veri sayısı belli bir sayıya kadar arttığında 5 yöntem için de hata oranının eşit oranda değıştiği görülüyor.
- Veri sayısı çok fazla olduğuunda (728 veri üstünde: Çizelge 4.9, Çizelge 4.12, Çizelge 4.13, Çizelge 4.14, Çizelge 4.15, Çizelge 4.16) ince tabakalı spline yöntemi dışındaki yöntemlerin aynı sonucu verdiği ve hata oranın R^2 'ye göre 1 yakın olduğu ve SSE'ye göre sonucun ince tabakalı spline yöntemine göre 0 değerine daha yakın olduğu görülüyor. Aynı şekilde veri sayısının artması ile 4 yöntemin hata oranlarının arttığı görülüyor. İnce tabakalı spline yönteminde ise bahsedilen 6 veri setlerinden elde edilen hata analizine göre sonuçlar SSE'ye göre gittikçe 0 değerinden uzaklaştığı ve R^2 'ye göre hata oranın 0 değerine yaklaştığı görülüyor.



Şekil 4.1 : Erzincan depremi öncesi durum için 1934-1939 yılları arasında 66 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.1 : Erzincan depreminin 1934-1939 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

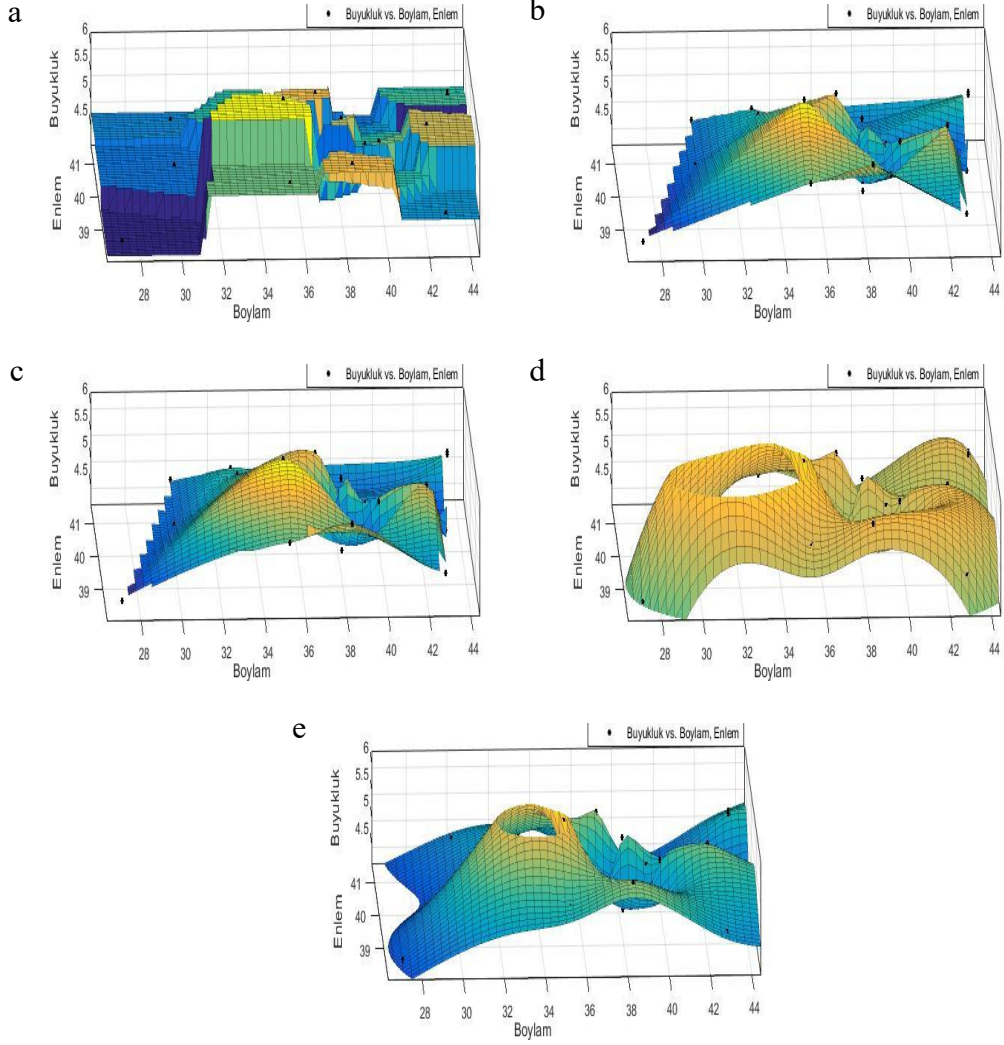
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	0,09	0,9038
Lineer	0,09	0,9038
Kübik	0,09	0,9038
Biharmonik	0,09	0,9038
İnce tabakalı spline	0,09	0,9038



Şekil 4.2 : Erzincan depremi öncesi durum için 1938-1939 yılları arasında 13 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.2 : Erzincan depreminin 1938-1939 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

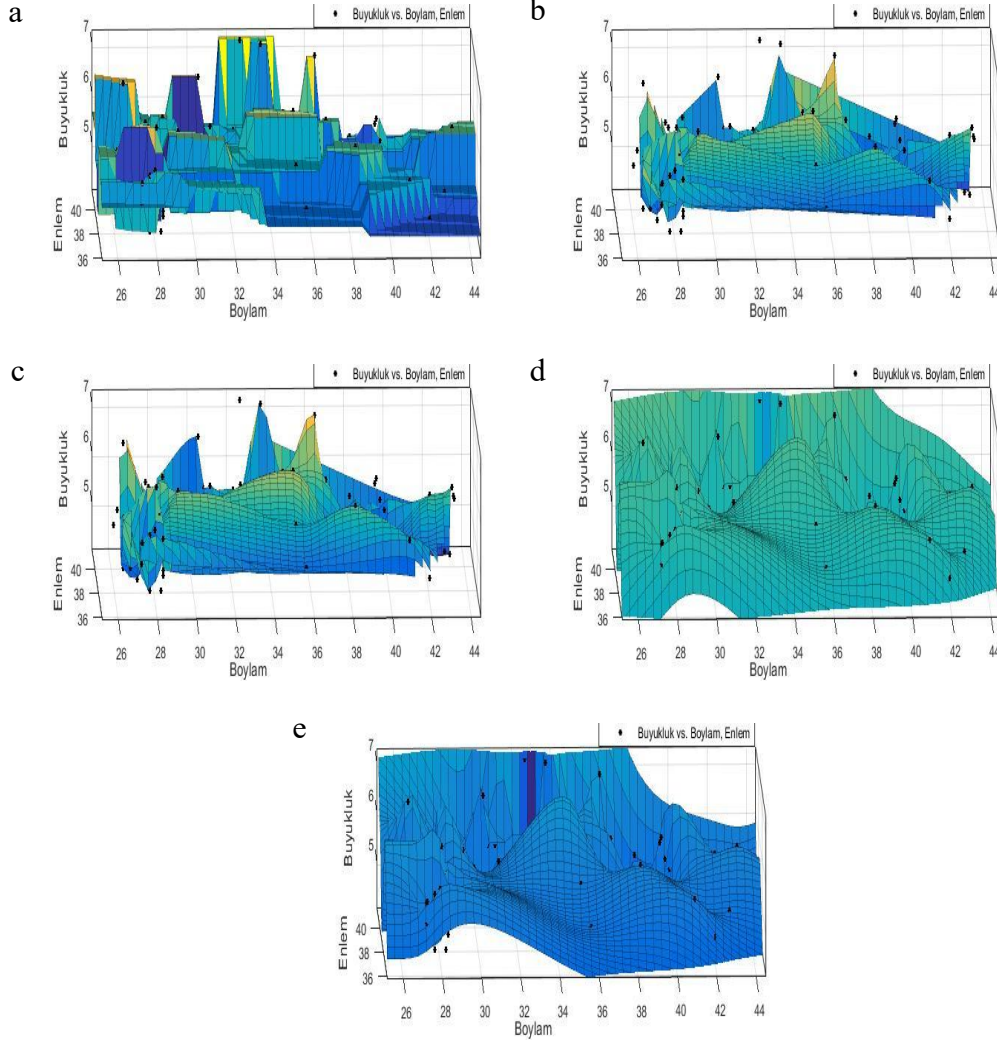
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	0	1
Lineer	2,37E-30	1
Kübik	4,83E-28	1
Biharmonik	1,73E-23	1
İnce tabakalı spline	9,20E-23	1



Şekil 4.3 : Erzincan depremi sonrası durum için 1939-1940 yılları arasında 29 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.3 : Erzincan depreminin 1939-1940 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

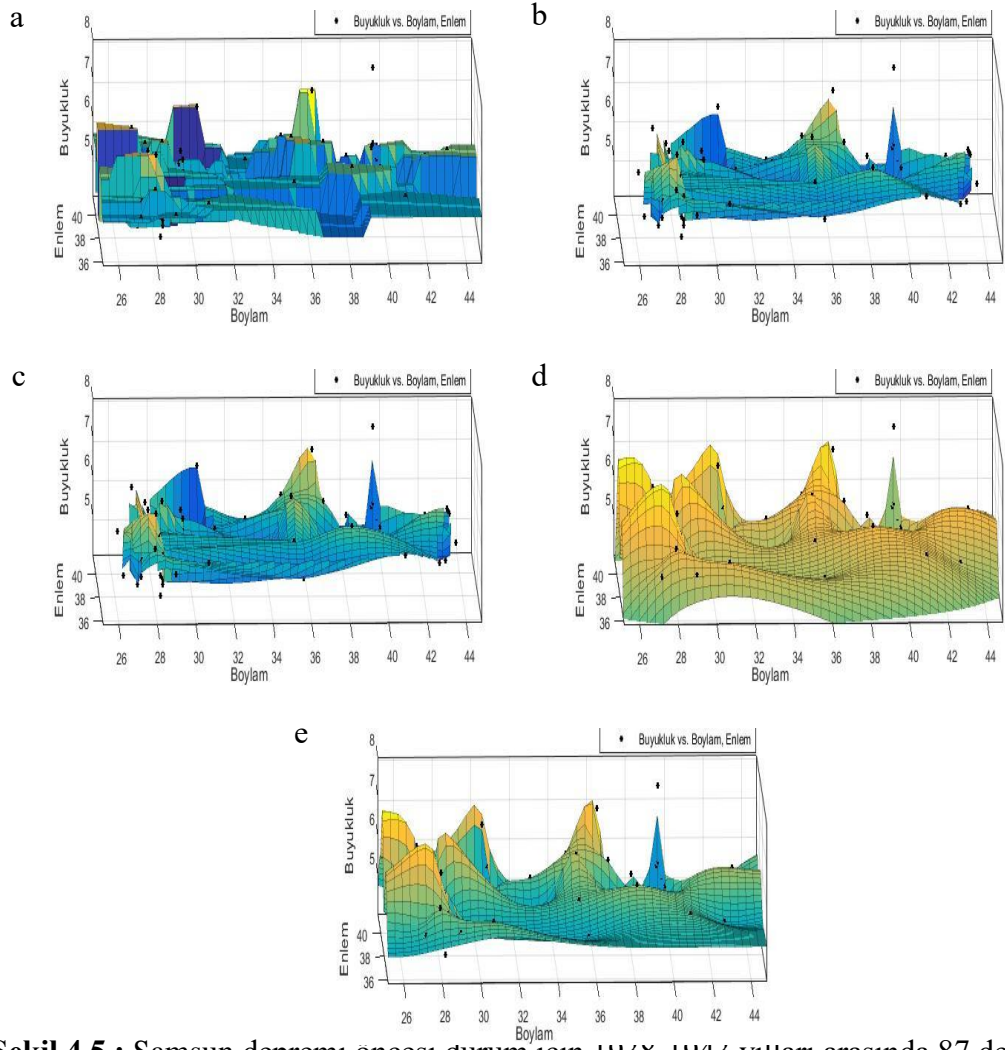
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	0,02	0,9967
Lineer	0,02	0,9967
Kübik	0,02	0,9967
Biharmonik	0,02	0,9967
İnce tabakalı spline	0,02	0,9967



Şekil 4.4 : Erzincan depremi sonrası durum için 1939-1944 yılları arasında 98 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.4 : Erzincan depreminin 1939-1944 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

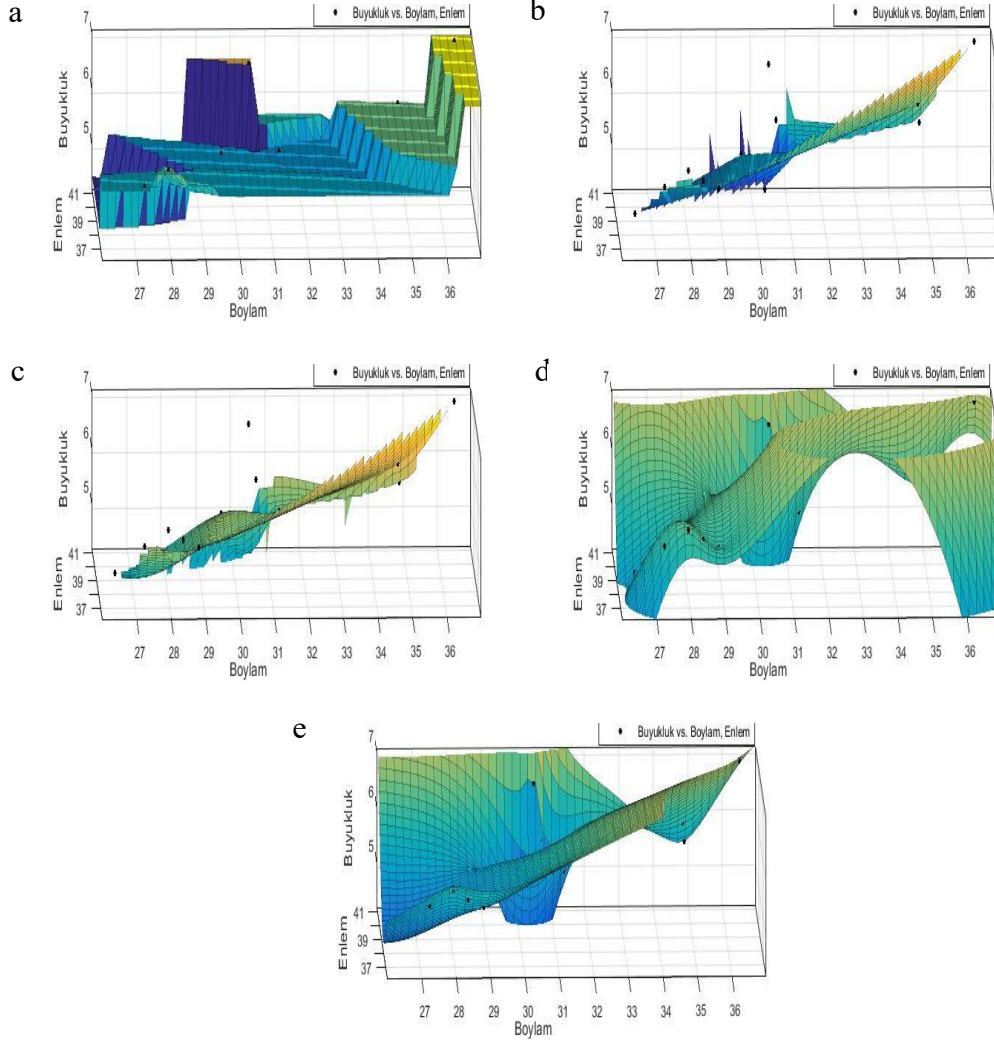
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	0,15	0,9956
Lineer	0,15	0,9956
Kübik	0,15	0,9956
Biharmonik	0,15	0,9956
İnce tabakalı spline	0,15	0,9956



Şekil 4.5 : Samsun depremi öncesi durum için 1938-1943 yılları arasında 87 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.5 : Samsun depreminin 1938-1943 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

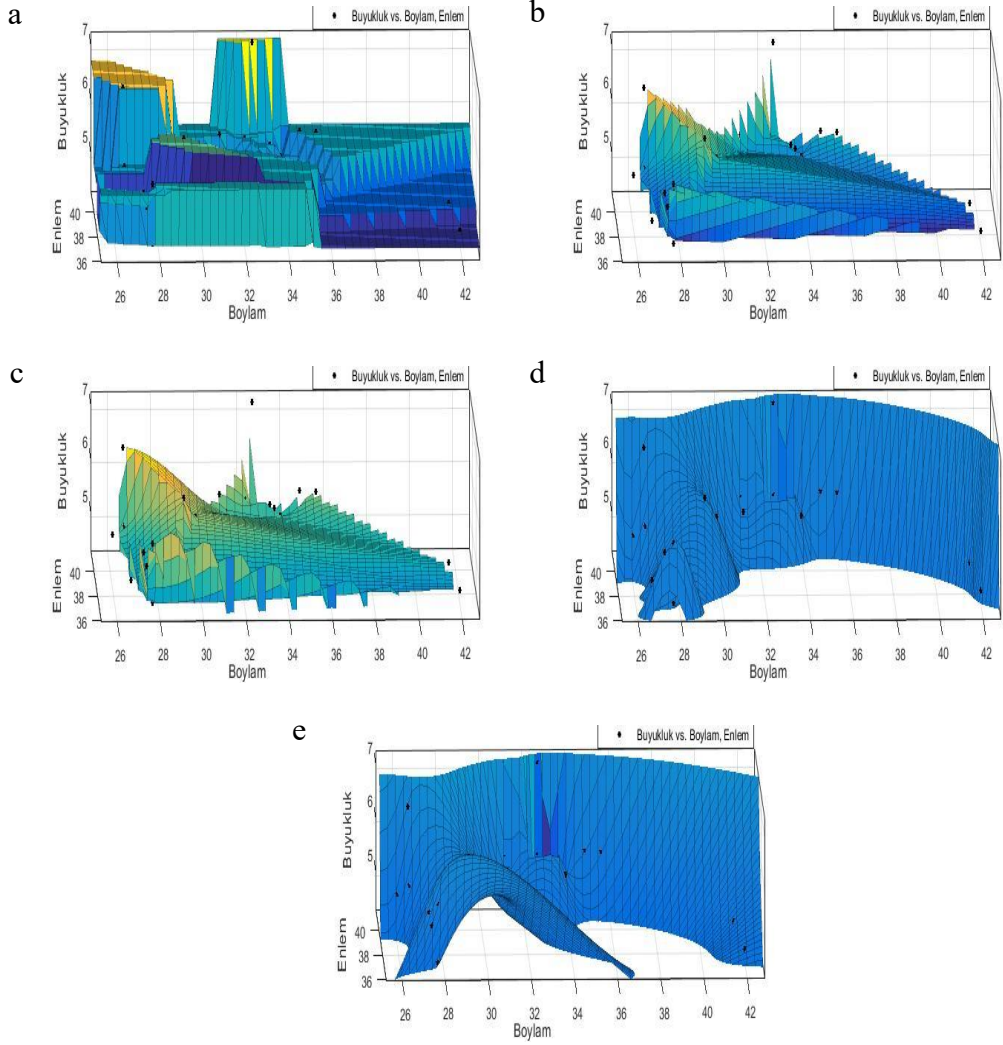
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	0,17	0,9947
Lineer	0,17	0,9947
Kübik	0,17	0,9947
Biharmonik	0,17	0,9947
İnce tabakalı spline	0,17	0,9947



Şekil 4.6 : Samsun depremi öncesi durum için 1942-1943 yılları arasında 13 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.6 : Samsun depreminin 1942-1943 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

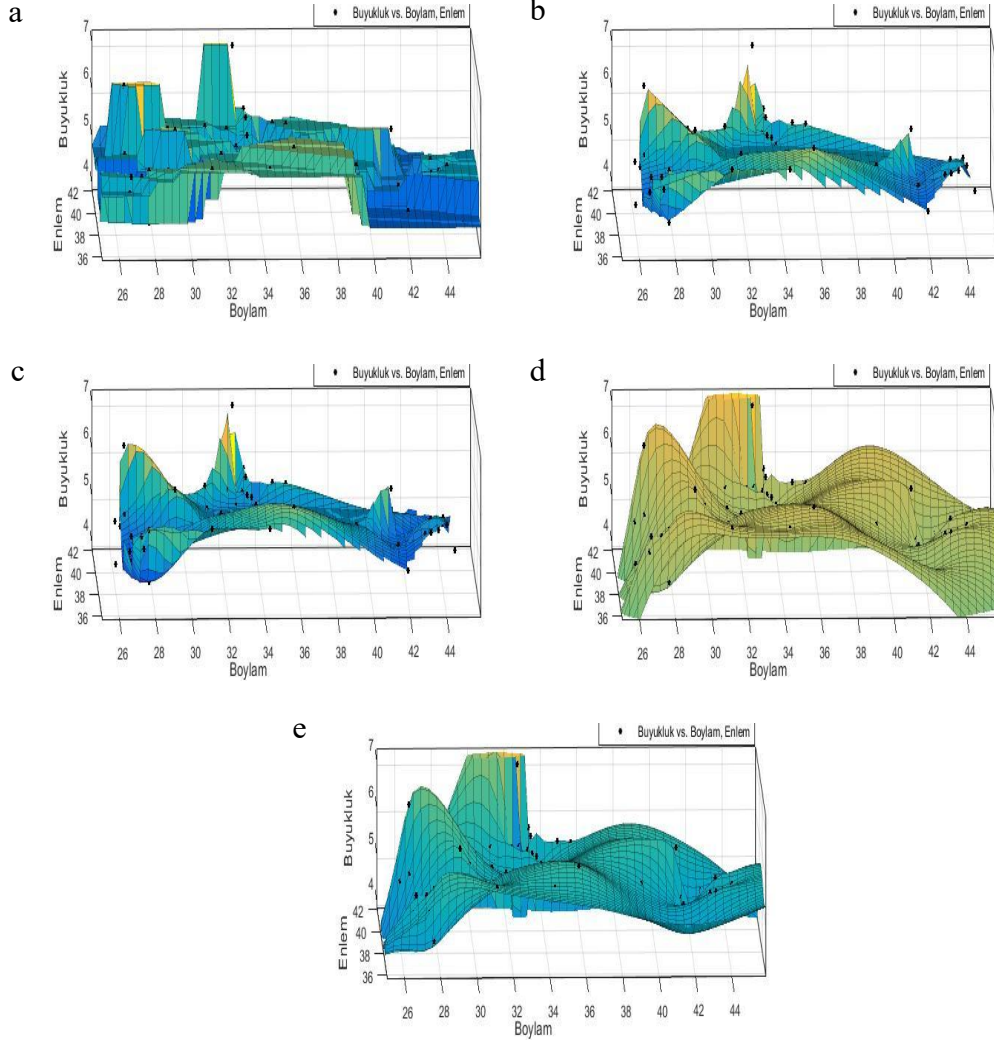
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	0	0,9875
Lineer	1,31E-27	1
Kübik	2,19E-25	1
Biharmonik	7,36E-27	1
İnce tabakalı spline	1,10E-25	1



Şekil 4.7 : Samsun depremi sonrası durum için 1943-1944 yılları arasında 25 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.7 : Samsun depreminin 1943-1944 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

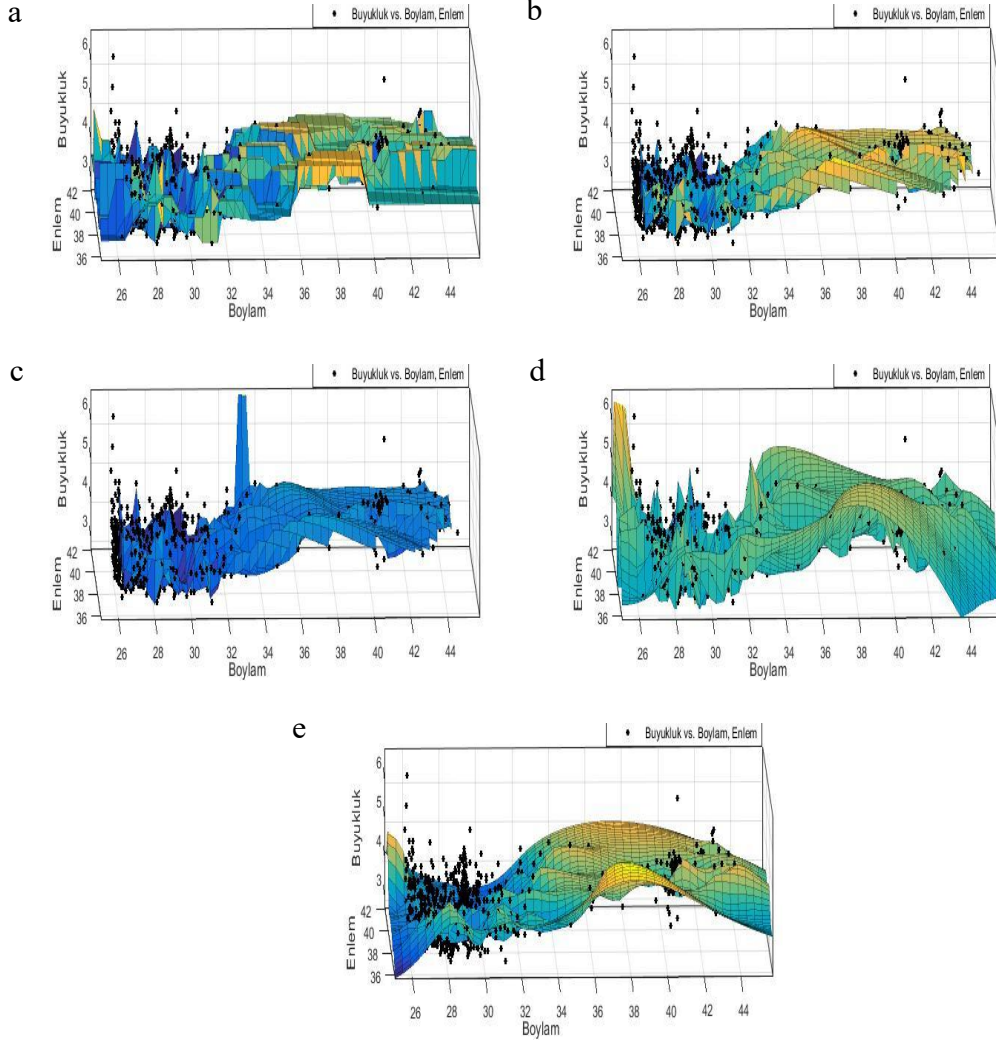
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	0,11	0,9877
Lineer	0,11	0,9877
Kübik	0,11	0,9877
Biharmonik	0,11	0,9877
İnce tabakalı spline	0,11	0,9877



Şekil 4.8 : Samsun depremi sonrası durum için 1943-1948 yılları arasında 62 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.8 : Samsun depreminin 1943-1948 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

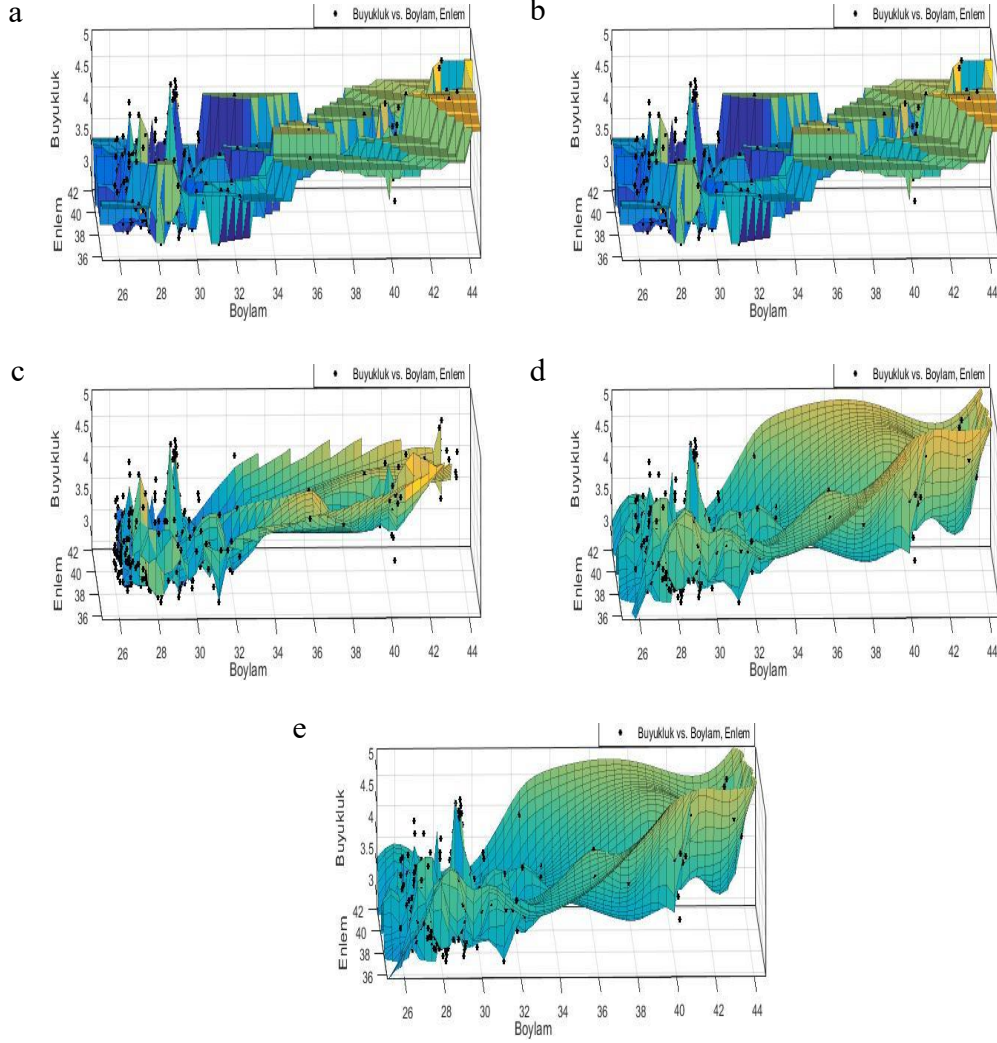
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	0,11	0,993
Lineer	0,11	0,993
Kübik	0,11	0,993
Biharmonik	0,11	0,993
İnce tabakalı spline	0,11	0,993



Şekil 4.9 : Van depremi öncesi durum için 1971-1976 yılları arasında 1259 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.19 : Van depreminin 1971-1976 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

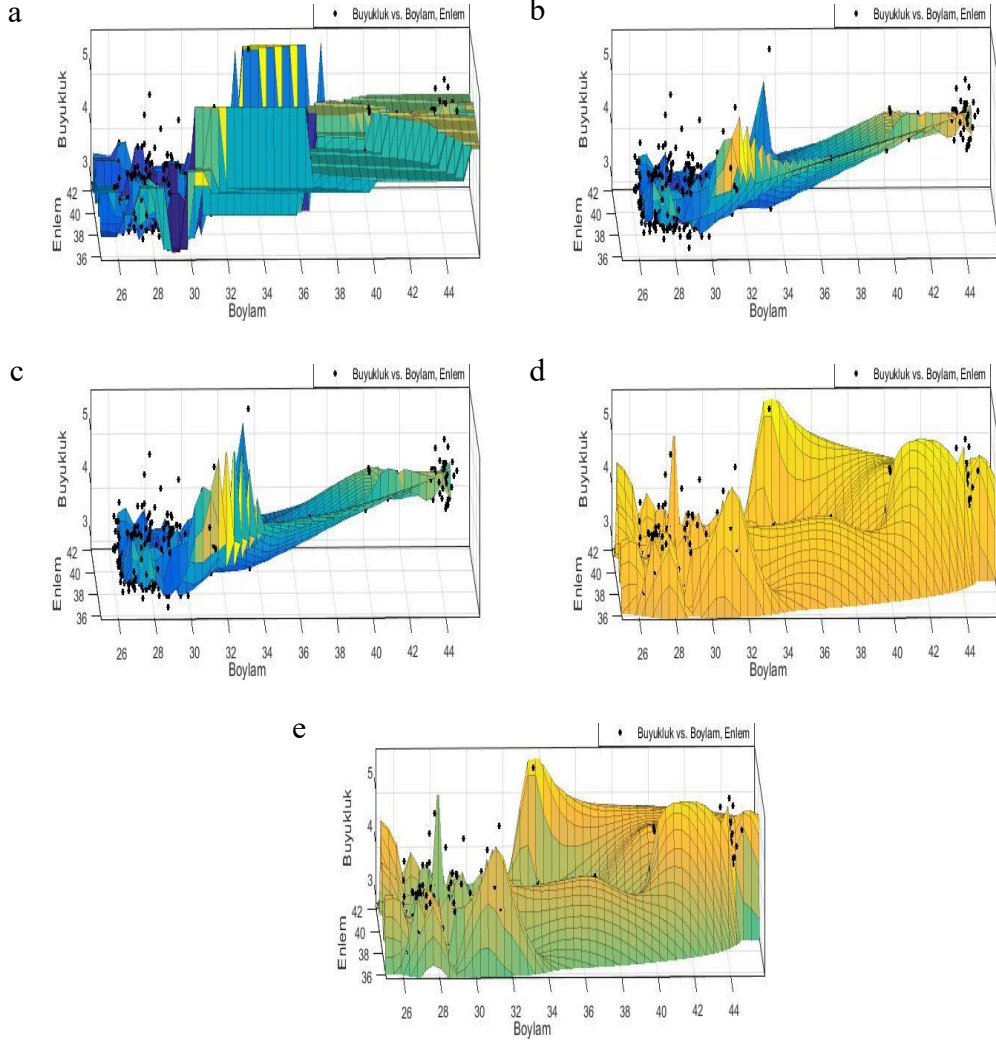
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	6,83	0,9835
Lineer	6,83	0,9835
Kübik	6,83	0,9835
Biharmonik	6,83	0,9835
İnce tabakalı spline	189,24	0,5442



Şekil 4.10 : Van depremi öncesi durum için 1975-1976 yılları arasında 728 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.10 : Van depreminin 1975-1976 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

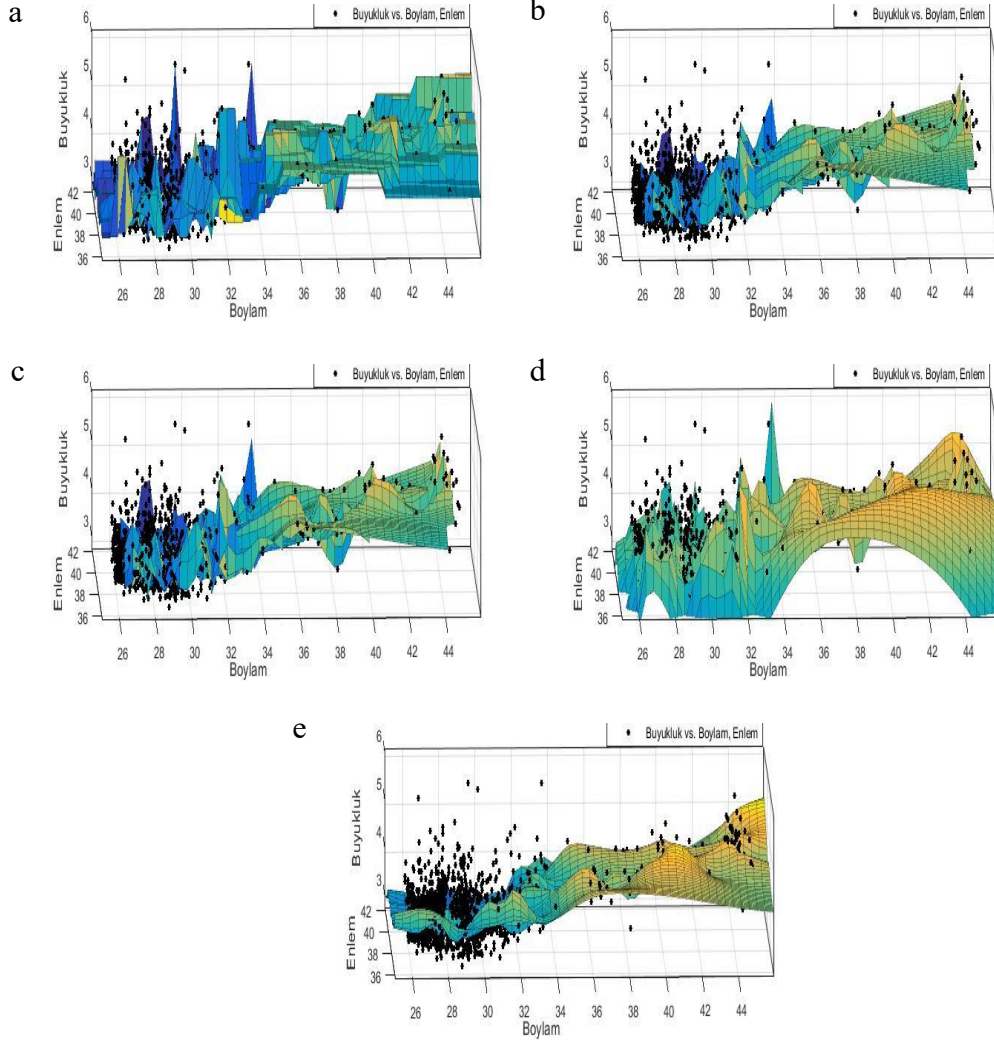
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	3,43	0,9776
Lineer	3,43	0,9776
Kübik	3,43	0,9776
Biharmonik	3,43	0,9776
İnce tabakalı spline	3,43	0,9776



Şekil 4.11 : Van depremi sonrası durum için 1976-1977 yılları arasında 498 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.11 : Van depreminin 1976-1977 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

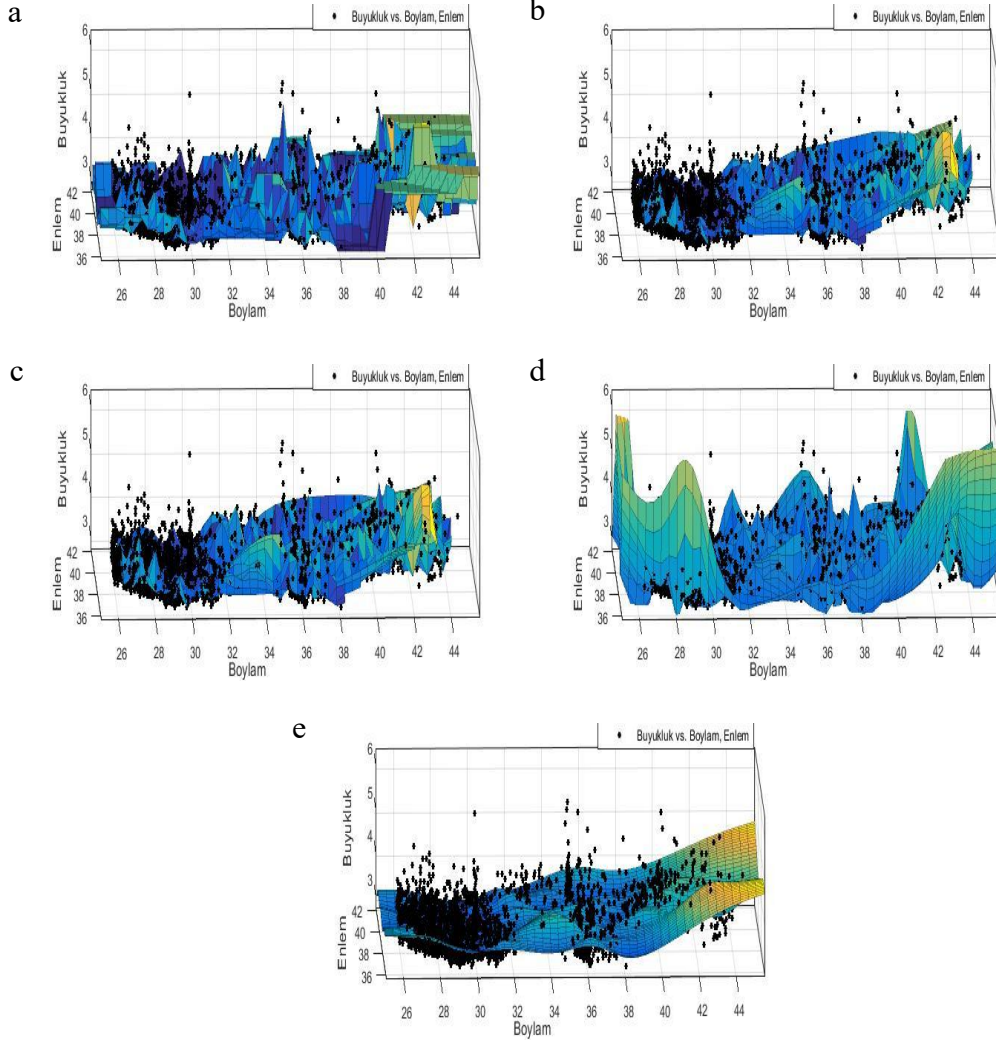
Yöntem	SSE	R ²
En yakın komşu	1,05	0,9931
Lineer	1,05	0,9931
Kübik	1,05	0,9931
Biharmonik	1,05	0,9931
İnce tabakalı spline	1,05	0,9931



Şekil 4.12 : Van depremi sonrası durum için 1976-1981 yılları arasında 2063 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.12 : Van depreminin 1976-1981 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

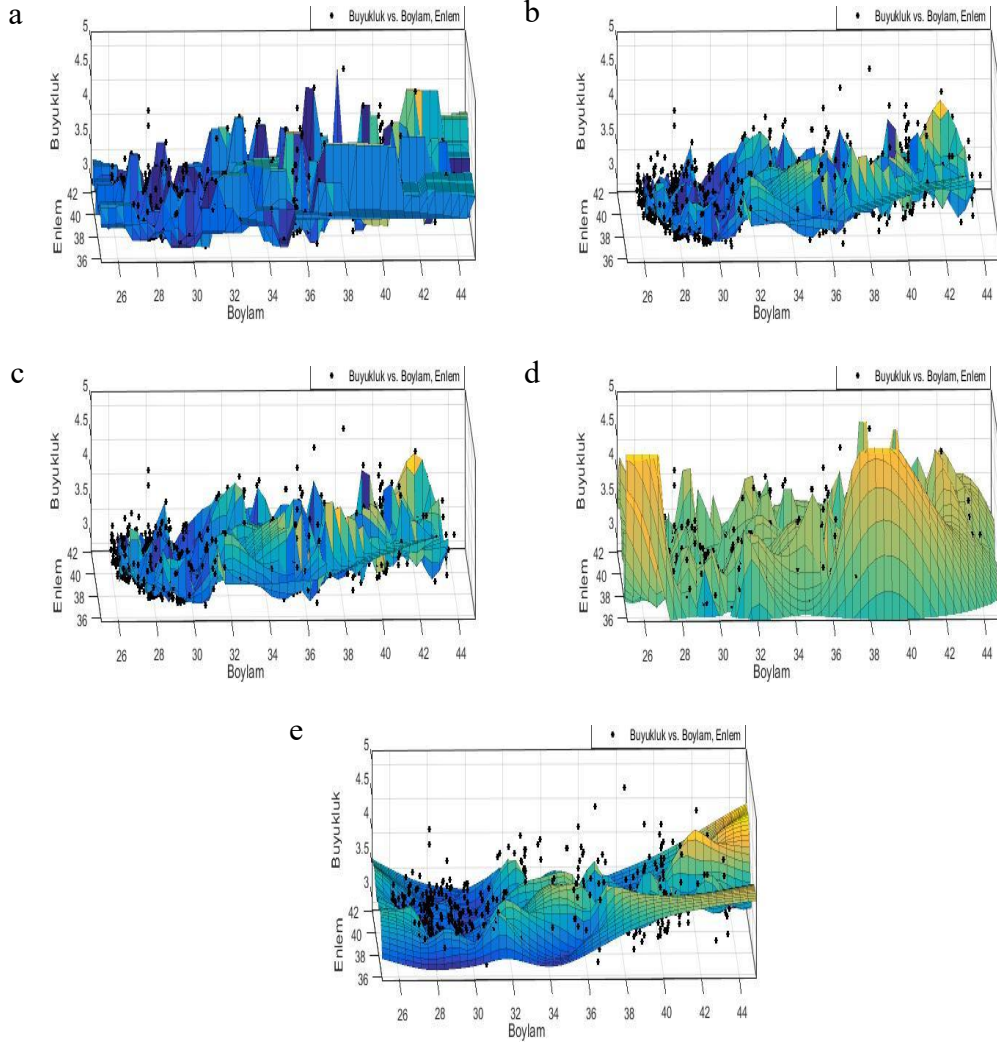
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	5,57	0,9886
Lineer	5,57	0,9886
Kübik	5,57	0,9886
Biharmonik	5,57	0,9886
İnce tabakalı spline	232,61	0,5263



Şekil 4.13 : Gölcük depremi öncesi durum için 1994-1999 yılları arasında 5118 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.13 : Gölcük depreminin 1994-1999 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

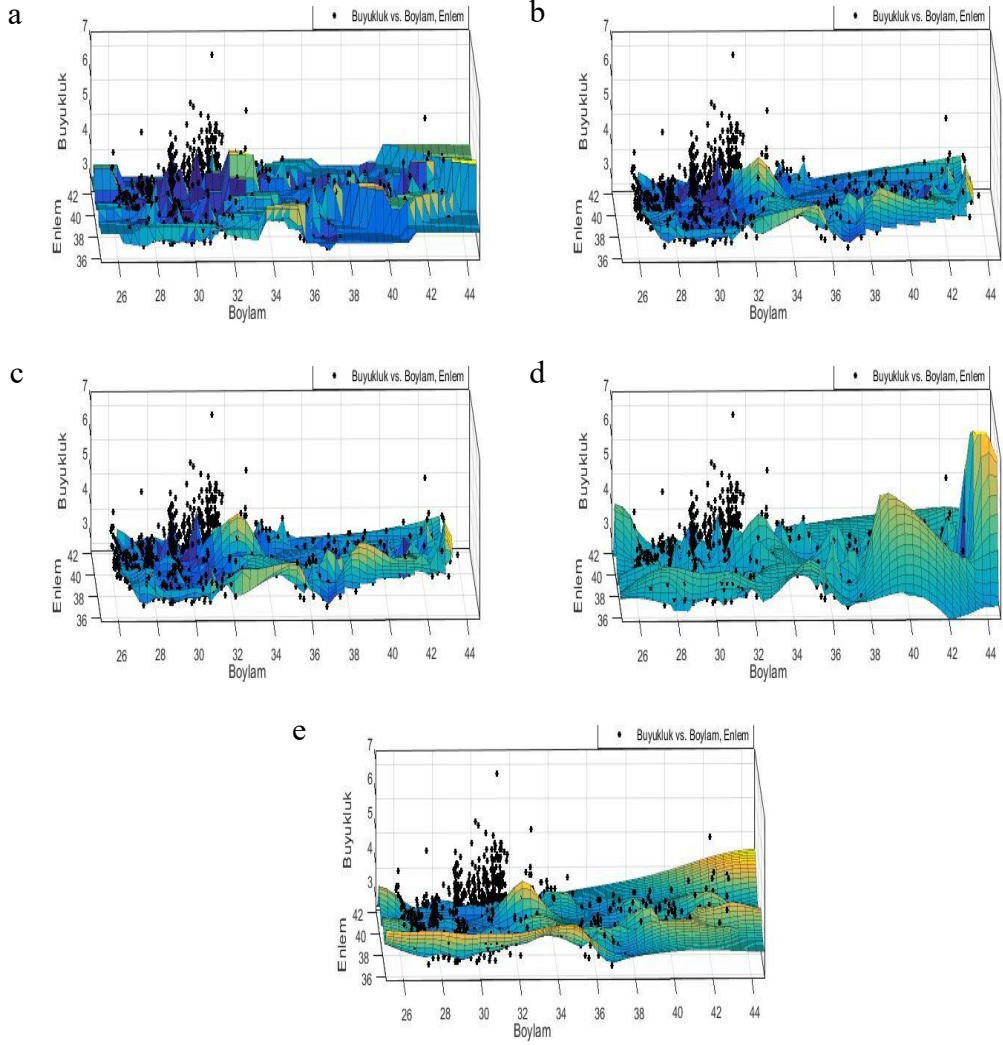
Yöntem	SSE	R ²
En yakın komşu	26,8	0,9547
Lineer	26,8	0,9547
Kübik	26,8	0,9547
Biharmonik	26,8	0,9547
İnce tabakalı spline	415,7	0,297



Şekil 4.14 : Gölcük depremi öncesi durum için 1998-1999 yılları arasında 923 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.14 : Gölcük depreminin 1998-1999 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

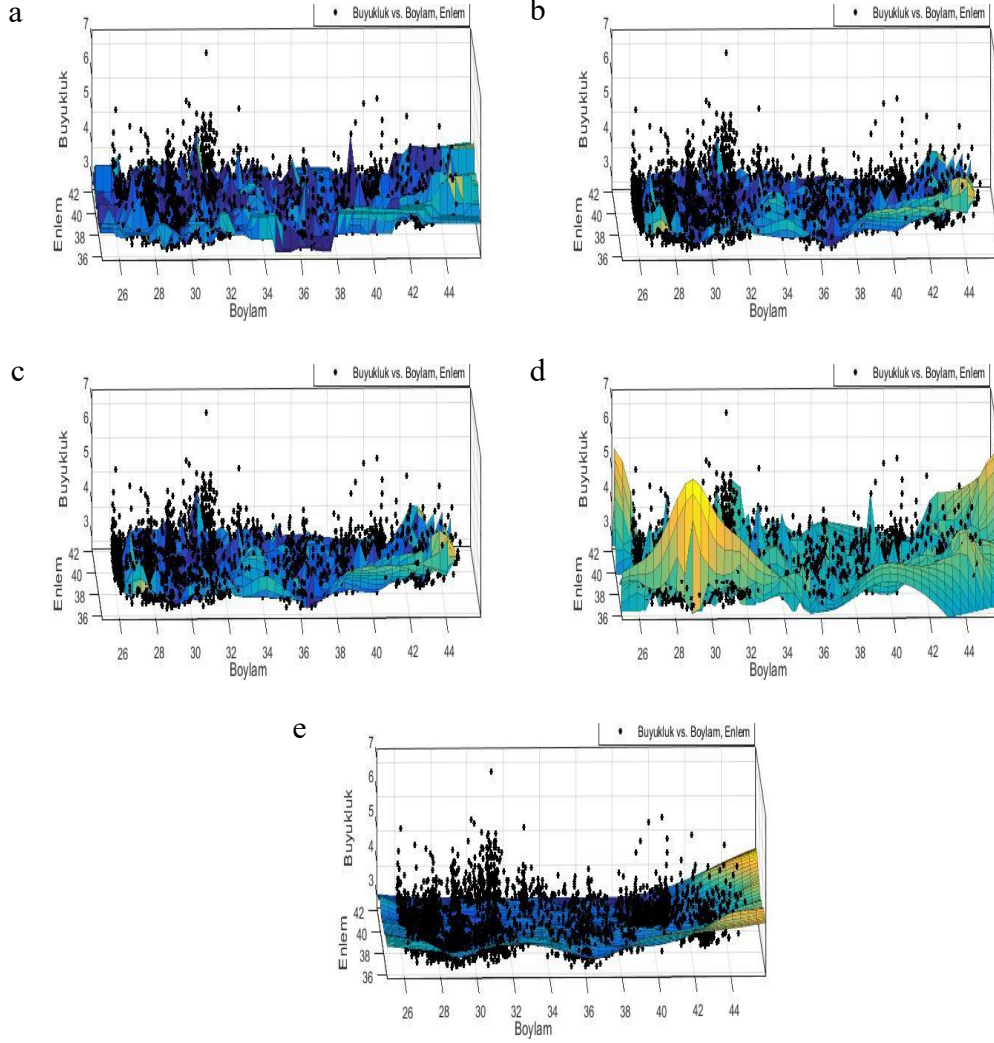
Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	0,77	0,9926
Lineer	0,77	0,9926
Kübik	0,77	0,9926
Biharmonik	0,77	0,9926
İnce tabakalı spline	47	0,545



Şekil 4.15 : Gölcük depremi sonrası durum için 1999-2000 yılları arasında 1838 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.15 : Gölcük depreminin 1999-2000 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	23,79	0,9283
Lineer	23,79	0,9283
Kübik	23,79	0,9283
Biharmonik	23,79	0,9283
İnce tabakalı spline	259,31	0,2184



Şekil 4.16 : Gölcük depremi sonrası durum için 1999-2004 yılları arasında 8464 deprem verisi kullanılarak 5 farklı yöntem uygulandı: (a) En yakın komşu yöntemi; (b) Lineer yöntemi; (c) Kübik yöntemi; (d) Biharmonik yöntemi; (e) İnce tabakalı spline yöntemi.

Çizelge 4.16 : Gölcük depreminin 1999-2004 yılları arasındaki deprem verileri için hata analizi.

Yöntem	SSE	R^2
En yakın komşu	110,8	0,8974
Lineer	110,8	0,8974
Kübik	110,8	0,8974
Biharmonik	110,8	0,8974
İnce tabakalı spline	941,13	0,1288

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında; literatürdeki 3 boyutta spline interpolasyon yöntemleri açıklanıp, gerçek deprem veri setlerine bu yöntemler uygulanarak parçalı yüzey grafikleri elde edildi. Deprem veri setlerine uygulanan spline interpolasyon yöntemlerinin algoritmalarına ve beklenen avantajlarına yer verildi.

Gerçek deprem veri setleri olarak; Türkiye enlem ve boylamlarında gerçekleşen 4 büyük deprem olan Erzincan, Samsun, Van ve Gölcük depremleri ele alındı. Bu depremlerin ele alınmasının nedeni Türkiye’de son yüzyılda gerçekleşmiş büyük depremler arasında olmaları ve deprem büyüklüklerinin 7 üzeri olmasıdır.

Matlab programında çizdirilen parçalı yüzey grafiklerine R^2 ve SSE hata analizleri yapıldı. Hata analizleri yapılırken; R^2 [0,1] aralığında değer alırken, SSE sıfır değerinden uzaklaştıkça hata oranı artıyor. Öncü ve artçı deprem tahmini yapacak uzmanlara yardımcı olması adına deprem öncesi ve sonrası durum ele alınmıştır. Analizi genişletmek için depremin hem öncesi hem de sonrası için 1 yıl ve 5 yıllık dönemlerden veri setleri alınıp parçalı yüzey grafikleri oluşturuldu.

- Elde edilen grafiklerden, biharmonik ve ince tabakalı spline yöntemlerinin diğer yöntemlere kıyasen daha düzgün bir grafik oluşturduğu görülüyor.
- Oluşan grafiklerde verilerin az olduğu ve çok olduğu durumlarda 5 spline interpolasyon tekniğinin hata oranları analizi yapılmıştır. Çizelgelere bakıldığında zaman veri sayısı çok az olduğunda (25 veriye kadar) R^2 'ye göre sonucun 1 değerine çok yakın olduğu ve SSE'ye göre de sonucun 0 değerine çok yakın olduğu görülmüştür, sadece en yakın komşu yönteminin R^2 'de hata oranının diğer yöntemlere kıyasen biraz daha fazla olduğu ama SSE analizine göre sonucun 0 değerine daha yakın olduğu görülüyor. Belli veri sayısına aralığında (25 -728 veri) tüm yöntemlerin aynı hata oranını verdiği görülüyor. Belli bir veri sayısından sonra (728 veri geçtiğinde) ince tabakalı yöntem dışındaki yöntemlerin aynı hata oranını verdiği ve ince tabakalı spline

yönteminin hata oranının SSE'e göre 0 değerinden uzaklaştığı ve R^2 'ye göre değerin 0 değerine yaklaştığı görülüyor.

Beklendiği gibi, kübik spline, biharmonik spline interpolasyon ve ince tabakalı spline ile diğer iki yöntemle göre daha düzgün yüzeyler elde ettik. Diğer taraftan, aşırı tahmin veya yetersiz tahmine yol açabilecek yüzeyler de gördük. Bu yüzden ilgili beş yöntemin birlikte dikkate alınmasını öneririz.

Bu çalışmanın Jeofizik uzmanlarının öncü ve artçı deprem tahmini için yapacakları çalışmalara yardımcı olabileceğini düşünürüz.



KAYNAKLAR

- [1] **Url-1** <<http://www.koeri.boun.edu.tr/sismo/zeqdb/>>, erişim tarihi: 11.11.2019.
- [2] **Levly, D.** (2010). Spline Interpolation, *Introduction to Numerical Analysis*, s.47-55.
- [3] **Atikson, K. E.** (1989). Piecewise Polynomial Interpolation, *An Introduction to Numerical Analysis*, s.163-176.
- [4] **Haber, J., Zeilfelder, F., Davydov, O., ve Seidel, H., P.** (2011). Smooth Approximation and Rendering of Large Scattered Data Sets. *Proceedings of the Conference on Visualization*, s.341-348
- [5] **Url-2** John D'Errico (2019). Surface Fitting using gridfit <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8998-surface-fitting-using-gridfit>>, MATLAB Central File Exchange, erişim tarihi: 14.12.2019.
- [6] **Url-3** <<https://www.mathworks.com/help/curvefit/>>, erişim tarihi: 11.11.2019.
- [7] **Isaac, A.** (2002). Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems: a survey, *Journal of Electronic Imaging*. Vol. 11, No. 2, s.157–176.
- [8] **Alan, B. ve Bovik, C.** (2009). In *The Essential Guide to Image Processing*.
- [9] **Dunlop, G., R.** (1979). A Rapid Computational Method For Improvements To Nearest Neighbour Interpolation, *Comp. & Maths. with Appls.* Vol. 6. pp. 349-353.
- [10] **Url-4** <<https://www.datafloyd.com/tr/>>, erişim tarihi: 11.11.2019.
- [11] **Kudryavtsev, M., Palafox, S., ve Silva, L. O.** (2015) On a linear interpolation problem for n-dimensional vector polynomial, *Journal of Approximation Theory* 199 (2015) 45–62.
- [12] **Kaya, E.,** (2014), Spline Interpolation Techniques, *Journal of Technical Science and Technologies*.
- [13] **Bayram, M.,** (2009), İnterpolasyon Teorisi, *Nümerik Analiz*, s.144-153.
- [14] **Burden, R. L., ve Faires, J. D.** (1976). Cubic Spline Interpolation, *Numerical Analysis*, s.144-161.

- [15] **Gautschi, W.** (2012). Interpolation by Piecewise Linear Functions, *Numerical Analysis*, s.102-110.
- [16] **Sauer, T.** (2012). Cubic Splines, *Numerical Analysis*, s.166-176.
- [17] **Stoer, J., ve Bulirsch, R.** (1992). Interpolation by Spline Functions, *Introduction to Numerical Analysis*, s.93-114.
- [18] **Ramachandran, D., Mallayya, V., M.** (2017). Bivariate Cubic Spline Interpolation, *International Journal of Mathematics And its Applications*, Volume 5, Issue 1–C, 397–400.
- [19] **Hall, C. A., ve Meyer, W. W.** (1976). Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation. *Journal of Approximation Theory*.
- [20] **Schoenberg, ve Isaac, J.** (1946). Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions: Part A. On the Problem of Smoothing or Graduation. A First Class of Analytic Approximation Formulae. *Quarterly of Applied Mathematics*, s.45–141.
- [21] **Mariani M.C., ve Basu, K.** (2015). Spline interpolation techniques applied to the study of geophysical data, *Physica A*, 428, s.68-79
- [22] **Peisker, P.** (1985), A multilevel algorithm for the biharmonic problem, *Numer. Math. (1985) 623–634. Springer-Verlag.*
- [23] **Algarni, D. A., ve Hassan, I. M. E.** (2001). Comparison of thin plate spline, polynomial, Cl-function and Shepard's interpolation techniques with GPS-derived DEM, *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*.
- [24] **Zhang, D.** (2016). A Coefficient of Determination for Generalized Linear Models, *Department of Statistics, Purdue University*.
- [25] **Cameron, A. C., ve Windmeijer, F. G.** (1996). An R-squared measure of goodness of fit for some common nonlinear regression models, *Journal of Econometrics*,77,329-342.

ÖZGEÇMİŞ



Ad-Soyad : İbrahim Halil KILIÇ
Doğum Tarihi ve Yeri : 25.02.1993, BATMAN
E-posta : ibrhmalilkilic@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2016, İstanbul Teknik Üniversitesi, Maden Fakültesi, Petrol ve Doğalgaz Müh.
- **Yüksek Lisans** : 2016- İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2018-2019 yılları arasında TPIC’te Petrol ve Doğalgaz Mühendisi olarak çalıştı.
- 2019- Eti Bakır A.Ş.’de Proses Mühendisi olarak çalışıyor.