

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PORTFÖY SEÇİMİNDE TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİYLE YENİ
DAYANIKLI VE BULANIK MODELLER: TEORİ VE UYGULAMALAR**



DOKTORA TEZİ

Furkan GÖKTAŞ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

ARALIK 2019

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PORTFÖY SEÇİMİNDE TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİYLE YENİ
DAYANIKLI VE BULANIK MODELLER: TEORİ VE UYGULAMALAR**

DOKTORA TEZİ

**Furkan GÖKTAŞ
(509132056)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet DURAN

ARALIK 2019

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509132056 numaralı Doktora Öğrencisi Furkan GÖKTAŞ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "PORTFÖY SEÇİMİNDE TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİYLE YENİ DAYANIKLI VE BULANIK MODELLER: TEORİ VE UYGULAMALAR" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Ahmet DURAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Fatma ÖZDEMİR**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ulviye ILGAZ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. İsmail KÖMBE
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Prof. Dr. Mine ÇAĞLAR
Koç Üniversitesi

Teslim Tarihi : 22 Kasım 2019
Savunma Tarihi : 18 Aralık 2019





Eşime, anneme ve babama,



ÖNSÖZ

Öncelikle lisans, yüksek lisans ve doktora tezlerimde danışmanlığımı yapan Doç. Dr. Ahmet Duran hocama ilgili, nazik, yol gösteren ve motive eden tutumu nedeniyle en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca 2006 yılından bu yana içinde bulunduğum İTÜ Matematik Mühendisliği ailesine teşekkürü borç bilirim. Görüş ve önerileri ile tezime katkı sunan Prof. Dr. Fatma Öztürk, Prof. Dr. İsmail Kömbe, Prof. Dr. Ulviye Ilgaz, Prof. Dr. Mine Çağlar, Prof. Dr. Burak Saltoğlu ve Arş. Grv. Gökhan Göksu'ya kalpten teşekkür ederim. Bu çalışmamı, hayatım boyunca beni destekleyen canım aileme armağan ediyorum.

Kasım 2019

Furkan Göktaş
(Matematik Mühendisi)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER.....	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
2. PORTFÖY YÖNETİMİNDE TEMEL KAVRAMLAR VE MODELLER.....	3
2.1 Hisse Senedi Fiyatları Modeli.....	3
2.2 Normal Dağılım.....	4
2.3 Risk Ölçüleri	7
2.4 Stres Testleri	9
2.5 Stokastik Baskınlık.....	11
2.6 Ortalama – Varyans Modeli: Geleneksel Yaklaşım	12
2.7 Ortalama – Varyans Modeli: Bayesyen Yaklaşım	14
2.8 Dayanıklı Ortalama – Varyans Modelleri.....	15
2.9 Olabilirlik Teorisine Dayanan Temel Modeller	17
2.10 Açığa Satış	18
3. ESKİ OLABİLİRLİK ORTALAMA – VARYANS MODELİ	21
3.1 Olabilirlik Teorisinde Temel Kavramlar	22
3.2 Eski Olabilirlik Ortalama – Varyans Modelinin Teorisi	25
3.3 Eski Olabilirlik Ortalama – Varyans Modelinin Etkin Sınırı	30
4. YENİ OLABİLİRLİK ORTALAMA – VARYANS MODELİ	35
4.1 Önerilen Bulanık Modelin Teorisi	36
4.2 Borsa İstanbul Üzerine Bir Uygulama.....	41
5. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ VE YENİ DAYANIKLI MODELLER	49
5.1 Önerilen Dayanıklı Modellerin Teorisi	49
5.2 Borsa İstanbul Üzerine Bir Uygulama.....	54
6. SONUÇLAR.....	59
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	65

KISALTMALAR

BIST	: Borsa İstanbul
BP	: Beklenen performans
Ç_x	: 2017 yılının x. çeyreği
EA	: Eşit ağırlıklı portföy
EP	: Ortalama – varyans etkin portföy
EP_D	: Dayanıklı ortalama – varyans etkin portföy
EP_O	: Olabilirlik ortalama – varyans etkin portföy
EP_{DO}	: Dayanıklı olabilirlik ortalama – varyans etkin portföy
KAP	: Kamuoyunu Aydınlatma Platformu
KRD	: Koşullu Riske Maruz Değer
OV	: Ortalama – Varyans
MS	: Maksimum Sharpe oranı portföyü
MS_D	: Maksimum dayanıklı Sharpe oranı portföyü
MK	: Maksimum Kayıp
MV	: Minimum varyans portföyü
MV_O	: Minimum olabilirlik varyansı portföyü
PP	: Piyasa portföyü
PP_D	: Dayanıklı piyasa portföyü
PP_O	: Olabilirlik piyasa portföyü
PP_{DO}	: Dayanıklı olabilirlik piyasa portföyü
RMD	: Riske Maruz Değer
S1, S2, S3	: BIST 30 holding hisselerinin kodları
S4, S5, S6	: BIST 30 holding hisselerinin kodları
sgn	: İşaret fonksiyonu
SO	: Sharpe oranı
SPK	: Sermaye Piyasası Kurulu
TB_x	: x. temel bileşen



SEMBOLLER

r	: Ek logaritmik getiri vektörü (risk faktörleri vektörü)
t	: Zaman
a	: Varlıkların başlangıçtaki değerini gösteren vektör
$N(\mu, \Sigma)$: Normal dağılım
μ, μ_p	: Ortalama vektörü, (temel durumdaki) olabilirlik ortalaması vektörü
Σ, Σ_p	: Kovaryans matrisi, olabilirlik kovaryans matrisi
$\Sigma = V\Lambda V^T$: Özdeğer Ayrışımı
$x = V^T r, \mu_x$: Temel bileşenler vektörü, bunun ortalama vektörü
A, A_p	: Lineer korelasyon matrisi, olabilirlik korelasyon matrisi
$0, I, \bar{1}$: Sıfır vektörü, birim matris, tüm elemanları 1 olan sütun vektörü
K, L	: Kazancın rastgele değişkeni, kaybın rastgele değişkeni
n, m	: Risk faktörü (boyut) sayısı, her bir risk faktörü için veri sayısı
σ, σ_p	: Standart sapma vektörü, olabilirlik standart sapması vektörü
$k, R()$: Risk çarpanı, risk fonksiyonu
w, S	: Portföyün ağırlık vektörü, uygun çözüm kümesi
λ	: Riskten kaçınma katsayısı
β	: Normalize edilmiş riskten kaçınma katsayısı
$E(), \text{Var}()$: Beklenen değer operatörü, varyans operatörü
$E_p(), \text{Var}_p()$: Olabilirlik ortalaması operatörü, olabilirlik varyansı operatörü
τ, δ	: Belirsizlik parametresi, belirsizlik vektörü
G_E, G_K, G_T	: Belirsizlik kümeleri (güven bölgeleri)
$\bar{Y}, Y^\alpha, v(y)$: Bulanık küme, bunun α -kesmesi, bunun üyelik fonksiyonu



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Etkin sınır örnekleri için veriler I.	31
Çizelge 3.2 : Etkin sınır örnekleri için veriler II.	33
Çizelge 4.1 : Örneklem istatistikleri.	42
Çizelge 4.2 : Örneklem lineer korelasyon matrisi.	42
Çizelge 4.3 : Ortonormal özvektörler.	42
Çizelge 4.4 : Marjinal olabilirlik dağılımlarının parametreleri.	43
Çizelge 4.5 : Hisse senetlerinin karşılaştırılması.	44
Çizelge 4.6 : Olabilirlik korelasyon matrisi.	44
Çizelge 4.7 : Portföyler hakkındaki öngörüler.	45
Çizelge 4.8 : Tüm yıl için sonuçlar.	48
Çizelge 5.1 : Temel durumdaki parametreler.	55
Çizelge 5.2 : En kötü durumdaki parametreler.	55
Çizelge 5.3 : Performans öngörülerini.	56
Çizelge 5.4 : Tüm yıl için sonuçlar II.	58



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1 : Üyelik fonksiyonları.	23
Şekil 3.2 : Örnek I için etkin sınır.	32
Şekil 3.3 : Örnek II için etkin sınır.	32
Şekil 3.4 : Örnek III için etkin sınır.	33
Şekil 3.5 : Örnek IV için etkin sınır.	34
Şekil 4.1 : Kutu grafikleri.	43
Şekil 4.2 : Ağırlık vektörleri.	45
Şekil 4.3 : Ortalama – varyans etkin sınırı.	46
Şekil 4.4 : Olabilirlik ortalama – varyans etkin sınırı.	46
Şekil 4.5 : Gerçekleşmiş karlar.	47
Şekil 4.6 : Sharpe oranları.	47
Şekil 4.7 : Gerçekleşmiş performanslar.	48
Şekil 5.1 : Ağırlık vektörleri II.	56
Şekil 5.2 : Gerçekleşmiş karlar II.	57
Şekil 5.3 : Gerçekleşmiş performanslar II.	57
Şekil 5.4 : Sharpe oranları II.	57



PORTFÖY SEÇİMİNDE TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİYLE YENİ DAYANIKLI VE BULANIK MODELLER: TEORİ VE UYGULAMALAR

ÖZET

Olabilirlik Teorisi, kesin olmayan olasılığın modellenebilmesine ve kişisel yargılar ve beklentiler ile birlikte veri setindeki çarpıklığın portföy seçimi problemine entegre edilebilmesine imkan verir. Öte yandan risk faktörlerinin marjinal olabilirlik dağılımlarının üçgensel bulanık sayılar ile verildiği varsayımı altında eski olabilirlik ortalama – varyans (OV) modelinin matematiksel analizi bildiğimiz kadarıyla yapılmamıştır. Bu tez çalışmasında portföy yönetiminde temel kavramlar ve modeller verildikten sonra bu model, bu varsayım altında teorik olarak incelenmiştir. Bu kapsamda performansı ya da faydayı maksimum yapan portföyler analitik olarak elde edilmiştir. Ayrıca farklı etkin sınır yapıları örnekler ile açıklanmıştır. Bununla birlikte bu modelin önemli sorunları olduğu gösterilmiştir. Bu nedenle Temel Bileşenler Analizine dayanan yeni bir olabilirlik OV modeli önerilmiştir. Önerilen bulanık model, bu sorunları ortadan kaldırmaktadır ve Markowitz'in OV modelinin çözüm yollarıyla çözülebilmektedir. Önerilen bulanık model, teorisi oluşturulduktan sonra Borsa İstanbul üzerine bir uygulama ile tanıtılmıştır.

Marjinal olabilirlik dağılımların belirlenmesinde farklı yaklaşımlar kullanılabilir. Bu nedenle önerilen bulanık model, kullanıcıya büyük oranda esneklik sağlar ve doğru ellerde değerli bir araç olabilir. Bu tez çalışmasında tercih edilen yaklaşımda ise ortalama vektörünün belirsizliği önemli bir sorundur. Dayanıklı optimizasyon, bu tür sorunlarla mücadelede önemli bir araçtır. Bu nedenle yeni olabilirlik OV modelinin bir dayanıklı versiyonu önerilmiştir. Benzer şekilde OV modelinin Temel Bileşenler Analizine dayanan yeni bir dayanıklı versiyonu da önerilmiştir. Çünkü literatürdeki dayanıklı OV modellerinin önemli sorunları vardır. Önerilen dayanıklı modellerde temel bileşenlerin ortalama vektörü kutu tipi bir belirsizlik kümesine aittir. Her bir portföy alternatifi için buradaki en kötü durum dikkate alınır. En kötü duruma göre karar vermenin maliyetini kontrol altına almak için ise bir belirsizlik parametresi tanımlanmıştır. Bu parametrenin belirlenmesinde ise kovaryans matrisin maksimum özdeğerine dayanan bir yaklaşım kullanılmıştır. Belirsizlik parametresi sıfır iken söz konusu modellerle bunların dayanıklı versiyonları özdeştir. Bu nedenle önerilen dayanıklı modeller, söz konusu modellerin genel halidir. Önerilen dayanıklı modellerin analitik çözümleri, portföyde risksiz varlık ve kısa pozisyon bulunabiliyorken elde edilmiştir. Önerilen dayanıklı modeller, teorileri oluşturulduktan sonra Borsa İstanbul üzerine bir uygulama ile tanıtılmıştır.



NEW ROBUST AND FUZZY MODELS WITH THE PRINCIPAL COMPONENTS ANALYSIS IN PORTFOLIO SELECTION: THEORY AND APPLICATIONS

SUMMARY

The mean - variance (MV) model is generally based on the assumption that the joint distribution of the assets returns is a multivariate elliptical distribution. Here, the point estimators are used for the model parameters, which are known as the mean vector and the covariance matrix. The MV model is the first mathematical model for portfolio selection problem. It also forms the basis for asset pricing (with the Capital Asset Pricing Model). Furthermore, it is the ancestor of expected return - risk models. Despite its theoretical significance, this model often provides poor out-of-sample performance. Therefore, it is not generally preferred in practice. The main reason for this problem is due to the statistical errors in the estimation of these parameters. The estimation of the mean vector is much more difficult and thus a more important problem. Another reason for this problem is that the joint distribution of the assets returns may not be an elliptical distribution. That is, higher moments may convey distinctive information about the assets.

In the traditional approach, the parameters are taken as equal to its unbiased estimators. In the alternative approach based on Bayesian Statistics, the impact of the estimation error is reduced by shrinking the sample mean vector to a predetermined common value. This common value is generally taken as the average of the minimum variance portfolio. Therefore, both approaches give the identical efficient frontiers with no risk-free asset. Furthermore, the estimation error cannot be eliminated entirely. Moreover, possible market shocks may change this distribution even if it is certainly known.

Robust MV models, where box-type or elliptical confidence regions are used for the mean vector, take this information into account. Here, the worst-case situation in the confidence region is considered for each portfolio alternative. Therefore, these models are closely related to the concept of stress testing. Thus, they are notable alternatives in portfolio selection problem especially for financial institutions and conservative investors. On the other hand, these models have significant problems. If the confidence region is elliptical, the robust MV efficient frontier is the subset of the MV efficient frontier. A box-type confidence region is only suitable for the variables that are linearly uncorrelated. Therefore, we propose a new robust MV model by constructing box-type confidence regions over the principal components instead of the assets returns.

MV model and all robust MV models generally depend on the elliptical distribution assumption. Although this common assumption provides ease of use, it is claimed that this assumption is not empirically valid. Contrary to this assumption, the old possibilistic MV model considers the asymmetry in the data set. It also enables the practitioners to incorporate their subjective judgements into the portfolio selection problem as in the Bayesian approach. Furthermore, it depends on Possibility Theory, which is a great tool to deal with the imprecise probability. Therefore, the old

possibilistic MV model is a considerable alternative to the MV model. On the other hand, to the best of our knowledge, mathematical analysis of this model has not been performed under the assumption that marginal possibility distributions of the assets returns are given with triangular fuzzy numbers. In this thesis, after introducing the fundamental concepts and models in portfolio management, we theoretically examine this model under this assumption. In this context, we analytically obtain portfolios that maximize performance or utility. We also illustrate different efficient frontier structures with examples. On the other hand, we show that it has significant problems. For example, it may not capture the real-life dependence of the assets returns and may not uniquely give a well-diversified portfolio. Furthermore, it uses the Zadeh's extension principle for the sum of interactive fuzzy numbers although it is claimed that this principle is preferable only under the assumption of non-interaction. Moreover, it does not capture the negative dependence. Hence, it cannot be used effectively like its variants when the short positioning is allowed as in our case.

To eliminate these problems, we propose a new possibilistic MV model based on Principal Component Analysis. Here, we determine marginal possibility distributions of the principal components as triangular fuzzy numbers. We assume that these distributions are non-interactive since their linear correlation matrix is equal to the identity matrix. Then, we use the Zadeh's extension principle for the fuzzy addition without any theoretical concern. In addition, the formula of the possibilistic variance implies that their possibilistic correlation matrix is also equal to the identity matrix. It is consistent with the real-life dependence and the assumption of non-interaction. Furthermore, the construction and solution of the proposed fuzzy model are practical as the MV model. Because it is equivalent to a strictly concave quadratic maximization problem. Moreover, the proposed fuzzy model is well-defined with probability 1 under a certain condition. After laying down the theoretical points, we illustrate it by using a real data set of six holding stocks trading on the Borsa Istanbul. We also compare the profitability and performance results of the proposed fuzzy model and the MV model where the training and testing periods are the years of 2016 and 2017 respectively.

Different approaches can be used to determine the marginal possibility distributions. Therefore, the proposed fuzzy model gives the practitioners a great deal of flexibility and could be a valuable tool in the right hands. However, the uncertainty of the mean vector remains a significant problem in the approach preferred in this thesis. Robust optimization is an effective tool to deal with such problems. Hence, we also propose a robust version of the new possibilistic MV model. Similar to the proposed robust MV model, it depends on the Principal Components Analysis. In the proposed robust models, the mean vector of the principal components belongs to a box-type uncertainty set. Here, the worst-case situation is taken into account for each portfolio alternative. Generally, robust portfolio selection models are suitable for only financial institutions or conservative investors due to the worst-case orientation. Because the worst-case situations are not very likely to occur and there is a cost of being more conservative than necessary. Thus, we suggest an eigenvalue approach for the management of their conservativeness by defining an ambiguity parameter. When the ambiguity parameter is equal to zero, the (possibilistic) MV model is obtained. That is, the proposed robust (possibilistic) MV model is the generalization of the (possibilistic) MV model. We see that they are well-defined with probability 1 under a certain condition as the possibilistic MV model. We derive their analytical solutions when the risk-free asset and short positioning are allowed. After laying down the theoretical points, we illustrate them by using a real data set of six holding stocks trading on the Borsa

Istanbul. We also compare the profitability and performance results of the original models and their proposed robust versions where the training and testing periods are the years of 2016 and 2017 respectively.





1. GİRİŞ

Markowitz (1952)'de tanıtilen Ortalama – Varyans (OV) modelinde, risk faktörlerinin çok değişkenli eliptik dağılımının parametreleri (ortalama vektörü ve kovaryans matris) için nokta tahminci kullanılır. Bu model; portföy seçimi problemi için önerilen ilk matematiksel modeldir, (Sermaye Varlıklarını Fiyatlama Modeli ile) varlık fiyatlaması için temel oluşturur ve beklenen getiri - risk modellerinin atasıdır. Teorik önemine karşın bu model, örneklem dışı analizlerde genellikle düşük performans verir ve bu nedenle uygulamada pek tercih edilmez. Bu sorunun temel nedeni bu parametrelerin tahminindeki istatistiksel hatalardır. Ortalama vektörünün tahmini ise çok daha zor olduğundan daha önemli bir sorundur.

Geleneksel yaklaşımda buradaki parametreler, yansız tahmincilerine eşit alınır. Bayes İstatistiğe dayanan alternatif yaklaşımda ise örneklem ortalama vektörü, önceden belirlenmiş ortak bir değere yaklaştırılır ve tahmin hatasının etkisi azaltılır. Öte yandan bu ortak değer genellikle minimum varyans portföyünün ortalaması olarak belirlenir ve portföyde risksiz varlık bulunamazken her iki yaklaşım özdeş etkin sınır verir. Ayrıca tahmin hatası sıfırlanamaz ve bu dağılım kesin olarak bilinse bile muhtemel piyasa şokları bunu değiştirebilir.

Bu durumu dikkate alan literatürdeki dayanıklı OV modellerinde, ortalama vektörü için kutu tipi veya elipsoit güven bölgeleri kullanılır. Burada her bir portföy alternatifi için güven bölgesindeki en kötü durum dikkate alınır. Bu nedenle bu modeller stres testi kavramı ile yakından ilişkilidir. Dolayısıyla özellikle finansal kurumlar ve tutucu yatırımcılar için dikkate değer alternatiflerdendir. Öte yandan bu modellerin önemli sorunları vardır. Güven bölgesi elipsoit iken elde edilen etkin sınır, OV etkin sınırının alt kümesidir. Ayrıca kutu tipi güven bölgesi sadece lineer olarak ilişkili olmayan değişkenler için uygundur. Bu nedenle kutu tipi güven bölgesi, risk faktörleri yerine temel bileşenler üzerinden oluşturularak yeni bir dayanıklı OV modeli önerilmiştir.

OV modeli ve tüm dayanıklı OV modelleri, genellikle eliptik dağılım varsayımına dayanır. Kullanım kolaylığı sağlamasına karşın bu varsayımın, ampirik olarak geçerli

olmadığı ileri sürülmektedir. Eski olabilirlik OV modeli, bu varsayımın aksine veri setindeki çarpıklığı dikkate alır. Ayrıca bu model, Bayesyen yaklaşımda olduğu gibi kişisel yargıların ve beklentilerin portföy seçimi problemine entegre edilebilmesine imkan verir. Öte yandan risk faktörlerinin marjinal olabilirlik dağılımlarının üçgensel bulanık sayılar ile verildiği varsayımı altında bunun matematiksel analizi bildiğimiz kadarıyla yapılmamıştır. Bu nedenle bu model, bu varsayım altında teorik olarak incelenmiştir. Buna göre bu modelin önemli sorunları vardır.

Bu sorunları ortadan kaldırmak için Temel Bileşenler Analizine dayanan yeni bir olabilirlik OV modeli önerilmiştir. Önerilen bulanık model bir kesin konkav kuadratik maksimizasyon problemi ile verilebilir. Bu nedenle OV modelinin çözüm yollarıyla çözülebilmektedir. Ayrıca marjinal olabilirlik dağılımlarındaki muhtemel parametre belirsizliği dikkate alınmış ve önerilen bulanık modelin de bir dayanıklı versiyonu oluşturulmuştur. Bunun ve önerilen dayanıklı OV modelinin analitik çözümleri, portföyde risksiz varlık ve kısa pozisyon bulunabiliyorken elde edilmiştir. Önerilen tüm modeller, belirli bir şart altında %100 olasılıkla iyi tanımlıdır.

Bu tez çalışmasının ana hatları şu şekildedir. Bölüm 2’de portföy yönetiminde temel kavramlar ve modeller verilmiştir. Bölüm 3’te söz konusu varsayım altında, eski olabilirlik OV modelinin matematiksel analizi yapılmıştır. Bölüm 4’te yeni olabilirlik OV modeli, teorisi oluşturulduktan sonra Borsa İstanbul üzerine bir uygulama ile tanıtılmıştır. Bölüm 5’te söz konusu modellerin dayanıklı versiyonları, teorileri oluşturulduktan sonra Borsa İstanbul üzerine bir uygulama ile tanıtılmıştır. Bölüm 6’daki değerlendirmeler ile çalışma sonuçlandırılmıştır.

2. PORTFÖY YÖNETİMİNDE TEMEL KAVRAMLAR VE MODELLER

Bu bölümde portföy yönetimi ile ilgili temel bazı bilgiler verilmiştir. Bunlar sırasıyla hisse senedi fiyatları modeli, normal dağılım, risk ölçüleri, stres testleri, stokastik baskınlık, geleneksel yaklaşımdaki OV modeli, Bayesyen yaklaşımdaki OV modeli, dayanıklı OV modelleri, Olabilirlik Teorisine dayanan temel modeller ve açığa satıştır.

2.1 Hisse Senedi Fiyatları Modeli

Bu alt bölüm Mina ve Xiao (2001), Oksendal (2000) ve Frahm ve Jaekel (2008) temel alınarak hazırlanmıştır. Aşağıdaki stokastik diferansiyel denklem sisteminin analitik çözümü, hisse senedi fiyatları için yaygın kullanılan n boyutlu Geometrik Brownian Hareketidir. Burada F hisse senedi fiyat vektörü, t zaman, μ_{br} sürüklenme vektörü ve dW beyaz gürültüdür.

$$\frac{dF}{F} = \mu_{br} dt + U_{br} dW \quad (2.1)$$

Ek logaritmik getiri vektörü, risk faktörleri vektörü (r) olarak adlandırılınsın. (2.1)'deki U_{br} matrisi, r 'nin birim zaman için pozitif tanımlı¹ kovaryans matrisinin (Σ_{br}) Özdeğer Ayrışımı (Temel Bileşenler Analizi) ile bulunabilir.² Burada Λ_{br} pozitif özdeğerlerin (temel bileşenlerin varyanslarının) küçükten büyüğe sıralandığı köşegen matristir. V ise i . sütunu, i . özdeğere karşı gelen ortonormal özvektör (temel yön) olan ortogonal matristir.

$$\Sigma_{br} = V \Lambda_{br} V^T = \left(V \sqrt{\Lambda_{br}} \right) \left(V \sqrt{\Lambda_{br}} \right)^T = U_{br} U_{br}^T \quad (2.2)$$

Kullanımı daha yaygın olan İto Hesabına bir sürüklenme düzeltmesi altında eşdeğer olan Stratonovich Hesabı kullanılırsa (2.1) için aşağıdaki sonuç elde edilir. Burada f

¹ Simetrik bir matrisin tüm özdeğerleri pozitif ise bu matris pozitif tanımlı matris olarak adlandırılır.

² Genel olarak V ve dolayısıyla U_{br} tek olarak bulunmaz. Öte yandan bu tez çalışmasında varsayıldığı gibi özdeğerler ayırık ise temel yönlerin -1 ile çarpılabilmesi dışında bunların yapısı tektir.

birim zaman için risksiz faiz oranıdır, $w(t)$ Wiener sürecidir ve $\bar{1}$ tüm elemanları 1 olan sütun vektörüdür.

$$r(t) := \left[\log \left(\frac{F_i(t) e^{-ft}}{F_i(0)} \right) \right] = (\mu_{br} - f \bar{1})t + U_{br} w(t) \quad (2.3)$$

Bu rastgele vektörün dağılımı aşağıda gösterildiği üzere normaldir ve bu dağılımın ilk iki momenti zamanın yani elde tutma periyodunun süresinin lineer fonksiyonudur.

$$r \sim N\left((\mu_{br} - f \bar{1})t, \Sigma_{br} t\right) \triangleq N(\mu, \Sigma) \quad (2.4)$$

Portföy için kayıp fonksiyonu aşağıda gösterildiği üzere nonlineerdir. Buradaki eksi ifadesi kayıpların (kazançların) pozitif (negatif) olarak gösterilmesini sağlar ve a riskli varlıkların başlangıçtaki değerini gösteren vektördür.

$$L(r) = -\sum_{i=1}^n a_i (e^{r_i} - 1) \quad (2.5)$$

(2.5)'teki kayıp fonksiyonunun, orijin civarında 1. dereceden Taylor açılımı aşağıdaki gibidir. Bu lineerleştirilmiş kayıp için beklenen getiri - risk analizleri analitik olarak yapılabilir.

$$L(r) = -a^T r + O(\|r\|_2^2) \quad (2.6)$$

Geometrik Brownian Hareket, hisse senetleri fiyatları için makul bir modeldir. Çünkü burada hisse fiyatları negatif olamaz ve basit getirilerin marjinal dağılımı çoğu zaman ampirik verilerde olduğu gibi sağa çarpıktır. Ayrıca logaritmik getiriler toplanabilir ve portföyde sürekli olarak değişim yapılabiliriyorken her sonlu periyot için portföyün basit getirisinin dağılımı Merkezi Limit Teoremine göre lognormaldir (Levy, 2016).

2.2 Normal Dağılım

Bu alt bölüm Embrechts ve diğ. (2002), Frahm (2004) ve Johnson ve Wichern (2007) temel alınarak hazırlanmıştır.

Normal dağılım, ilk iki momenti tarafından tamamen belirlenir ve afin dönüşümlerde aşağıdaki yapıyı korur. Burada n risk faktörü (boyut) sayısıdır.

$$r \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow (b_{l \times 1} + B_{l \times n} r_{n \times 1}) \sim N(b + B\mu, B\Sigma B^T) \quad (2.7)$$

(2.7)'ye göre standart normal dağılım ile normal dağılım arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir. Burada 0 sıfır vektörüdür, I birim matristir ve $U := \sqrt{t}U_{br}$ olarak alınmıştır.

$$z \sim N(0, I) \Leftrightarrow r = \mu + Uz \sim N(\mu, UU^T) \quad (2.8)$$

Bununla birlikte aşağıdaki bilgi de geçerlidir. Burada K (L) kazancın (kaybın) rastgele değişkenidir. K'nın ilk momenti ortalama, ikinci momenti varyans olarak adlandırılır.

$$L(r) = -a^T r \Rightarrow K := -L \sim N(a^T \mu, a^T \Sigma a) \quad (2.9)$$

(2.7) ve (2.9)'a göre standartlaştırılmış kaybın rastgele değişkeni (Y) için aşağıdaki bilgi geçerlidir. Bu bilgi riskin analitik olarak hesaplanmasında sıklıkla kullanılır.

$$Y := \frac{L + a^T \mu}{(a^T \Sigma a)^{0.5}} \sim N(0, 1) \quad (2.10)$$

Yine (2.7)'ye göre aşağıdaki bilginin geçerli olduğu görülür. Buna göre r vektörü r_1 ve r_2 olarak iki ayrı parçaya ayrıldığında, bunların dağılımı normal kalır. Özel olarak her bir risk faktörünün marjinal dağılımı da normaldir.

$$r_1 := C_{k \times n} r \sim N(\mu_1, \Sigma_1) \quad (2.11)$$

$$r_2 := D_{(n-k) \times n} r \sim N(\mu_2, \Sigma_2)$$

Bu vektörler arasındaki kovaryans yapısını gösteren matris $\tilde{\Sigma}_{k \times n-k}$ olsun. Eğer $r_2 = r_2^+$ olduğu biliniyorsa r_1 'in koşullu dağılımı aşağıdaki gibidir.

$$r_1 \sim N\left(\mu_1 + \tilde{\Sigma}_{k \times n-k} \Sigma_2^{-1} (r_2^+ - \mu_2), \left[\Sigma_1 - \tilde{\Sigma}_{k \times n-k} \Sigma_2^{-1} (\tilde{\Sigma}_{k \times n-k})^T\right]\right) \quad (2.12)$$

R matrisinin i . satırı, i . varlığın sıralı logaritmik getirilerini gösterebilir. Buna göre (2.4)'teki parametrelerin yansız tahminleri aşağıdaki gibidir. Bunlar sırasıyla örneklem kovaryans matrisi ve örneklem ortalama vektörü olarak adlandırılır. Burada Z matrisi tam rank (değil) ise örneklem kovaryans matrisi pozitif (yarı) tanımlıdır.

$$R_{n \times m} = [r_{ij}] \text{ ve } Z_{n \times m} = \left[r_{ij} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_{ij} \right] \mapsto \hat{\Sigma} = t \frac{ZZ^T}{m-1} \quad (2.13)$$

$$\hat{\mu}_{br} = \left[\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_{ij} \right] \mapsto \hat{\mu} = t(\hat{\mu}_{br} - f\bar{1})$$

Bir rastgele vektörün dağılımı, tüm ortogonal koordinat dönüşümlerinden bağımsız ise bu dağılım küresel dağılımdır. Bunun afin koordinat dönüşümleri altındaki dağılımı ise eliptik dağılımdır. Buna göre normal dağılım ve t dağılımları, eliptik dağılımdır. Lineer korelasyon matrisi, sürekli eliptik dağılımların türü ile birlikte kopulayı tek olarak belirlediğinden bu dağılımlar için doğal tercihtir. Diğer dağılımlar için ise sıra korelasyonu matrisleri tercih edilebilir. Örneklem lineer korelasyon matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{A} = \left[\frac{\hat{\Sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\Sigma}_{ii} \hat{\Sigma}_{jj}}} \right] \quad (2.14)$$

Uyarı: (2.7) ve (2.11) arasında verilen bilgiler, tüm eliptik dağılımlar için geçerlidir. Ayrıca diğer eliptik dağılımlar için de ilk iki momentin koşullu momentleri (2.12)'deki gibidir. (2.12)'de eliptik dağılımın türü korunmasa bile dağılım eliptik kalır.

Bu tez çalışmasında; OV modelinin parametrelerinin sonlu oldukları ve kovaryans matrisin, örneklem kovaryans matrisine eşit olduğu varsayılmıştır. Bununla birlikte her bir risk faktörünün zaman serisi, normal dağılmış bağımsız rastgele değişkenlerden oluşsun. Buna göre aşağıdaki bilgi geçerlidir. Merkezi Limit Teoremine göre bu bilgi, diğer dağılımlar için asimptotik olarak geçerlidir.

$$m^{0.5}(\hat{\mu} - \mu) \sim N(0, \Sigma) \quad (2.15)$$

Güven düzeyi τ ile n serbestlik dereceli ki kare dağılımının τ kantili $\chi_{n,\tau}^2$ ile gösterilsin.

Ortalama vektörünün elipsoit güven bölgesi (2.15)'e göre aşağıdaki gibidir.

$$G_E = \left\{ \mu : (\mu - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \frac{\chi_{n,\tau}^2}{m} = \eta^2 \right\} \quad (2.16)$$

Bunun kutu tipi güven bölgesi ise (2.15)'e göre aşağıdaki gibidir. Burada z_c standart normal dağılımın c kantilidir ve $\hat{\sigma}$ örneklem standart sapma vektörüdür.

$$G_K = \left\{ \mu : |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq z_{(1+\tau)/2} \sqrt{\frac{\hat{\Sigma}_{ii}}{m}}, \forall i \right\} = \left\{ \mu : |\mu - \hat{\mu}| \leq \frac{z_{(1+\tau)/2}}{\sqrt{m}} \hat{\sigma} \right\} \quad (2.17)$$

2.3 Risk Ölçüleri

Bu alt bölümde Riske Maruz Değer (RMD) ve Koşullu Riske Maruz Değer (KRD) hakkındaki temel bilgiler Rockafellar ve Ursayev (2002) ve Pflug (2000) temel alınarak verilmiştir.

Elde tutma (modelleme) periyodunda riskin bir ölçüsü, T alınabilecek pozisyonların kümesi iken $R: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile tanımlanır ve bu fonksiyonun değeri arttıkça portföyün riski artar. Aşağıdaki şartları $\forall X, Y \in T$ için sağlayan risk ölçüsüne, tutarlı risk ölçüsü denir.

$$\text{monotonluk} : L_X(r) \leq L_Y(r), \forall r \in \mathbb{R}^n \Rightarrow R(X) \leq R(Y)$$

$$\text{öteleme değişmezliği} : R(X + d) = R(X), \forall d \in \mathbb{R}$$

$$\text{pozitif homojenlik} : R(bX) = bR(X), \forall b > 0$$

$$\text{alt toplamsallık} : R(X + Y) \leq R(X) + R(Y)$$

(2.18)

Buna göre tutarlı risk ölçüsü sırasıyla rasyonel yatırımcının tercihi, risksiz varlığın risksiz olduğu varsayımı, likit piyasa varsayımı ve çeşitlendirme ilkesiyle uyumludur.

Güven düzeyi c iken RMD aşağıdaki gibidir. Burada $c \in (0.5, 1)$ genelde 1'e yakın belirlenir ve $F(y)$, L 'nin dağılımının birikimli dağılım fonksiyonudur.

$$RMD_c := \inf \{ y : F(y) \geq c \} \quad (2.19)$$

Güven düzeyi c iken KRD_c aşağıdaki gibi tanımlanır ve tanımı gereği RMD_c 'den daha düşük olamaz. Bu nedenle sermayenin korunmasında daha etkindir.

$$\gamma = \left(\frac{F(RMD_c) - c}{1 - c} \right) \quad (2.20)$$

$$KRD_c := \gamma RMD_c + (1 - \gamma) E(L | L > RMD_c)$$

L sürekli rastgele değişken iken γ sıfırdır ve genel olarak aşağıdaki bilgi geçerlidir.

$$RMD_c = F^{-1}(c) \Rightarrow KRD_c = E(L | L > RMD_c) \quad (2.21)$$

RMD ve KRD öteleme değişmezliği ile monotonluk özelliklerine sahiptir. Ayrıca iyi tanımlanmış³ ve pozitif homojen risk ölçüsüdür. Buna karşın RMD alt toplamsal risk ölçüsü olmadığından tutarlı risk ölçüsü değildir. KRD ise RMD'nin aksine tutarlı risk ölçüsüdür ve kesin konveks fonksiyon olduğundan minimize edilmeye uygundur.

Uyarı: Bu alt bölümün kalanında r 'nin dağılımının normal olduğu varsayılmıştır. Eliptik dağılım varsayımı altında da benzer bilgiler elde edilebilir.

(2.10)'a göre, lineerleştirilmiş kayıp kullanıldığında RMD_c aşağıdaki gibi bulunur. Burada risk çarpanı (z_c) pozitif olduğundan RMD_c tutarlı risk ölçüsüdür ve kesin konveks fonksiyon olduğundan minimize edilmeye de uygundur.

$$RMD_c = -a^T \mu + z_c (a^T \Sigma a)^{0.5} \quad (2.22)$$

Benzer şekilde lineerleştirilmiş kayıp kullanıldığında KRD_c aşağıdaki gibi bulunur. Buradaki risk çarpanı $\forall c \in [0,1)$ için nonnegatiftir (Landsman ve Valdez, 2003).

$$KRD_c = -a^T \mu + \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} z_c^2\right)}{\sqrt{2\pi(1-c)}} (a^T \Sigma a)^{0.5} \quad (2.23)$$

Portföyün beklenen getirisi ve riski için yaklaşık değerler Monte Carlo Simülasyonu ile de bulunabilir. Burada (cM tamsayı olmak üzere) üretilen M adet eşit olasılıklı senaryonun her biri için aşağıdaki adımlar izlenir.

- Dağılımı standart normal olan z rastgele vektörü üretilir.

³ L'nin aynı dağılımı için aynı sonucu veren risk ölçülerine denir.

- (2.8)'deki bilgi kullanılarak r elde edilir.
- Portföyün kayıp fonksiyonu ile buna karşı gelen kayıp bulunur.

Algoritma aşağıdaki gibi sonlandırılır.

- Bu kayıplar küçükten büyüğe sıralanır ve sırasıyla u vektörüne atanır.
- Bunların aritmetik ortalaması -1 ile çarpılır ve beklenen getiri bulunur.
- RMD_c aşağıdaki gibi bulunur.

$$RMD_c = u(cM) \quad (2.24)$$

- KRD_c aşağıdaki gibi bulunur.

$$KRD_c = \frac{1}{M(1-c)} \sum_{i=cM+1}^M u(i) \quad (2.25)$$

2.4 Stres Testleri

Uç ama olası kayıplara neden olabilecek durumları tanımlama ve yönetme sürecinde kullanılan teknikler bütünü olan stres testleri, risk modellerinin tamamlayıcısı olarak risk yönetiminde kullanılabilir (Jorion, 2007). Stres testleri için iki temel yaklaşım vardır (Berkowitz, 2000; Jorion, 2007). İlk yaklaşımda, r 'nin dağılımı sabit iken uç kayıplara neden olabilecek senaryolar oluşturulur. Senaryo analizinde, anahtar risk faktörlerine şoklar verilir ve diğer risk faktörlerinin değerleri (2.12)'deki bilgi temel alınarak belirlenir (Breuer ve diğ, 2009). İkinci yaklaşımda; verilen şoklar altında r 'nin dağılımındaki muhtemel değişimler belirlenir ve bu bilgi doğrultusunda beklenen getiri - risk analizleri yapılır (Jorion, 2007). Bu konuda sistematik bir yöntem Breuer ve Csiszar (2013)'te verilmiştir. İlk yaklaşım ise normal dağılım varsayımı altında aşağıdaki gibi tanımlanan Maksimum Kayıp (MK) ile sistematik hale getirilir. MK_c tutarlı risk ölçüsüdür ve sürekli kayıp fonksiyonları için RMD_c 'den küçük olamaz. Bu nedenle sermayenin korunmasında daha etkindir. Burada akla yatkın senaryolar kümesi üzerinde maksimum kayıp aranır. Bu küme n boyutta elipsoittir, konvektir ve kompaktır (Studer, 1997). Diğer eliptik dağılımlar için MK 'nin tanımında ise sadece (2.26)'daki h değeri değişir (Breuer ve diğ, 2009).

$$r \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow MK_c := \sup \left\{ L(r) : (r - \mu)^T \Sigma^{-1} (r - \mu) \leq \chi_{n,c}^2 = h^2 \right\} \quad (2.26)$$

Lineerleştirilmiş kayıp kullanıldığında MK_c ve buna neden olan senaryo aşağıdaki gibi bulunur (Studer, 1997). Nonlineer kayıp fonksiyonları için bunlar (Yarı) Monte Carlo Simülasyonu ile bulunabilir (Pistovcak ve Breuer, 2004).

$$r^* = \mu - (\chi_{n,c}^2)^{0.5} \frac{\Sigma a}{(a^T \Sigma a)^{0.5}} \quad (2.27)$$

$$MK_c = -a^T r^* = -a^T \mu + (\chi_{n,c}^2 a^T \Sigma a)^{0.5}$$

Lineerleştirilmiş kayıp kullanılsın ve r 'nin dağılımı normal olsun. (2.22), (2.23) ve (2.27)'de görüldüğü üzere RMD_c , KRD_c ve MK_c (2.28)'teki risk çarpanı (k) dışında özdeştir. Bu durum diğer eliptik dağılımlar için de geçerlidir. Burada k sadece güven düzeyine ve eliptik dağılımın türüne bağlıdır. Eliptik dağılım varsayımı altında risk çarpanı, KRD ve MK için güven düzeyinden bağımsız olarak nonnegatiftir. Bu durum RMD için güven düzeyi 0.5'ten küçük değil iken geçerlidir (Breuer, 2006).

$$r^{**} = \mu - k \frac{\Sigma a}{(a^T \Sigma a)^{0.5}} \quad (2.28)$$

$$R(a) = -a^T r^{**} = -a^T \mu + k (a^T \Sigma a)^{0.5}$$

MK 'ya katkı vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır. Bu vektörün elemanları toplamı 1'dir ve MK 'ya neden olan senaryo ile birlikte risk azaltmada kullanılabilir (Breuer, 2006; Breuer ve diğ, 2009). Burada D operatörü, kare matrisin köşegensel elamanlarını aynı sırada alarak sütun vektörü oluşturur.

$$v^* = \frac{D(r^* a^T)}{a^T r^*} \quad (2.29)$$

Uyarı: RMD veya KRD için $-r^{**}$ marjinal risk vektörüne, $D(-r^{**} a^T)$ ise bileşen riski vektörüne karşı gelir (Jorion, 2007).

Boyuta bağlılık sorunu nedeniyle MK_c iyi tanımlanmış risk ölçüsü değildir (Breuer, 2008). Öte yandan stres senaryoları akla yatkın olmalı, uç kayıpları ortaya çıkarmalı

ve riski azaltmada kullanılabilirdir. MK_c tanımı gereği bu özelliklere sahiptir ve bu nedenle geleneksel senaryo analizlerine tercih edilebilir (Breuer ve diğ. 2009).

2.5 Stokastik Baskınlık

Bu alt bölümde stokastik baskınlık kuralları ile ilgili önemli bilgiler Levy (2016) ve Kopa (2013) temel alınarak verilmiştir. X portföyünün Y portföyüne birinci dereceden stokastik baskın (SB_1) olması aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$X SB_1 Y \Leftrightarrow RMD_c(X) \leq RMD_c(Y), \forall c \in (0,1] \quad (2.30)$$

İkinci dereceden stokastik baskınlık (SB_2) aşağıdaki gibi tanımlanır. Her iki kural da eşit veya daha yüksek beklenen getiriyi garanti eder ve (ilgili risk ölçüleri pozitif homojen olduğundan) portföyün toplam değerinden bağımsızdır.

$$X SB_2 Y \Leftrightarrow KRD_c(X) \leq KRD_c(Y), \forall c \in [0,1] \quad (2.31)$$

SB_2 kuralı (2.28)'e göre aşağıdaki gibidir. Buna göre SB_2 etkin sınırı ile Bölüm 2.6'da verilen OV modelinin etkin sınırı, eliptik dağılımın desteği normal dağılım gibi sınırsız iken özdeştir.

$$\begin{aligned} X SB_2 Y &\Leftrightarrow -a_X^T \mu + k(a_X^T \Sigma a_X)^{0.5} \leq -a_Y^T \mu + k(a_Y^T \Sigma a_Y)^{0.5}, \forall k \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a_X^T \mu \geq a_Y^T \mu) \wedge (a_X^T \Sigma a_X \leq a_Y^T \Sigma a_Y) \end{aligned} \quad (2.32)$$

SB_1 ile beklenen fayda maksimizasyonu arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir. Burada U_1 tüm azalmayan fayda fonksiyonlarının kümesidir. Buna göre bu kural, tüm rasyonel yatırımcıların tercihini yansıtır.

$$X SB_1 Y \Leftrightarrow E(u_1(K_X)) \geq E(u_1(K_Y)), \forall u_1 \in U_1 \quad (2.33)$$

SB_2 ile beklenen fayda maksimizasyonu arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir. Burada U_2 tüm azalmayan, konkav fayda fonksiyonlarının kümesidir. Buna göre bu kural, riskten kaçan yatırımcıların tercihini yansıtır ve SB_1 kuralı için yeter şarttır.

$$X SB_2 Y \Leftrightarrow E(u_2(X)) \geq E(u_2(Y)), \forall u_2 \in U_2 \quad (2.34)$$

SB_1 ve SB_2 kuralları kısmi sıralama yapar. Öte yandan bu kurallar ile portföyler, iki gruba ayrılabilir. Birinci grupta herhangi bir portföy tarafından tek taraflı bir şekilde baskın olunmayan portföyler yer alır. Diğer grupta ise en az bir portföy tarafından tek taraflı şekilde baskın olunan portföyler yer alır. Herhangi bir (riskten kaçan) rasyonel yatırımcının ilk (ikinci) kurala göre ilk gruptaki portföylerden birini seçmesi beklenir.

2.6 Ortalama – Varyans Modeli: Geleneksel Yaklaşım

Portföyün başlangıçtaki değeri genelliği kaybetmeden 1'e eşit alınsın. Bunun ağırlık vektörü w ile konveks ve kapalı olan uygun çözüm kümesi S ile gösterilsin. Buna göre OV modeli, aşağıdaki çok amaçlı konkav maksimizasyon problemiyle tanımlanabilir (Markowitz, 1952; Steuer ve diğ, 2006).

$$\sup \left\{ (w^T \mu) \wedge (-w^T \Sigma w) : w \in S \right\} \quad (2.35)$$

Çok amaçlı konkav maksimizasyon problemleri için ağırlık amaç metodu, etkin sınırı tam olarak verir (Deb, 2001). Buna göre (2.35) ve (2.36)'nın etkin sınırları özdeştir. Çünkü burada nonnegatif riskten kaçınma katsayısı (λ), ilk amaç olan beklenen getiriyi (ortalamay) artırmak ile ikinci amaç olan riski (varyansı) azaltmaya bir ağırlık atar. Örneğin, λ sıfır iken yalnızca ilk amaç, λ sonsuza giderken yalnızca ikinci amaç dikkate alınır.

$$\sup \left\{ w^T \mu - 0.5\lambda (w^T \Sigma w) : w \in S \right\} \quad (2.36)$$

Standart sapmayı minimize etmek ile varyansı minimize etmek eşdeğer problemlerdir. Bu nedenle OV modeli aşağıdaki şekilde de verilebilir. Burada $\beta \in [0,1]$ normalize edilmiş riskten kaçınma katsayısı olarak düşünülebilir.

$$\sup \left\{ \beta w^T \mu + (1-\beta) \left(- (w^T \Sigma w)^{0.5} \right) : w \in S \right\} \quad (2.37)$$

Uyarı: Herhangi bir $\lambda \geq 0$ için (2.36)'nın tek optimal çözümü OV etkin portföydür. Varyans (standart sapma) – ortalama düzleminde etkin portföyler birlikte etkin sınırı verir.

Varsayımlar: Bu tez çalışmasında aşağıdaki bilgilerin geçerli olduğu varsayılmıştır.

- Aksi belirtilmediği sürece portföyde kısa pozisyon bulunabilir. (Kısa pozisyon alma yani açığa satış ile ilgili temel bilgiler Bölüm 2.10’da verilmiştir.)
- Belirtilen durumlarda risksiz varlık (n+1). varlık olarak portföyde bulunabilir. Riskli varlıkların ve risksiz varlığın ağırlıkları toplamı ise yine 1’dir.

Uyarı: Bu tez çalışmasında banka veya diğer finansal kurumdan kaynaklanabilir riskler (bkz. Morrison ve Pyle, 1978) ihmal edilmiştir.

Sharpe oranı (SO), birim standart sapma başına beklenen (gerçekleşmiş) getiri olarak tanımlanır. Bu oran, OV modelinde yaygın kullanılan bir performans ölçüsüdür. Uzun veya kısa pozisyonu bunu maksimum yapan portföy (piyasa portföyü, PP) ve varyansı minimum yapan portföy (MV) aşağıdaki gibi bulunur (Okhrin ve Schmid, 2006).

$$\bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu \neq 0 \Rightarrow PP = \frac{\Sigma^{-1} \mu}{\bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu} \quad (2.38)$$

$$MV = \frac{\Sigma^{-1} \bar{1}}{\bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1}}$$

λ pozitif olsun. Portföyde risksiz varlık bulunabiliyorken (2.36)’nın optimal çözümü aşağıdaki gibidir (Okhrin ve Schmid, 2006). Görüldüğü üzere etkin portföylerin riskli varlık yapısı PP ile özdeşdir. Buna göre etkin sınır, risksiz varlık ile PP’nin lineer kombinasyonları ile elde edilir. Literatürde buna Tek Fon Teoremi denir.

$$w^*(\lambda) = \frac{\Sigma^{-1} \mu}{\lambda} = \left(\frac{\bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu}{\lambda} \right) PP \quad (2.39)$$

Portföyde risksiz varlık bulunamasın. Buna göre (2.36)’nın optimal çözümü aşağıdaki gibidir (Garlappi ve diğ, 2006). Yani etkin sınır, MV ile PP’nin lineer kombinasyonları ile elde edilebilir. Literatürde buna İki Fon Teoremi denir. Kısa pozisyon sınırı varken bu teorem geçerli değildir. Ama belirli algoritmalar yardımıyla etkin sınır tam olarak elde edilebilir (Steuer ve diğ, 2006).

$$w^*(\lambda) = \frac{\bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu}{\lambda} PP + \left(1 - \frac{\bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu}{\lambda} \right) MV \quad (2.40)$$

Geleneksel yaklaşımda; OV modelinin parametreleri, (2.13)’teki yansız tahmincilerine eşit alınır. Risk faktörlerinin dağılımı çok değişkenli normal olsun ve risk faktörlerinin

zaman serileri aynı dağılmış bağımsız rastgele değişkenlerden oluşsun. O zaman örneklem kovaryans matrisi ve örneklem ortalama vektörünün dağılımlarına bağlı olarak MV ile PP'nin dağılımları da analiz edilebilir. Buna göre PP'nin yansız tahmincisi bulunamaz. Bu durum teorik önemine karşın pratikte PP için önemli bir sorundur. Öte yandan geleneksel yaklaşımda, MV'nin tahmincisi yansızdır (Okhrin ve Schmid, 2006).

OV modeli, beklenen fayda maksimizasyonu ile yalnızca fayda fonksiyonu kuadratik iken ya da tüm riskten kaçan yatırımcılar için r 'nin dağılımı eliptik iken uyumludur (Eichner ve Waganer, 2005). Çünkü eliptik dağılım varsayımı altında üst momentler ayırıcı bilgi taşımaz (Embrechts ve diğ, 2002). Öte yandan bu bilginin ampirik olarak geçerli olmadığı ve üst momentlerin de ayırıcı bilgi taşıdığı iddia edilmektedir (Duran ve Bommarito, 2011; Chicheportiche ve diğ, 2012; Bhattacharyya ve diğ, 2011). Bu nedenle ilk iki momente ek olarak daha üst momentler de portföy seçimi problemine entegre edilebilir. Öte yandan bunların güvenilir tahmincilerini bulmak oldukça zordur (Kim ve diğ, 2014). Aslında bu sorun özellikle ilk moment için de geçerlidir (De Miguel ve diğ, 2009; Garlappi ve diğ, 2006).

2.7 Ortalama – Varyans Modeli: Bayesyen Yaklaşım

Bu alt bölümde Bayes istatistiğe dayanan bir yaklaşım Jorion (1986) ve Garlappi ve diğ. (2006) temel alınarak verilmiştir. Bu yaklaşımda örneklem ortalama vektörü, önceden belirlenmiş ortak bir değere yaklaştırılır ve tahmin hatasının etkisi azaltılır. Bu ortak değer bu tez çalışmasında olduğu gibi genellikle MV'nin ortalaması olarak alınır. Kovaryans matris, yansız tahmincisine eşit olsun. Her bir risk faktörünün zaman serisi aynı (normal) dağılmış bağımsız rastgele değişkenlerden oluşsun. Buna göre ortalama vektörünün Bayes-Stein tahmincisi aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{BS} = (1 - \phi_{BS}) \hat{\mu} + \phi_{BS} \mu_{MV} \bar{1} = (1 - \phi_{BS}) \hat{\mu} + \phi_{BS} \left(\frac{\hat{\mu}^T \hat{\Sigma}^{-1} \bar{1}}{\bar{1}^T \hat{\Sigma}^{-1} \bar{1}} \right) \bar{1} \quad (2.41)$$

Burada yaklaştırma faktörü $\phi_{BS} \in (0, 1]$ aşağıdaki gibidir.

$$\phi_{BS} = \frac{n + 2}{(n + 2) + m \left((\hat{\mu} - \mu_{MV} \bar{1})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\mu} - \mu_{MV} \bar{1}) \right)} \quad (2.42)$$

Ortalama vektörü (2.41)'deki gibi olsun. Portföyde risksiz varlık bulunabiliyorken OV etkin portföy (2.39)'a göre aşağıdaki gibi bulunur.

$$w_{BS}^*(\lambda) = \frac{\widehat{\Sigma}^{-1} \left[(1 - \phi_{BS}) \widehat{\mu} + \phi_{BS} \left(\frac{\widehat{\mu}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \bar{1}}{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \bar{1}} \right) \bar{1} \right]}{\lambda} \quad (2.43)$$

$$= \left(\frac{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \widehat{\mu}}{\lambda} \right) \left[(1 - \phi_{BS}) \left(\frac{\widehat{\Sigma}^{-1} \widehat{\mu}}{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \widehat{\mu}} \right) + \phi_{BS} \frac{\widehat{\Sigma}^{-1} \bar{1}}{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \bar{1}} \right]$$

Tek Fon Teoremine ve (2.43)'e göre bu yaklaşımdaki piyasa portföyü (PP_{BS}) aşağıdaki gibidir. Buna göre PP_{BS} , MV ile PP 'nin bir konveks kombinasyonudur.

$$PP_{BS} = \phi_{BS} MV + (1 - \phi_{BS}) PP \quad (2.44)$$

Portföyde risksiz varlık bulunamadığında ise İki Fon Teoremi geçerlidir. Buna göre etkin portföy aşağıdaki gibi bulunur. Görüldüğü üzere geleneksel yaklaşımdaki ve Bayesyen yaklaşımdaki etkin sınırlar özdeştir. İki yaklaşımın sonuçları arasındaki tek fark ise aynı λ için bulunan etkin portföyün, Bayesyen yaklaşımda MV 'ye daha yakın olmasıdır.

$$w_{BS}^*(\lambda) = \frac{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \mu_{BS}}{\lambda} PP_{BS} + \left(1 - \frac{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \mu_{BS}}{\lambda} \right) MV$$

$$= \frac{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \mu_{BS}}{\lambda} (\phi_{BS} MV + (1 - \phi_{BS}) PP) + \left(1 - \frac{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \mu_{BS}}{\lambda} \right) MV \quad (2.45)$$

$$= (1 - \phi_{BS}) \left(\frac{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \mu_{BS}}{\lambda} \right) PP + \left(1 - (1 - \phi_{BS}) \left(\frac{\bar{1}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \mu_{BS}}{\lambda} \right) \right) MV$$

2.8 Dayanıklı Ortalama – Varyans Modelleri

Bayesyen yaklaşım tahmin hatasının etkisini azaltmaya odaklanır. Öte yandan tahmin hatası sıfırlanamaz. Ayrıca r 'nin dağılımı kesin olarak bilinse bile muhtemel piyasa şokları bunu değiştirebilir (Berkowitz, 2000). Bu durumu dikkate alan literatürdeki dayanıklı OV modellerinde, ortalama vektörü için (2.16)'daki elipsoit güven bölgesi veya (2.17)'deki kutu tipi güven bölgesi kullanılabilir (Garlappi ve diğ, 2006).

Elipsoit güven bölgesi kullanılsın ve portföyde risksiz varlık bulunabilsin. (2.27)'deki bilgi doğrultusunda dayanıklı piyasa portföyü (PP_D) aşağıdaki gibi formüle edilir. Eğer PP 'nin uzun veya kısa pozisyonu için Sharpe oranı η 'den büyük ise PP_D vardır ve PP 'ye eşittir. Bu durumda dayanıklı OV etkin sınırı, PP_D ile risksiz varlığın lineer kombinasyonları ile oluşturulur. Başka bir deyişle Tek Fon Teoremi geçerlidir. Aksi halde buradaki etkin sınır yalnızca risksiz varlıktan oluşur (Garlappi ve diğ., 2006).

$$\begin{aligned} PP_D &:= \arg \sup_{|w^T \bar{1}|=1} \inf_{\mu \in G_E} \frac{w^T \mu}{(w^T \hat{\Sigma} w)^{0.5}} \\ &= \arg \sup_{|w^T \bar{1}|=1} \frac{w^T \hat{\mu} - \eta (w^T \hat{\Sigma} w)^{0.5}}{(w^T \hat{\Sigma} w)^{0.5}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Portföyde risksiz varlık bulunamasın. (2.37)'deki bilgi doğrultusunda dayanıklı OV modeli aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Buna göre OV etkin sınırı ile dayanıklı OV etkin sınırı özdeştir. İki modelin sonuçları arasındaki tek fark ise aynı λ veya β için bulunan etkin portföyün, dayanıklı OV modelinde MV'ye daha yakın olmasıdır (Garlappi ve diğ., 2006; Shigeta, 2017). (2.46) ve (2.47) birlikte değerlendirilsin. Buna göre güven bölgesi elipsoit iken elde edilen etkin sınır, OV etkin sınırının alt kümesidir.

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \beta \left(w^T \hat{\mu} - \eta (w^T \hat{\Sigma} w)^{0.5} \right) + (1 - \beta) \left(- (w^T \hat{\Sigma} w)^{0.5} \right) : w^T \bar{1} = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \beta w^T \hat{\mu} + (1 - \beta + \beta \eta) \left(- (w^T \hat{\Sigma} w)^{0.5} \right) : w^T \bar{1} = 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ortalama vektörü için kutu tipi güven bölgesi kullanıldığında, dayanıklı OV modeli aşağıdaki supremum - infimum problemiyle verilir.

$$\sup_{|w^T \bar{1}|=1} \inf_{\mu \in G_K} w^T \mu - 0.5 \lambda (w^T \hat{\Sigma} w) \quad (2.48)$$

(2.48) aşağıdaki düzgün olmayan, kesin konkav maksimizasyon problemi ile özdeştir. Bu problemin tek optimal çözümü ise nümerik olarak veya Garlappi ve diğ. (2006)'nın Önerme 3'ünde verilen denklem sistemi kullanılarak bulunabilir.

$$\sup \left\{ w^T \hat{\mu} - |w|^T \left(\frac{z_{(1+\tau)/2}}{\sqrt{m}} \hat{\sigma} \right) - 0.5 \lambda (w^T \hat{\Sigma} w) : w^T \bar{1} = 1 \right\} \quad (2.49)$$

Burada herhangi bir portföyün ortalaması aralık değerli olduğundan, bunun Sharpe oranı da aralık değerlidir. Sharpe oranının alt sınırı, dayanıklı Sharpe oranı olarak adlandırılabilir. Bunu maksimum yapan portföy (MS_D), aşağıdaki gibi formüle edilir. PP_D 'nin dayanıklı Sharpe oranı pozitif ise PP_D ile MS_D özdeşdir.

$$MS_D := \arg \sup_{w^T \mathbf{1}=1} \inf_{\mu \in G_k} \frac{w^T \mu}{(w^T \hat{\Sigma} w)^{0.5}} \quad (2.50)$$

(2.50) konkav maksimizasyon problemi olmadığından MS_D 'nin doğrudan bulunması kolay değildir. Öte yandan aşağıdaki kesin konveks minimizasyon probleminin tek optimal çözümü normalize edildiğinde yani elemanları toplamına bölüldüğünde MS_D elde edilir (Goldfarb ve İyengar, 2003; Tütüncü ve Koenig, 2004). Özel olarak güven düzeyi (τ) sıfır iken Sharpe oranını maksimum yapan portföy (MS) bulunur.

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T \hat{\Sigma} w \\ \text{s.t.} \quad & w^T \hat{\mu} - |w|^T \left(\frac{z_{(1+\tau)/2}}{\sqrt{m}} \hat{\sigma} \right) \geq 1 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Uyarı: Aynı dağılmış bağımsız rasgele değişkenler varsayımı altında OV modelinin parametreleri, t 'nin lineer fonksiyonudur. Buna göre bu modelin sonuçları zamandan bağımsızdır. Öte yandan bu durum güven düzeyi sabit iken dayanıklı OV modellerinin sonuçları için geçerli değildir. Bu tez çalışmasında varsayıldığı üzere güven düzeyi t 'nin bir kesin artan fonksiyonu olsun öyle ki (2.16) ve (2.17) t 'nin lineer fonksiyonu olsun. O zaman incelenen dayanıklı OV modellerinin sonuçları zamandan bağımsızdır.

2.9 Olabilirlik Teorisine Dayanan Temel Modeller

Olabilirlik Teorisinin, portföy seçiminde ilk defa kullanıldığı çalışmalar Tanaka ve diğ. (1995), Tanaka ve Guo (1999) ve Tanaka ve diğ. (2000)'dir. Tanaka ve diğ. (2000)'de portföy seçimi problemi, aşağıdaki adımlar izlenerek oluşturulmuştur.

- Eldeki veri seti üzerinde Temel Bileşenler Analizi kullanılarak varlık getiri vektörü için eksponansiyel olabilirlik dağılımı elde edilmiştir.
- Portföy getirisinin olabilirlik dağılımının bir eksponansiyel olabilirlik dağılımı olduğu Zadeh'in genişletme prensibi kullanılarak gösterilmiştir.

- Ekspansiyel olabilirlik dağılımları, normal dağılımla benzerlik gösterir. Bu nedenle bu olabilirlik dağılımının verilen merkezi değeri için bu olabilirlik dağılımının yayılmasını minimum yapacak şekilde, OV modeline benzer bir konveks kuadratik minimizasyon problemi oluşturulmuştur.

Tanaka ve Guo (1999)'da alt ve üst ekspansiyel olabilirlik dağılımları, farklı portföy seçimi modellerinde kullanılmıştır. Burada aynı merkezi değer için portföyün üst olabilirlik dağılımının yayılmasının, alt olabilirlik dağılımının yayılmasından yüksek olduğu gösterilmiştir. Buna göre üst (alt) olabilirlik dağılımının kullanıldığı model, kötümser (iyimser) yatırımcılar için daha uygundur.

Carlsson ve diğ. (2002)'de olabilirlik ortalaması ve varyansı tanımları kullanılarak, OV modelinin Olabilirlik Teorisindeki karşılığı oluşturulmuştur. Bu çalışmada bu yaklaşım eski olabilirlik OV modeli olarak adlandırılmıştır ve Bölüm 3'te ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Zhang (2007)'de bu modelin iyimser ve kötümser yatırımcılar için iki varyantı verilmiştir. Bunlar portföyde kısa pozisyon bulunabildiğinde eski olabilirlik OV modeli gibi kullanışlı değildir.

Li ve diğ. (2015)'te olabilirlik ortalaması ve varyansı için literatürdeki tanımlarla ilişkili olan yeni tanımlar yapılmıştır. Ayrıca olabilirlik çarpıklığı da portföy seçimi problemine entegre edilmiştir. Aslında son dönemdeki çalışmalarda genellikle bu tez çalışmasının kapsamı dışında olan çok periyotlu durum, daha yüksek momentler vb konular ele alınmıştır (Zhang ve diğ, 2018). Corazza ve Nardelli (2019)'da ise OV modeli ile eski olabilirlik OV modeli ve bunun varyantları teorik ve ampirik olarak karşılaştırılmıştır. Buna göre OV modeli, bu modellere göre teorik olarak daha sağlam temele sahiptir. Örneğin bu modeller, kısa pozisyon sınırı yokken kullanılmaya elverişli değildir. Ayrıca OV modeli, eski olabilirlik OV modeli ile benzer sonuçlar verse de bunun varyantlarından daha iyi sonuçlar vermiştir.

2.10 Açığa Satış

Kısa pozisyon alma yani açığa satış çok riskli bir işlemdir. Hatta, çok fazla yatırımcının kısa pozisyonda yakalanması veya yatırımlarının yarıda kalmasıyla aşırı tepki (overreaction) ve hisse fiyatlarındaki günlük sert dalgalanmalar oluşmaktadır (bkz. Duran ve Caginalp, 2007). Ayrıca açığa satışın çok riskli bir işlem olmasına

karşın, yükselen piyasada bile karlı olması beklenen açığa satış stratejileri düşünener de olmuştur (Asness, 2004).

Teorik olarak genellikle açığa satışın serbest olduğu varsayılır. Buna göre değerinin üstünde işlem gören ama portföyde hali hazırda mevcut olmayan varlıklar açığa satılabilir ve buradan elde edilen nakit ile değerinin altında işlem gören varlıklar satın alınabilir. Bu mekanizmanın sonucu olarak portföyde alınan pozisyonların (işaretten bağımsız olarak) toplam değeri herhangi bir sınır olmaksızın artırılabilir. Buna karşın pratikte açığa satışla ilgili teorik varsayımlarla örtüşmeyen durumlar vardır. Örnek olarak, sınırsız miktarda açığa satış pratikte mümkün değildir. Açığa satışta hisseler ödünç alınır ve bunun da bir maliyeti vardır (bkz. Duran, 2006; Duran ve Caginalp, 2007).

Açığa satış, ülkemizdeki Sermaye Piyasası Kurulu (SPK) gibi düzenleyici kurumlar tarafından tamamen veya kısmen sınırlandırılabilir. Bu sınırlamalar bazı veya tüm piyasa oyuncularını için bazı veya tüm varlıklarda geçerli olabilir. Örneğin, ülkemizde de emeklilik fonlarının tüm açığa satış işlemlerinde katı sınırlamalar mevcuttur. SPK haftalık bültenlerine ve Kamuoyunu Aydınlatma Platformundaki (KAP) duyurularına göre, bu tez çalışmasındaki uygulamaları etkileyen genel bir sınırlama yoktur. Yani BIST 30 holding hisseleri için 2016 ve 2017 yıllarında genel bir sınırlama söz konusu değildir. Öte yandan 2017 yılında üç bireysel yatırımcının, üç ay süreyle bir BIST 30 holding hissesinde açığa satış yapması yasaklanmıştır. Genel sınırlamalarla ilgili yakın tarihten bir örnek, BIST 30 bankacılık hisselerinde açığa satış yapılmasının tüm piyasa oyuncularını için 16 Ekim 2019 tarihinden günümüze kadar yasaklanmasıdır.



3. ESKİ OLABİLİRLİK ORTALAMA – VARYANS MODELİ

Teorik önemine karşın Markowitz'in OV modeli pratikte pek tercih edilmez. Alternatif olarak kullanılan dayanıklı OV modellerinin ve Bayesyen yaklaşımın önemli sorunları vardır. Bölüm 5'te de açıklandığı üzere kutu tipi güven bölgesi yalnızca lineer olarak ilişkili olmayan değişkenler için uygundur. Bayesyen yaklaşımda veya elipsoit güven bölgesi kullanıldığında ise genellikle geleneksel yaklaşımdaki OV modeli ile benzer sonuçlar elde edilir. Ayrıca bu modeller, önemli bilgi taşıyabilen daha üst momentleri ihmal ederler (Duran ve Bommarito, 2011; Bhattacharyya ve diğ, 2011). Bununla birlikte dayanıklı OV modelleri genellikle tutucu olmayan yatırımcılar için uygun değildir (Tütüncü ve Koenig, 2004; Huang ve diğ, 2010).

Olabilirlik Teorisi kesin olmayan mücadelede önemli bir araçtır. Carlsson ve diğ. (2002)'de tanıtılan eski olabilirlik OV modeli, bu modellerin aksine Olasılık Teorisi yerine Olabilirlik Teorisine dayanır ve veri setindeki çarpıklığı dikkate alır. Ayrıca Bayesyen yaklaşım gibi kişisel yargıların ve beklentilerin portföy seçimi problemine entegre edilebilmesine imkan verir (Carlsson ve diğ, 2002; Taş ve diğ, 2016). Risk faktörlerinin marjinal olabilirlik dağılımları, dört parametre ile tanımlanan yamuk bulanık sayılarla verilsin. O zaman bu model, Sıralı Minimal Optimizasyon (SMO) algoritması ile etkili bir şekilde çözülebilir (Zhang ve diğ, 2009). Bunlar üç parametre ile tanımlanan üçgensel bulanık sayılarla verilsin. O zaman bu model, bir lineer programlama problemine indirgenir ve Simpleks algoritma ile kolayca çözülür (Taş ve diğ, 2016). Buradaki üç parametre ilgili varlığın elde tutma periyodundaki getiri öngörüsü için sırasıyla en kötü duruma, temel duruma ve en iyi duruma karşı gelmektedir. Ayrıca bu model, en kötü durum odaklı olmadığından tutucu olmayan yatırımcılar için de uygundur. Bu nedenlerden ötürü bu model, belirsizlik altında portföy seçiminde dikkate değer bir alternatif olarak görülebilir.

Teorideki ve pratikteki önemine karşın, marjinal olabilirlik dağılımlarının üçgensel bulanık sayılar ile verildiği varsayımı altında bu modelin matematiksel analizi bildiğimiz kadarıyla yapılmamıştır. Literatürdeki bu boşluğu doldurabilmek amacıyla öncelikle Bölüm 3.1'de Olabilirlik Teorisindeki temel kavramlar verilmiştir. Daha

sonra Bölüm 3.2’de bu model, bu varsayım altında teorik olarak incelenmiştir. Bu kapsamda faydayı ya da performansı maksimum yapan portföyler analitik olarak elde edilmiştir. Bununla birlikte Bölüm 3.3’te farklı etkin sınır yapıları örnekler ile açıklanmıştır.

3.1 Olabilirlik Teorisinde Temel Kavramlar

Olabilirlik Teorisinde olabilirlik, klasik yaklaşımda limit durumdaki frekanslar ile tanımlanan olasılığın yerini alır. Olabilirlik kavramı, olayların meydana gelme eğilimi ile ilgili olan akla uygunluğu işaret eder. Bu teoride, olasılık ölçüsünden farklı olarak “self-dual” olmayan iki farklı ölçü kullanılır. Burada olabilirlik (gereklilik) ölçüsü bir olayın akla uygunluğunu (kesinliğini) temsil eder (Dubois, 2006). Bu ölçüler marjinal olabilirlik dağılımları kullanılarak tanımlanmaktadır. Bu dağılımlar ise geçmiş veriler veya kişisel yargılar ve beklentiler doğrultusunda belirlenebilir ve bu tez çalışmasında olduğu gibi genellikle bulanık sayılarla verilir. Bu nedenlerden ötürü bu bölümde, bulanık sayılar ve Olabilirlik Teorisi hakkındaki temel kavramlar Carlsson ve diğ. (2005), Kosinski (2006), Zimmermann (2001), Klir ve Yuan (1995)’ten yararlanılarak kısaca verilmiştir.

Bulanık kümeler, “crisp” kümelerin genelleştirilmiş halidir. Bilindiği üzere “crisp” kümelerde evrensel kümenin bir elemanı, herhangi bir kümenin ya elemanıdır ya da elemanı değildir. Bulanık kümelerde ise elemanı olup olmama durumu için bir üyelik derecesi atanır. Bu üyelik derecesi 0 ile 1 arasındadır. Bunun 1 ve 0 olması sırasıyla “crisp” durumdaki elemanı olmaya ve olmamaya karşı gelir. Ayrıca üyelik derecesi arttıkça (azaldıkça) “crisp” durumdaki elemanı olma (olmama) durumuna yaklaşılar.

Bulanık kümelerin özel hali olan bulanık sayılar farklı ihtiyaçlar doğrultusunda farklı şekilde tanımlanabilir. Bu tez çalışmasında aşağıdaki tanım kullanılacaktır.

Tanım 3.1: \bar{Y} üyelik fonksiyonu $\nu(y)$ olan bulanık küme olsun. Bunun α -kesmesi, K_p kapanış operatörü olmak üzere aşağıdaki gibidir. Q ise \bar{Y} ’nin desteğidir.

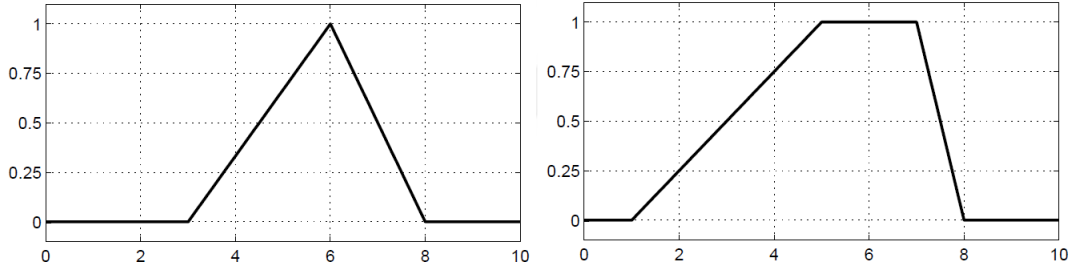
$$Y^\alpha = \begin{cases} \{y : \nu(y) \geq \alpha\}, & \alpha > 0 \\ Q := K_p(\{y : \nu(y) > \alpha\}), & \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Bunun sürekli olan aşağıdaki üyelik fonksiyonu $[b, c]$ aralığında kesin artan ve $[d, e]$ aralığında kesin azalan fonksiyon olsun. O zaman \bar{Y} bulanık sayıdır. Burada $[c, d]$ ve $[b, e]$ sırasıyla bulanık sayının çekirdeği ve desteğidir.

$$v(y) = \begin{cases} 0, & y \leq b \\ Y_L^{-1}(y), & y \in [b, c] \\ 1, & y \in [c, d] \\ Y_R^{-1}(y), & y \in [d, e] \\ 0, & y \geq e \end{cases} \quad (3.2)$$

Ayrıca $Y_L^{-1}(y)$ ve $Y_R^{-1}(y)$ lineer fonksiyon ve $c = d$ ($c \neq d$) ise üçgensel (yamuk) bulanık sayı olarak adlandırılır. Bunlar sırasıyla (b, c, e) ve (b, c, d, e) ile gösterilir.

Şekil 3.1’de sırasıyla $(3, 6, 8)$ üçgensel bulanık sayısının ve $(1, 5, 7, 8)$ yamuk bulanık sayısının üyelik fonksiyonları gösterilmiştir.



Şekil 3.1 : Üyelik fonksiyonları.

Tanım 3.1’e göre her bir bulanık sayı aşağıdaki bilgiyle tek olarak temsil edilir. Burada $Y_L(\alpha)$ ve $Y_R(\alpha)$ sırasıyla kesin artan ve kesin azalan sürekli fonksiyonlardır. Buna göre bulanık sayının α -kesmesi, α arttıkça sürekli bir şekilde küçülür.

$$Y^\alpha = [Y_L(\alpha), Y_R(\alpha)], \forall \alpha \in [0, 1] \quad (3.3)$$

Tanım 3.2: x belirsiz vektörünün ortak olabilirlik dağılımı aşağıdaki gibi olsun. Burada x_i belirsiz değişkeninin marjinal olabilirlik dağılımı, üyelik fonksiyonu $v_i(x_i)$ olan \bar{X}_i bulanık kümesidir. Buna göre marjinal olabilirlik dağılımları etkileşimsizdir ve ortak olabilirlik dağılımının α -kesmesi $X^\alpha := X_1^\alpha \times X_2^\alpha \times \dots \times X_n^\alpha$ olarak bulunur.

$$v(x) = \min \{v_1(x_1), v_2(x_2), \dots, v_n(x_n)\}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.4)$$

Uyarı: Etkileşimsiz (etkileşimli) bulanık sayılar birbirlerinden bağımsız değer alır (almaz). Başka bir deyişle Olabilirlik Teorisindeki etkileşimsizlik kavramı, Olasılık Teorisindeki bağımsızlık kavramına karşı gelir.

Tanım 3.3: (Zadeh'in genişletme prensibi) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ "crisp" fonksiyon, \bar{f} karşı gelen bulanık değerli fonksiyon ve $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ (tercihen etkileşimsiz) bulanık kümeler olsun. O zaman $\bar{Y} = \bar{f}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$ bulanık kümedir ve bunun üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$v(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min \{v_1(x_1), v_2(x_2), \dots, v_n(x_n)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (3.5)$$

Roman-Flores ve diğ. (2001)'de verilen Teorem 3.4, bulanık fonksiyonlarla yapılan işlemler ve dolayısıyla bulanık aritmetik için temel oluşturur.

Teorem 3.4: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ sürekli fonksiyon, $d \leq n$ ve $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ bulanık sayılar olsun. Tanım 3.3'e göre $\forall \alpha \in [0, 1]$ için $Y^\alpha = f(X_1^\alpha, X_2^\alpha, \dots, X_n^\alpha)$ olarak bulunur.

Sonuç 3.5: Her i için w_i nonnegatif skaler olmak üzere aşağıdaki bilgi geçerlidir. Kısa pozisyon sınırı varken portföy seçimi probleminde bunlar, portföydeki n adet varlığın ağırlıklarını gösterir.

$$\sum_{i=1}^n w_i (b_i, c_i, e_i) = \left(\sum_{i=1}^n w_i b_i, \sum_{i=1}^n w_i c_i, \sum_{i=1}^n w_i e_i \right) \quad (3.6)$$

Tanım 3.6: y belirsiz değişkeninin olabilirlik dağılımı, \bar{Y} bulanık sayısı ile verilsin. B kümesinin tümleyeni B^c olsun. Buna göre "crisp" kümeler üzerinde olabilirlik ve gereklilik ölçüleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Ps(B) := \sup \{v(y) : y \in B\}$$

$$Ns(B) := 1 - Ps(B^c) \quad (3.7)$$

Bu ölçüler, olasılık ölçüsünün aksine toplamsal değildir ve her B, C “crisp” kümeleri için aşağıdaki bilgiler geçerlidir. Buna göre iki olaydan en az birinin olmasının akla uygunluğu, bunların akla uygunluğunun maksimumudur. İki olayın birlikte olmasının kesinliği ise bunların kesinliğinin minimumudur.

$$\begin{aligned} P_s(B \cup C) &= \max(P_s(B), P_s(C)) \\ N_s(B \cap C) &= \min(N_s(B), N_s(C)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Bu ölçüler, olasılık ölçüsünün aksine “self-dual” değildir ve aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir. Öte yandan bunların aritmetik ortalaması olarak tanımlanan kredibilite ölçüsü “self-dual” olarak bulunur (Liu, 2006).

$$N_s(B) + N_s(B^c) \leq 1 \leq P_s(B) + P_s(B^c) \quad (3.9)$$

Aşağıda verildiği üzere bir olay tam olarak akla uygun değilse bunun kesinliği sıfırdır. Bunun kesinliği sıfırdan büyük ise bu olay tam olarak akla uygundur.

$$\begin{aligned} P_s(B) < 1 &\Rightarrow N_s(B) = 0 \\ N_s(B) > 0 &\Rightarrow P_s(B) = 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Olasılık ölçüsü (P) ile bu ölçüler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir. Buna göre bu iki ölçü, kesin olmayan olasılık için alt ve üst sınırları belirler.

$$N_s(B) \leq P(B) \leq P_s(B) \quad (3.11)$$

(3.7) ve (3.11)’e göre aşağıdaki bilgi geçerlidir. Buna göre y sürekli rastgele değişken ise bunun olasılık ve olabilirlik dağılımlarının destekleri özdeştir ve Y^0 ’a eşittir.

$$1 - \alpha = N_s(Y^\alpha) \leq P(Y^\alpha) \leq P_s(Y^\alpha) = 1 \quad (3.12)$$

3.2 Eski Olabilirlik Ortalama – Varyans Modelinin Teorisi

Bu bölümde eski olabilirlik OV modeli ile ilgili temel kavramlar verildikten sonra faydayı ya da performansı maksimum yapan portföyler analitik olarak elde edilmiştir.

Tanım 3.7: (Carlsson ve diğ., 2002; Carlsson ve Fuller, 2001) y belirsiz değişkeninin olabilirlik dağılımı, \bar{Y} bulanık sayısı ile verilsin. Buna göre Y^α (3.3)'teki gibidir ve bunun (eski) olabilirlik ortalaması ve varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E_p^{eski}(y) := \int_0^1 \alpha (Y_R(\alpha) + Y_L(\alpha)) d\alpha \quad (3.13)$$

$$Var_p^{eski}(y) := 0.5 \int_0^1 \alpha (Y_R(\alpha) - Y_L(\alpha))^2 d\alpha$$

Önerme 3.8: Her i için r_i rastgele değişkeninin marjinal olabilirlik dağılımı (b_i, c_i, e_i) olsun. Tanım 3.3 ve Tanım 3.7'ye göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$E_p^{eski}(w^T r) = \sum_{i=1}^n w_i E_p^{eski}(r_i) = \sum_{i=1}^n w_i \bar{\mu}_i = \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{b_i + 4c_i + e_i}{6} \right) \quad (3.14)$$

$$Var_p^{eski}(w^T r) = \left(\sum_{i=1}^n |w_i| \sqrt{Var_p^{eski}(r_i)} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n |w_i| \bar{\sigma}_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n |w_i| \left(\frac{e_i - b_i}{2\sqrt{6}} \right) \right)^2$$

İspat: Tüm ağırlıklar nonnegatif iken Carlsson ve diğ. (2002), Carlsson ve Fuller (2001) ve Taş ve diğ. (2016)'ya bakınız. Aksi halde bu koşulu sağlamak için $r_i := -r_i$ dönüşümü her i için yapılabilir. Olabilirlik ortalaması (varyansı), tek (çift) operatördür. Başka bir deyişle $E_p^{eski}(r_i) = -E_p^{eski}(-r_i)$ ve $Var_p^{eski}(r_i) = Var_p^{eski}(-r_i)$ eşitlikleri her i için sağlanır. Buna göre (3.14) tüm durumlarda geçerlidir.

Uyarı: Portföyün lineerleştirilmiş karının olabilirlik dağılımı, bulanık aritmetik ile bulunur. Özel olarak kısa pozisyon sınırı varken (3.6)'daki bilgiler geçerlidir. Bunun olabilirlik ortalaması ve varyansı doğrudan Tanım 3.7 kullanılarak bulunduğu da (3.14) ile özdeş sonuçlar elde edilir.

(2.35)'e benzer olarak eski olabilirlik OV modeli, aşağıdaki çok amaçlı konkav maksimizasyon problemi ile tanımlanabilir.

$$\sup \left\{ E_p^{eski}(w^T r) \wedge (-Var_p^{eski}(w^T r)) : w \in S \right\} \quad (3.15)$$

(2.37) ve (3.14)'teki bilgiler doğrultusunda, (3.15)'in aşağıdaki problemle özdeş etkin sınır verdiği gösterilebilir. Burada $\beta, [0,1]$ kapalı aralığında değer almaktadır.

$$\sup \left\{ \beta \left(\sum_{i=1}^n w_i \bar{\mu}_i \right) + (1-\beta) \left(- \left(\sum_{i=1}^n |w_i| \bar{\sigma}_i \right) \right) : w \in S \right\} \quad (3.16)$$

Önerme 3.8'e göre tüm varlıkların arasındaki olabilirlik korelasyonu 1'dir. Hatta A varlığının uzun pozisyonu ile B varlığının hem uzun pozisyonu hem de kısa pozisyonu arasındaki olabilirlik korelasyonları 1'dir. Ayrıca marjinal olabilirlik dağılımlarından bağımsız olarak olabilirlik korelasyonları her zaman için nonnegatiftir (Carlsson ve Fuller, 2001). Bu nedenle bu model ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilebilir.

- Yalnızca kısa pozisyon sınırı varken finansal olarak anlamlı sonuç verir.
- Bölüm 2'de incelenen modellerdeki durumun aksine portföyü çeşitlendirme yaklaşımı risk azaltmada kullanılamaz.

Uyarı: Önerme 3.8'e göre aşağıdaki bilgi geçerlidir. Buna göre olabilirlik ortalaması ve standart sapması t 'nin lineer fonksiyonudur. Bu nedenle eski olabilirlik OV modelinin sonucu, OV modelinde olduğu gibi zamandan bağımsızdır.

$$E_p^{eski} \left(\sum_{j=1}^t r_{i,j} \right) = t \bar{\mu}_i, \forall i$$

$$Var_p^{eski} \left(\sum_{j=1}^t r_{i,j} \right) = t^2 \bar{\sigma}_i^2, \forall i \quad (3.17)$$

Portföyde kısa pozisyon ve risksiz varlık bulunmasın. Buna göre (3.16) aşağıdaki lineer maksimizasyon problemine indirgenir.

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n w_i (\beta \bar{\mu}_i + (\beta-1) \bar{\sigma}_i) : \left(\sum_{i=1}^n w_i = 1 \right) \wedge (w_i \geq 0, \forall i) \right\} \quad (3.18)$$

Portföyün toplamsal fayda fonksiyonu, i . varlığın faydası $\theta_i := (\beta \bar{\mu}_i + (\beta-1) \bar{\sigma}_i)$ olmak üzere aşağıdaki gibidir. Buna göre (3.18) fayda maksimizasyonu problemidir.

$$u(w) = \sum_{i=1}^n w_i \theta_i \quad (3.19)$$

Bu bölümde aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

- **V1:** En az bir varlığın olabilirlik ortalaması pozitiftir.

- **V2:** Olabilirlik ortalamasını ve standart sapmasını eniyileyen portföyler tektir.
- **V3:** Etkin sınırın bulunduğu düzlemde, varlıkların koordinatları birbirlerinden farklıdır. Aksi halde söz konusu varlıklar tek bir varlık olarak düşünülebilir.

V2 geçerli iken herhangi bir β değeri için (3.18)'in optimal çözümü olabilirlik OV etkin portföy olarak adlandırılır. Etkin portföy, verilen olabilirlik standart sapması için olabilirlik ortalamasını maksimum yapan portföy olarak da tanımlanabilir. Bunlar birlikte olabilirlik standart sapması – olabilirlik ortalaması düzleminde etkin sınırı verir. Köşe Noktası Teoremine göre bunlarla ilgili aşağıdaki bilgiler geçerlidir.

- Verilen β değeri için tek bir varlığın faydası maksimum ise etkin portföy tektir. Bu portföyde yalnızca bu varlık bulunur.
- Eğer iki veya daha fazla varlığın faydası maksimum ise bu varlıkların herhangi bir konveks kombinasyonu etkin portföydür.

Beklenen performans, birim olabilirlik standart sapması başına olabilirlik ortalaması olarak tanımlansın. Bunu maksimum yapan portföy aşağıdaki lineer kesirli programla problemi ile bulunur. Bu portföy, V1 geçerli iken tanım gereği etkin portföydür ve olabilirlik piyasa portföyü (PP_O) olarak adlandırılabilir.

$$\sup \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n w_i \bar{\mu}_i}{\sum_{i=1}^n w_i \bar{\sigma}_i} : \left(\sum_{i=1}^n w_i = 1 \right) \wedge (w_i \geq 0, \forall i) \right\} \quad (3.20)$$

(3.20) lineer programlama problemine indirgenip Simpleks algoritma ile çözülebilir (Bajalinov, 2013). Ayrıca kuasikonveks problemdir ve bu nedenle bu problemin en az bir optimal çözümü S'nin bir köşesidir (Bykadorov, 1994). Bununla birlikte aşağıdaki bilgilerin geçerli olduğu da gösterilebilir (Biswas ve diğ, 2017).

- Tek bir varlığın performansı maksimum ise PP_O tektir. Bu portföyde yalnızca bu varlık bulunur.
- Eğer iki veya daha fazla varlığın performansı maksimum ise bu varlıkların herhangi bir konveks kombinasyonu PP_O olarak bulunur.

Bazı özel durumlar için etkin portföyleri incelemek yararlı olabilir.

i. Varlık ağırlıkları için $l < n$ olmak üzere üst sınır getirilsin ve S aşağıdaki gibi olsun. (İyi çeşitlendirilmiş portföyler elde etmek için bu modelde bu tür kısıtlar getirilebilir.)

$$S = \left\{ w : \left(\sum_{i=1}^n w_i = 1 \right) \wedge \left(\frac{1}{l} \geq w_i \geq 0, \forall i \right) \right\} \quad (3.21)$$

Bu durumda fayda (performans) sıralamasında l . ve $(l+1)$. olan varlıkların faydası (performansı) farklı ise etkin portföy (PP_O) tektir. Faydası (performansı) maksimum olan l adet varlık, bu portföyde eşit ağırlıklı olarak bulunur.

ii. Portföyde risksiz varlık bulunabilsin ama kısa pozisyon bulunamasın. Buna göre S aşağıdaki gibidir.

$$S = \left\{ w : \left(\sum_{i=1}^n w_i \leq 1 \right) \wedge (w_i \geq 0, \forall i) \right\} \quad (3.22)$$

Bu durumda performansı maksimum yapan portföy, PP_O ile risksiz varlığın herhangi bir konveks fonksiyonudur. Sadece bu portföyler etkin portföylerdir ve birlikte etkin sınırı oluşturur. Buna göre Bölüm 2’de incelenen modellerde olduğu gibi burada da Tek Fon Teoremi geçerlidir. V_1 nedeniyle pozitif olan PP_O ’nun beklenen performansı p ile gösterilsin. Faydayı maksimum yapan etkin portföy aşağıdaki β_0 değerine kadar sadece risksiz varlık iken bu değerden sonra sadece PP_O ’dur. Bu β_0 değerinde ise bunların herhangi bir konveks kombinasyonudur. Başka bir deyişle bu β_0 için tüm etkin sınır faydayı maksimum yapar.

$$\beta_0 = \frac{1}{1+p} \quad (3.23)$$

iii. Portföyde risksiz varlık bulunamasın ama kısa pozisyon bulunabilsin. Bu durumda eski olabilirlik OV modeli ya kısa pozisyon sınırı varmış gibi sonuç verir ya da sınırlı tek bir optimal çözüm bulunamaz. Bu bilgi kısa pozisyon sınırı yokken modelin finansal olarak anlamlı olmaması ile uyumludur.

Uyarı: Portföyde kısa pozisyon bulunamasın. Marjinal olabilirlik dağılımları üçgensel veya yamuk bulanık sayılarla verilsin. O zaman bu modelin Zhang (2007)’de verilen iki varyantı, lineer programlama problemlerine indirgenir. Bu nedenle eski olabilirlik

OV modelinin optimal çözümü için bu alt bölümde verilen bilgiler, bu modelin varyantları için de geçerlidir.

3.3 Eski Olabilirlik Ortalama – Varyans Modelinin Etkin Sınırı

Etkin portföyler, olabilirlik standart sapması – olabilirlik ortalaması düzleminde etkin sınırı verir. Bu alt bölümde kısa pozisyon sınırı varken, farklı etkin sınır yapıları örnekler ile açıklanmıştır.

(3.24) eski olabilirlik OV modelinin alternatif tanımıdır ve (3.18) ile özdeş etkin sınır verir. (3.18)'de fayda maksimizasyonu söz konusu iken burada olabilirlik standart sapmasının verilen üst sınırı için olabilirlik ortalaması maksimize edilir.

$$\begin{aligned} & \text{maks } \sum_{i=1}^n w_i \bar{\mu}_i \\ & \text{s.t. } \sum_{i=1}^n w_i \bar{\sigma}_i \leq \sigma_{üst} \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0, \forall i \end{aligned} \tag{3.24}$$

Simpleks algoritmadan bilindiği üzere optimal çözüm dejenere değilse veya alternatif optimal çözümler yoksa, (3.24)'ün optimal çözümünde tam olarak iki varlık bulunur. (3.18) ile (3.24) birlikte dikkate alındığında aşağıdaki bilgiler verilebilir.

- V1 ve V2 geçerli olsun. Ayrıca olabilirlik ortalamasını ve standart sapmasını eniyileyen portföyler aynı olsun. Buna göre etkin sınır, tek bir noktadan oluşur. Bu nokta tek bir varlıktan oluşan PP_O 'dur.
- Aksi halde etkin sınır, bir veya daha fazla doğru parçasından oluşan konkav bir eğridir. V3 geçerli iken doğru parçalarının uç noktaları, birer varlığa karşı gelir. Bu noktalar (3.24)'ün dejenere çözümleridir. Uç olmayan noktalar ise doğru parçasının iki uç noktasının bir konveks kombinasyonu ile elde edilir.
- Eğer bir doğru parçası üzerinde üç veya daha fazla varlık varsa alternatif optimal çözümler vardır. Buna göre o doğru parçası üzerindeki uç olmayan herhangi bir nokta, bu varlıkların sonsuz farklı sayıda konveks kombinasyonu ile elde edilebilir.

- Tüm varlıklar söz konusu düzlemde nokta şeklinde gösterilsin. Etkin sınır üzerinde olmayan noktalar etkin portföy değildir. Bunlar grafikte etkin sınırın altında ve sağında kalır. Bu varlıkları içeren herhangi bir portföy de etkin değildir. Rasyonel bir yatırımcının bu portföylere yatırım yapmaması beklenir.

(3.18)'de β belirli aralıklarda iken uç noktalar elde edilir. İki uç noktanın faydasının bir β_0 için eşit olduğu yerlerde ise aralık değişimleri gerçekleşir. İlgili doğru parçasının eğimi e iken β_0 aşağıdaki gibi bulunur. Etkin sınır konkav eğri olduğundan bunu oluşturan doğru parçalarının eğimleri (bulunan β_0 değerleri) gittikçe azalır (artar).

$$\beta_0 = \frac{1}{1+e} \quad (3.25)$$

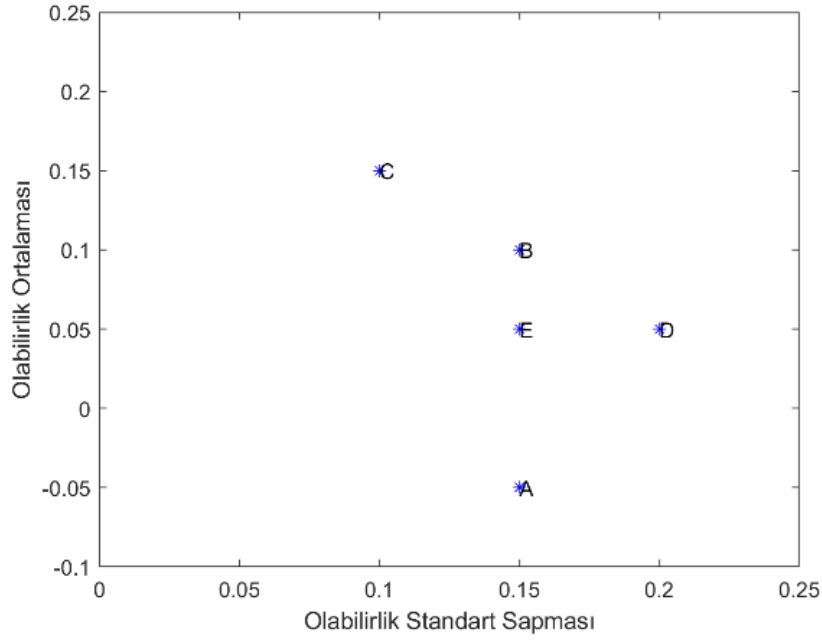
Uyarı: Portföyde risksiz varlık bulunabiliyorken (3.23)'teki p ile (3.25)'teki e özdeşdir. Çünkü risksiz varlığın olabirlik ortalaması (varyansı) sıfırdır ve etkin sınır bu örnekte PP_0 ile risksiz varlığı birleştiren doğru parçasıdır.

Örnek I ve II'de, A, B, C, D ve E varlıkları için Çizelge 3.1'deki bilgiler geçerli olsun. Burada OO I (OO II) varlıkların Örnek I'deki (Örnek II'deki) olabirlik ortalamalarını göstermektedir. OS I (OS II) ise varlıkların Örnek I'deki (Örnek II'deki) olabirlik standart sapmalarını göstermektedir. Örnek II'nin, Örnek I'den tek farkı A varlığının olabirlik standart sapmasıdır.

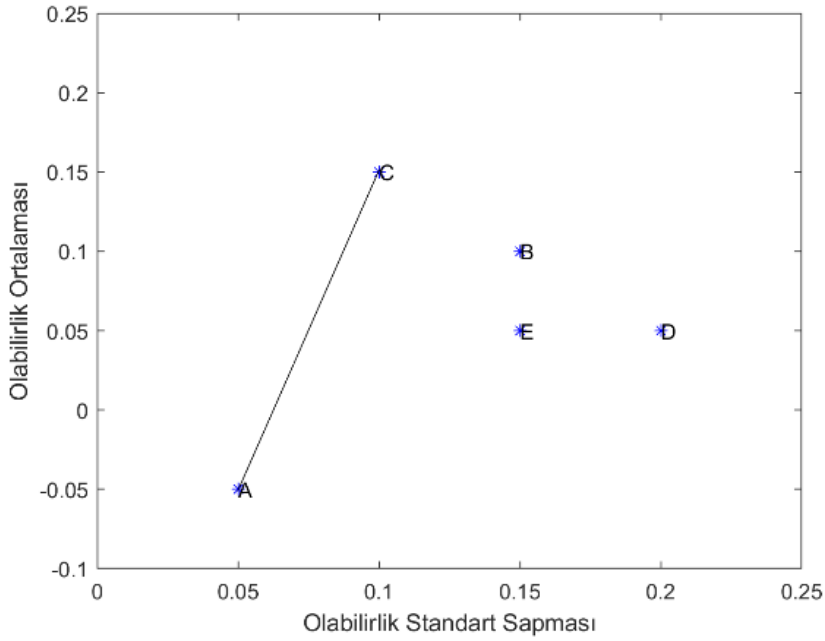
Çizelge 3.1 : Etkin sınır örnekleri için veriler I.

Varlık	OO I	OS I	OO II	OS II
A	-0.05	0.15	-0.05	0.05
B	0.10	0.15	0.10	0.15
C	0.15	0.10	0.15	0.10
D	0.05	0.20	0.05	0.20
E	0.05	0.15	0.05	0.15

Örnek I'de C varlığı olabirlik ortalamasını ve standart sapmasını eniyiler. Bu nedenle burada etkin sınır sadece C varlığından oluşur. Örnek II'de sadece A ve C varlıkları etkin portföylerdir. Bu nedenle etkin sınır, A ve C'nin konveks kombinasyonları ile oluşturulan ve eğimi 4 olan bir doğru parçasıdır. (3.25)'e göre etkin portföyler; $\beta < 0.2$ iken sadece A varlığından, $\beta > 0.2$ iken sadece C varlığından oluşur. $\beta = 0.2$ ise tüm bir etkin sınır faydayı maksimum yapar. Başka bir deyişle (3.18)'in alternatif optimal çözümleri vardır. Örnek I ve II'de C varlığı performansı maksimum yapar ve PP_0 'dur. Örnek I ve II için etkin sınırlar Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'te sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 3.2 : Örnek I için etkin sınır.



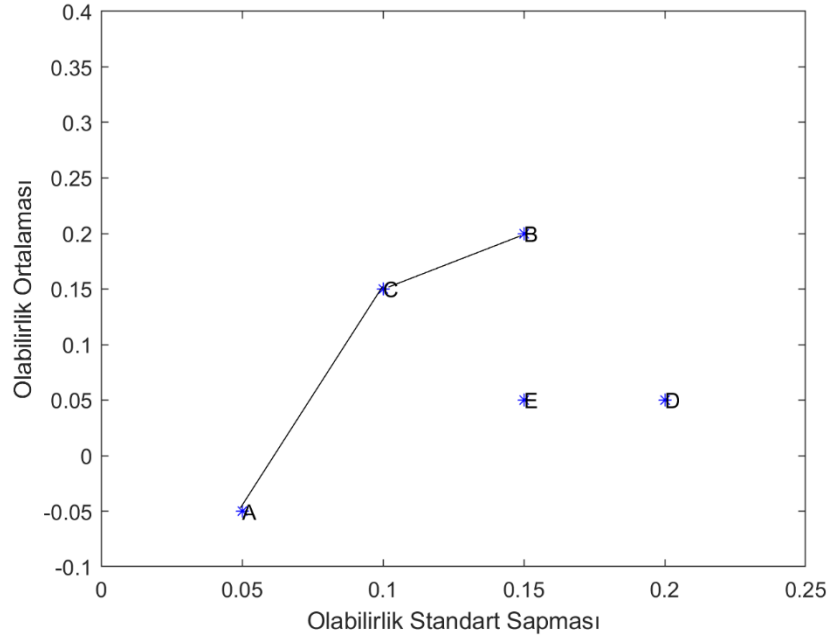
Şekil 3.3 : Örnek II için etkin sınır.

Örnek III ve IV'te, A, B, C, D ve E varlıkları için Çizelge 3.2'deki bilgiler geçerli olsun. Örnek III ve IV'ün, Örnek II'den tek farkı B varlığının olabilirlik ortalamasıdır.

Çizelge 3.2 : Etkin sınır örnekleri için veriler II.

Varlık	OO III	OS III	OO IV	OS IV
A	-0.05	0.05	-0.05	0.05
B	0.20	0.15	0.35	0.15
C	0.15	0.10	0.15	0.10
D	0.05	0.20	0.05	0.20
E	0.05	0.15	0.05	0.15

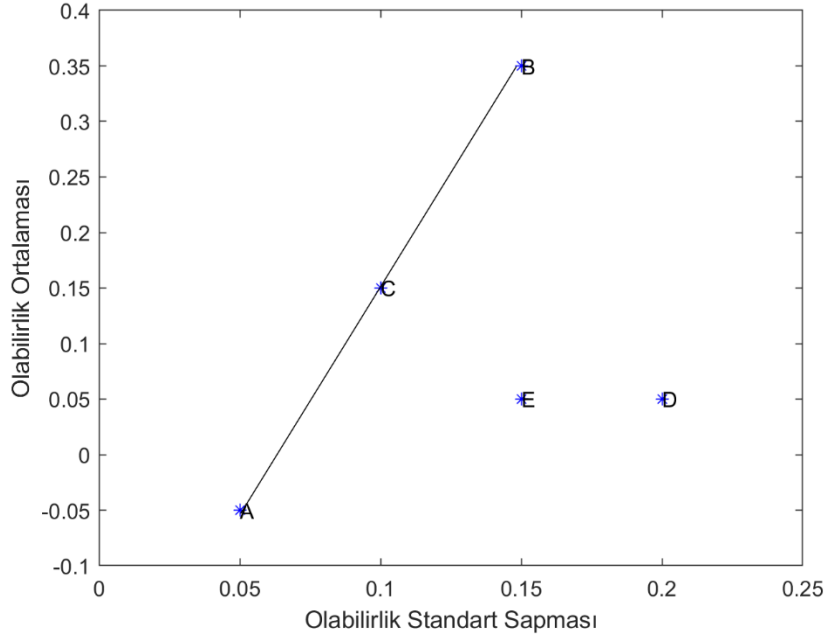
Örnek III’te A, B ve C varlıkları etkin portföylerdir. Buradaki etkin sınır, iki doğru parçasını uç uca ekleyerek oluşturulan konkav eğridir. Etkin portföyler; $\beta < 0.2$ iken sadece A varlığından, $0.2 < \beta < 0.5$ iken sadece C varlığından, $\beta > 0.5$ iken sadece B varlığından oluşur. $\beta = 0.2$ iken ($\beta = 0.5$ iken) A ve C’nin (C ve B’nin) herhangi bir konveks kombinasyonu faydayı maksimum yapar ve etkin portföydür. Burada PP_0 yine sadece C varlığından oluşur. Örnek III için etkin sınır Şekil 3.4’te gösterilmiştir.



Şekil 3.4 : Örnek III için etkin sınır.

Örnek IV’te PP_0 sadece B varlığından oluşur ve etkin sınırı oluşturan iki doğru parçasının eğimi aynı olduğundan etkin sınır doğrusaldır. Etkin portföyler; $\beta < 0.2$ iken sadece A varlığından, $\beta > 0.2$ iken sadece B varlığından oluşur. $\beta = 0.2$ ise A, B ve C’nin herhangi bir konveks kombinasyonu faydayı maksimum yapar ve etkin portföydür. Ayrıca (3.24)’te $0.05 < \sigma_{üst} < 0.15$ iken alternatif optimal çözümler vardır ve karşı gelen etkin portföyler A, B ve C’nin sonsuz farklı sayıda konveks kombinasyonu ile elde

edilebilir. Örneğin, (0.10, 0.15) koordinatlarındaki bir etkin portföy C varlığı ve (0.5A+0.5B) portföyünün herhangi bir konveks kombinasyonu ile oluşturulabilir.



Şekil 3.5 : Örnek IV için etkin sınır.

4. YENİ OLABİLİRLİK ORTALAMA – VARYANS MODELİ

Eski olabilirlik OV modeli, bazı durumlarda iyi çeşitlendirilmiş bir portföyü tek olarak vermez. Ayrıca bu modelde Zadeh'in genişletme prensibi, etkileşimli bulanık sayıların toplanmasında kullanılır. Öte yandan bu prensibin yalnızca etkileşimsizlik varsayımı altında tercih edilebilir olduğu iddia edilmektedir (Dubois ve Prade, 1981; Carlsson ve diğ., 2005). Bununla birlikte bu model ile risk faktörleri arasındaki negatif bağlılık modellenemez. Bu nedenle bu model, kısa pozisyon sınırı yokken kullanılmaya elverişli değildir.

Olabilirlik Teorisi, kesin olmayan olasılıkla mücadelede önemli bir araçtır. Öte yandan yukarıda bahsedildiği üzere eski olabilirlik OV modelinin önemli sorunları vardır. Bu sorunları ortadan kaldırmak için bu bölümde, Temel Bileşenler Analizine dayanan yeni bir olabilirlik OV modeli önerilmiştir. Önerilen bulanık modelde olabilirlik ortalaması ve varyansı için Fuller ve diğ. (2011)'de verilen tanımlar kullanılmıştır. Burada temel bileşenlerin marjinal olabilirlik dağılımları üçgenel bulanık sayılar ile verilmiştir. Bu bulanık sayıların etkileşimsiz olduğu varsayılmış ve bunların toplanmasında Zadeh'in genişletme prensibi kullanılmıştır. Buna göre temel bileşenler arasındaki olabilirlik korelasyonu sıfır olarak bulunur. Bu durum etkileşimsizlik varsayımı ve gerçek hayattaki bağlılık yapısı ile uyumludur. Ayrıca önerilen bulanık model, bir kesin konkav kuadratik maksimizasyon problemi ile verilebilir. Bu nedenle OV modelinin çözüm yollarıyla çözülebilmektedir. Bununla birlikte önerilen bulanık model, belirli bir şart altında %100 olasılıkla iyi tanımlıdır.

Bu bölümün kalanı şu şekilde organize edilmiştir. Bölüm 4.1'de, önerilen bulanık modelin teorisi oluşturulmuştur. Bölüm 4.2'de, BIST 30 endeksindeki tüm holding hisse senetlerinin 2016 yılına ait haftalık ek logaritmik getirileri kullanılarak önerilen bulanık model tanıtılmıştır. Ayrıca eğitim ve test periyotları sırasıyla 2016 ve 2017 yılları olmak üzere geleneksel yaklaşımdaki OV modelinin ve önerilen olabilirlik OV modelinin karlılıkları ve performansları karşılaştırılmıştır.

4.1 Önerilen Bulanık Modelin Teorisi

Bu bölümde portföyde risksiz varlık bulunmadığı varsayılmıştır ve kısa pozisyon almanın ekstra maliyeti ihmal edilmiştir. Ayrıca r 'nin dağılımının ortalama vektörü ve kovaryans matrisi, yansız tahmincilerine eşit alınmıştır. Buna göre temel bileşenler vektörü (x) aşağıdaki gibi tanımlanır. Burada $\widehat{\Lambda}$ pozitif özdeğerlerin küçükten büyüğe sıralandığı köşegen matristir. \widehat{V} ise i . sütunu, i . özdeğere karşı gelen ortonormal özvektör olan ortogonal matristir (Johnson ve Wichern, 2007; Jolliffe, 2002).

$$\widehat{\Sigma} = \widehat{V}\widehat{\Lambda}\widehat{V}^T \mapsto x := \widehat{V}^T r \quad (4.1)$$

Buna göre lineerleştirilmiş kar fonksiyonu $P(r)$, ortogonal koordinat sisteminde aşağıdaki gibi bulunur.

$$f(x) = \tilde{w}^T x = (\widehat{V}^T w)^T x = w^T (\widehat{V}x) = w^T r = P(r) \quad (4.2)$$

Uyarı: $\widehat{\Lambda}_{i,i}$ örneklem kovaryans matrisinin i . özdeğeridir (i . temel bileşenin örneklem varyansıdır). Temel bileşenlerin örneklem ortalama vektörü $\widehat{\mu}_x = \widehat{V}^T \widehat{\mu}$ olarak bulunur.

Tanım 4.1: (Fuller ve diğ., 2011) Beklenen değer ve varyans operatörleri sırasıyla E ve Var ile gösterilsin. y belirsiz değişkeninin olasılırlık dağılımı, \bar{Y} bulanık sayısı ile verilsin. Buna göre Y^α (3.3)'teki gibidir ve bunun olasılırlık ortalaması ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} E_p(y) &:= \int_0^1 E(y | y \in Y^\alpha) d\alpha \\ Var_p(y) &:= \int_0^1 Var(y | y \in Y^\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (4.3)$$

Önsav 4.2: Her i için x_i 'nin marjinal olasılırlık dağılımı $\bar{X}_i = (b_i, c_i, e_i)$ ile verilsin.

Ayrıca x_i 'nin X_i^α 'da değer aldığı biliniyorken bunun koşullu olasılık dağılımı, her $\alpha \in [0, 1]$ için düzgün dağılım olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_i &:= E_p(x_i) = \frac{b_i + 2c_i + e_i}{4} \\ \tilde{\sigma}_i^2 &:= Var_p(x_i) = \frac{(e_i - b_i)^2}{36}\end{aligned}\tag{4.4}$$

İspat: (3.3)'e göre $X_i^\alpha = [b_i + (c_i - b_i)\alpha, e_i + (c_i - e_i)\alpha], \forall \alpha \in [0,1]$ olarak bulunur.

Düzgün dağılımın özelliklerinden aşağıdaki bilgiler geçerlidir.

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_i &= \int_0^1 \left(\frac{[b_i + (c_i - b_i)\alpha] + [e_i + (c_i - e_i)\alpha]}{2} \right) d\alpha = \frac{b_i + 2c_i + e_i}{4} \\ \tilde{\sigma}_i^2 &= \int_0^1 \left(\frac{[e_i + (c_i - e_i)\alpha] - [b_i + (c_i - b_i)\alpha]}{12} \right)^2 d\alpha = \frac{(e_i - b_i)^2}{36}\end{aligned}\tag{4.5}$$

Uyarı: Laplace'nin yetersiz neden prensibine göre; herhangi bir α -kesmesinin tüm noktalarının olabilirlikleri eşit kabul edildiğinden, bu noktalar aynı zamanda eşit olasılıklıdır (Fuller ve diğ., 2011; Dubois, 2006). Bu nedenle Önsav 4.2'de düzgün dağılım tercihi yapılmıştır.

Marjinal olabilirlik dağılımları Taş ve diğ. (2016)'da geçmiş verilerin minimumu, ortalaması ve maksimumu kullanılarak belirlenmiştir. Kişisel yargılar ve beklentiler doğrultusunda bu tanımlayıcı istatistiklerden elde edilen değerler artırılabilir veya azaltılabilir. Bu tez çalışmasında daha dayanıklı analizler yapabilmek amacıyla bunlar, kutu grafikleri yardımıyla belirlenmiştir. Buna göre bu dağılımların parametreleri sırasıyla geçmiş verilerin dışa düşen olmayan en düşük değeri (alt aşırı), ortalaması ve dışa düşen olmayan en yüksek değeri (üst aşırı) baz alınarak belirlenmiştir. Burada dışa düşen gözlemlerin elde tutma periyodu için akla yatkın olaylar olmadığı varsayılmıştır. Bu bilgiye ve Önerme 4.3'e göre bu yaklaşım, portföyün riskinin (karlılığının) belirlenmesinde dışa düşen olmayan gözlemlerin değişim aralığını (getirilerin çarpıklığı ile birlikte beklenen getiriye) dikkate alır.

Önerme 4.3: $f(x) = \tilde{w}^T x$ sürekli fonksiyonu için aşağıdaki bilgi geçerli olsun.

$$P\left(\{x \mid f(x) \in f(X^\alpha) \wedge x \notin X^\alpha\}\right) = 0, \forall \alpha \in [0,1]\tag{4.6}$$

Önsav 4.2'nin varsayımları geçerli olsun. Ayrıca temel bileşenlerin marjinal olabilirlik dağılımları etkileşimsiz olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$E_p(\tilde{w}^T x) = \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \left(\frac{b_i + 2c_i + e_i}{4} \right)$$

$$Var_p(\tilde{w}^T x) = \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i^2 \frac{(e_i - b_i)^2}{36}$$
(4.7)

İspat: Etkileşimsizlik varsayımı nedeniyle, Bölüm 3.1'de verilen tüm bilgileri teorik tartışma olmaksızın kullanabiliriz. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sırasıyla Teorem 3.4'e, (4.6) ile birlikte E'nin tanımına ve E'nin lineerliğine bağlı olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 E(y | y \in Y^\alpha) d\alpha &= \int_0^1 E(\tilde{w}^T x | f(x) \in f(X^\alpha)) d\alpha \\ &= \int_0^1 E(\tilde{w}^T x | x \in X^\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i E(x_i | x_i \in X_i^\alpha) d\alpha \end{aligned}$$
(4.8)

Buna göre (4.7)'deki ilk eşitlik sırasıyla integralin lineerliğinden ve Önsav 4.2'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} E_p(\tilde{w}^T x) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i E(x_i | x_i \in X_i^\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \int_0^1 E(x_i | x_i \in X_i^\alpha) d\alpha = \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \left(\frac{b_i + 2c_i + e_i}{4} \right) \end{aligned}$$
(4.9)

Benzer şekilde aşağıdaki eşitlikler sırasıyla Teorem 3.4'e, (4.6) ile birlikte Var'ın tanımına ve etkileşimsizlik varsayımına bağlı olarak elde edilir. Buna göre (4.7)'deki ikinci eşitlik integralin lineerliğinden ve Önsav 4.2'den elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 Var(y | y \in Y^\alpha) d\alpha &= \int_0^1 Var(\tilde{w}^T x | f(x) \in f(X^\alpha)) d\alpha \\ &= \int_0^1 Var(\tilde{w}^T x | x \in X^\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i^2 Var(x_i | x_i \in X_i^\alpha) d\alpha \end{aligned}$$
(4.10)

Uyarı: Portföyün lineerleştirilmiş karının olabilirlik dağılımı, bulanık aritmetik ile bulunur. Öte yandan bu olabilirlik dağılımı için Önsav 4.2 doğrudan kullanılamaz.

Çünkü düzgün dağılmış bağımsız rastgele değişkenlerin toplamının dağılımı, düzgün dağılım değildir.

Sonuç 4.4: D operatörü, sütun vektörünün elemanlarını aynı sırada alarak köşegen matris oluştursun. Ayrıca $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\sigma}^2$ elemanları (4.4)'te verilen sütun vektörleri olsun. Buna göre aşağıdaki bilgiler geçerlidir.

$$\begin{aligned} E_p(w^T r) &= w^T (\widehat{V}\tilde{\mu}) = \tilde{w}^T \tilde{\mu} = E_p(\tilde{w}^T x) \\ \text{Var}_p(w^T r) &= w^T (\widehat{V}D(\tilde{\sigma}^2)\widehat{V}^T)w = \tilde{w}^T D(\tilde{\sigma}^2)\tilde{w} = \text{Var}_p(\tilde{w}^T x) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Uyarı: Herhangi iki temel bileşen arasındaki olabilirlik korelasyonu sıfırdır. Bu durum etkileşimsizlik varsayımı ve gerçek hayattaki bağıllık yapısı ile uyumludur.

(4.11)'deki bilgiler doğrultusunda; olabilirlik ortalaması vektörü (μ_p), pozitif tanımlı olabilirlik kovaryans matrisi (Σ_p) ve pozitif tanımlı olabilirlik korelasyon matrisi (A_p) aşağıdaki gibi tanımlanabilir. Burada olabilirlik standart sapması vektörünün (σ_p) elemanları, sırasıyla Σ_p matrisinin köşegensel elemanlarının kareköküne eşittir.

$$\begin{aligned} \mu_p &:= \widehat{V}\tilde{\mu} \\ \Sigma_p &:= \widehat{V}D(\tilde{\sigma}^2)\widehat{V}^T = D(\sigma_p)A_pD(\sigma_p) \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.11) ve (4.12)'ye göre olabilirlik ortalaması ve varyansı, ağırlık vektörünün (w) sırasıyla lineer ve kesin konveks fonksiyonlarıdır. Olabilirlik OV modeli ise (2.35)'e benzer olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\sup \left\{ (w^T \mu_p) \wedge (-w^T \Sigma_p w) : w^T \bar{1} = 1 \right\} \quad (4.13a)$$

(2.35) ve (2.36) arasındaki ilişkiye benzer olarak (4.13a) ve (4.13b)'nin etkin sınırları özdeşdir. Burada $\lambda \geq 0$ riskten kaçınma katsayısıdır.

$$\sup \left\{ (w^T \mu_p) - 0.5\lambda (w^T \Sigma_p w) : w^T \bar{1} = 1 \right\} \quad (4.13b)$$

Uyarı: Örneklem kovaryans matrisinin elemanları, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise bunun özdeğerlerinin ayrık olma olasılığı %100'dür (Girko, 2018). Bu tez çalışmasında, uygulamalarımızda olduğu gibi bunların ayrık olduğu

varsayılmıştır. Buna göre (4.12)'de verilen μ_p ve Σ_p tek olarak bulunur. Dolayısıyla önerilen olabilirlik OV modeli iyi tanımlıdır. Bu durum bu tez çalışmasında önerilen ve Temel Bileşenler Analizine dayanan diğer modeller için de geçerlidir.

Sharpe oranına benzer olarak beklenen (gerçekleşmiş) performans, birim olabilirlik standart sapması başına olabilirlik ortalaması (gerçekleşmiş kar) olarak tanımlanabilir. Bu tür performans ölçüleri yalnızca pozitif iken anlamlıdır. (2.38)'e benzer olarak aşağıdaki portföyün uzun veya kısa pozisyonu beklenen performansı (BP) maksimum yapar. Bu portföy, olabilirlik piyasa portföyü (PP_O) olarak adlandırılabilir.

$$\bar{1}^T \Sigma_p^{-1} \mu_p \neq 0 \Rightarrow PP_O = \frac{\Sigma_p^{-1} \mu_p}{\bar{1}^T \Sigma_p^{-1} \mu_p} \quad (4.14)$$

PP_O'nun beklenen performansı negatif ise bunu maksimum yapan portföy, (2.51)'e benzer olarak aşağıdaki kesin konveks minimizasyon probleminin tek optimal çözümü normalize edilerek bulunur.

$$\begin{aligned} \min w^T \Sigma_p w \\ \text{s.t. } w^T \mu_p \geq 1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Olabilirlik varyansını minimum yapan portföy (MV_O) (2.38)'e benzer olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$MV_O = \frac{\Sigma_p^{-1} \bar{1}}{\bar{1}^T \Sigma_p^{-1} \bar{1}} \quad (4.16)$$

(4.13b) bir kesin konkav kuadratik maksimizasyon problemidir. Bunun tek optimal çözümü (2.40)'a benzer olarak aşağıdaki gibi bulunur. Buna göre olabilirlik OV etkin sınırı, PP_O ile MV_O'nun lineer kombinasyonlarıyla elde edilir. Başka bir deyişle burada da İki Fon Teoremi geçerlidir.

$$w_o^*(\lambda) = \left(\frac{\bar{1}^T \Sigma_p^{-1} \mu_p}{\lambda} \right) PP_O + \left(1 - \frac{\bar{1}^T \Sigma_p^{-1} \mu_p}{\lambda} \right) MV_O \quad (4.17)$$

Uyarı: Uygulamalarımızda olduğu gibi $\lambda = \left| \bar{1}^T \Sigma_p^{-1} \mu_p \right| > 0$ olsun. O zaman olabilirlik OV etkin portföy (EP_O), ya PP_O'ya eşittir ya da (2MV_O+PP_O)'ya eşit olarak bulunur.

Portföyde risksiz varlık bulunabiliyorken EP_o , (2.39)'a benzer olarak aşağıdaki gibi bulunur. Buna göre burada da Tek Fon Teoremi geçerlidir.

$$EP_o = \frac{\Sigma_p^{-1} \mu_p}{\lambda} = \left(\frac{\bar{1}^T \Sigma_p^{-1} \mu_p}{\lambda} \right) PP_o \quad (4.18)$$

Etkileşimsizlik varsayımı altında, Önerme 4.3'e göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir. Buna göre olabilirlik ortalaması ve varyansı zamanın lineer fonksiyonudur. Olabilirlik standart sapması ve beklenen performans için ise zamanın karekökü kuralı geçerlidir. Bu nedenle Bölüm 2'de ve Bölüm 3'te incelenen modellerde olduğu gibi önerilen olabilirlik OV modelinin sonucu da zamandan bağımsızdır.

$$E_p \left(\sum_{j=1}^t x_{i,j} \right) = t \tilde{\mu}_i, \forall i \quad (4.19)$$

$$Var_p \left(\sum_{j=1}^t x_{i,j} \right) = t \tilde{\sigma}_i^2, \forall i$$

4.2 Borsa İstanbul Üzerine Bir Uygulama

BIST 30 endeksindeki tüm holding hisse senetleri sırasıyla S1, S2, S3, S4, S5 ve S6 ile gösterilmiştir. Bunların 2016 yılındaki 52 hafta için logaritmik getirileri, Cuma günü kapanış fiyatları kullanılarak hesaplanmıştır. Ayrıca yıllık risksiz faiz oranı, Bloomberg gösterge faiz oranının yani 2 yıllık gösterge devlet tahvilinin faiz oranının 30 Aralık 2016 Cuma günü değeri olarak alınmıştır. Bu değer 0.1063'e eşittir. Daha sonra ek logaritmik getiriler, logaritmik getirilerden haftalık risksiz faiz oranı çıkarılarak bulunmuştur. Önerilen bulanık model bu veri seti kullanılarak tanıtılmıştır. Ayrıca risksiz varlık portföyde bulunamıyorken, OV modelinin ve önerilen bulanık modelin 2017 yılındaki karlılıkları ve performansları karşılaştırılmıştır. Burada eşit ağırlıklı portföy (EA) portföy seçimi probleminde alternatiflerden biridir, her bir portföy alternatifi için al ve tut stratejisi izlenmiştir ve λ parametresi 14.3890'a eşit alınmıştır.

Standart sapma, St.Sa. ile gösterilsin. Ek logaritmik getiriler ile ilgili örneklem istatistikleri Çizelge 4.1'de verilmiştir. Açıkça görüldüğü üzere bunların dağılımı çarpıktır. Bu durum eliptik dağılım varsayımıyla çelişmektedir. Bu nedenle bu veri seti

için, OV modeli yerine olabilirlik OV modelinin kullanılması daha iyi sonuçlar verebilir.

Çizelge 4.1 : Örneklem istatistikleri.

	Ortalama	St.Sa.	Çarpıklık	Basıklık	Medyan	Minimum	Maksimum
S1	0.0047	0.0695	1.0688	3.1174	-0.0019	-0.1471	0.2494
S2	0.0081	0.0515	0.1839	0.3567	-0.0012	-0.1136	0.1552
S3	0.0048	0.0398	-0.9764	2.0407	0.0112	-0.1307	0.0844
S4	0.0023	0.0459	-1.3664	4.1877	0.0033	-0.1815	0.0768
S5	0.0009	0.0446	-1.7222	6.6484	0.0022	-0.1954	0.0779
S6	-0.0049	0.0538	-0.5542	2.6271	-0.0098	-0.2041	0.1217

Pozitif tanımlı lineer korelasyon matrisi Çizelge 4.2’de verilmiştir. Buna göre söz konusu hisse senetlerinin logaritmik getirileri arasında pozitif lineer ilişki vardır.

Çizelge 4.2 : Örneklem lineer korelasyon matrisi.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
S1	1	0.2513	0.4263	0.4023	0.3093	0.1569
S2	0.2513	1	0.2017	0.2994	0.3344	0.2896
S3	0.4263	0.2017	1	0.7107	0.6608	0.4380
S4	0.4023	0.2994	0.7107	1	0.8819	0.5520
S5	0.3093	0.3344	0.6608	0.8819	1	0.5938
S6	0.1569	0.2896	0.4380	0.5520	0.5938	1

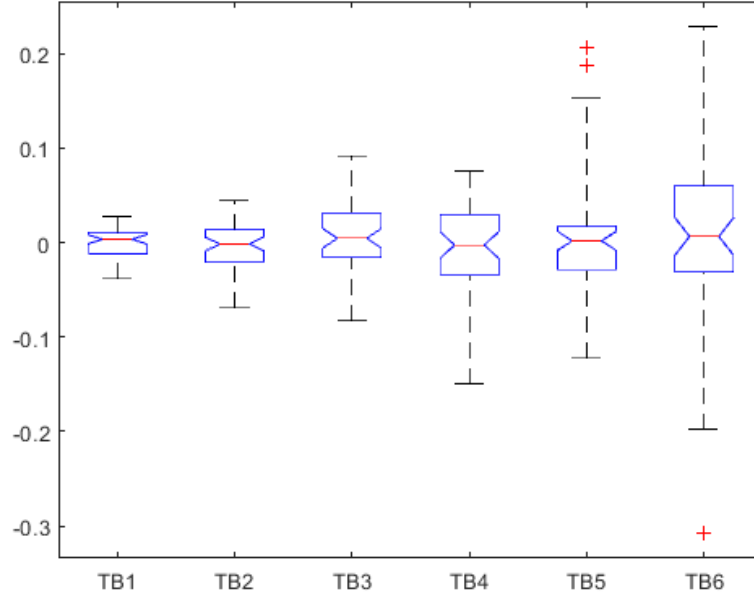
Pozitif tanımlı örneklem kovaryans matrisinin özdeğerleri sırasıyla 0.0002, 0.0006, 0.0013, 0.0022, 0.0036 ve 0.0081 olarak bulunmuştur. Bunlara karşı gelen ortonormal özvektörler (ÖV) Çizelge 4.3’te sırasıyla verilmiştir.

Çizelge 4.3 : Ortonormal özvektörler.

	ÖV1	ÖV2	ÖV3	ÖV4	ÖV5	ÖV6
S1	-0.0450	0.0901	-0.2273	0.0589	0.7929	0.5532
S2	0.0303	-0.0904	0.1500	-0.9384	-0.0753	0.2866
S3	-0.0739	-0.8634	0.2808	0.2332	-0.0747	0.3322
S4	0.7123	0.2970	0.3667	0.2016	-0.2050	0.4327
S5	-0.6950	0.3838	0.3291	0.1391	-0.2809	0.4039
S6	0.0342	-0.0531	-0.7773	0.0399	-0.4890	0.3888

Örneklem kovaryans matrisinin Özdeğer Ayrışımı yapıldıktan sonra, (4.1)’deki bilgi doğrultusunda temel bileşenler oluşturulmuştur. Bunların kutu grafikleri Şekil 4.1’de verilmiştir. Bunlara ait dışa düşen gözlemler ise üçüncü (birinci) çeyrekte, üç

çeyrekler açıklığından daha fazla (az) olan gözlemler olarak tanımlanmıştır.⁴ Burada kutu grafiklerinin bıyıkları, üst ve alt aşırıya kadar devam etmektedir. Temel bileşenler sırasıyla TB1, TB2, TB3, TB4, TB5 ve TB6 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.1 : Kutu grafikleri.

Buna göre marjinal olabilirlik dağılımlarının parametreleri; sırasıyla alt aşırı, örneklem ortalaması ve üst aşırı istatistikleri kullanılarak Çizelge 4.4'teki gibi belirlenmiştir. Görüldüğü üzere buradaki üçgensel bulanık sayılar simetrik değildir. Başka bir deyişle temel durumun, en kötü duruma ve en iyi duruma uzaklıkları birbirlerinden farklıdır. Bu nedenle olabilirlik OV modeli, OV modelinin aksine veri setindeki çarpıklığı dikkate alır.

Çizelge 4.4 : Marjinal olabilirlik dağılımlarının parametreleri.

	b	c	e
TB1	-0.0385	0.0006	0.0276
TB2	-0.0696	-0.0032	0.0441
TB3	-0.0829	0.0064	0.0918
TB4	-0.1493	-0.0058	0.0755
TB5	-0.1227	0.0044	0.1527
TB6	-0.1975	0.0060	0.2285

⁴ Medyan, veriler küçükten büyüğe doğru sıralandığında veri setini ortadan ikiye ayırır. Birinci (üçüncü) çeyrek ile medyan değer arasında gözlemlerin %25'i vardır. Çeyrekler açıklığı, üçüncü çeyrek ile birinci çeyrek arasındaki farktır ve standart sapmanın aksine dayanımlı bir merkezi yayılım ölçüsüdür.

Çizelge 4.5'te olabilirlik ortalama vektörü (μ_p), olabilirlik standart sapma vektörü (σ_p), beklenen performanslar (BP), (örneklem) ortalama vektörü (μ), (örneklem) standart sapma vektörü ve Sharpe oranları (SO) verilmiştir. Buna göre S2 (S3), en iyi (en iyi ikinci) beklenen performansa ve Sharpe oranına sahiptir. S6 ise her iki performans ölçüsü için de sıralamada son sıradadır.

Çizelge 4.5 : Hisse senetlerinin karşılaştırılması.

	μ_p	σ_p	BP	μ	σ	SO
S1	0.0105	0.0540	0.1949	0.0047	0.0695	0.0673
S2	0.0239	0.0410	0.5814	0.0081	0.0515	0.1572
S3	0.0064	0.0313	0.2059	0.0048	0.0398	0.1210
S4	-0.0037	0.0360	-0.1038	0.0023	0.0459	0.0512
S5	-0.0009	0.0349	-0.0263	0.0009	0.0446	0.0199
S6	-0.0053	0.0422	-0.1258	-0.0049	0.0538	-0.0903

Olabilirlik korelasyon matrisi Çizelge 4.6'daki gibi bulunmuştur. Bunun elemanları pozitifdir ve karşı gelen örneklem lineer korelasyonlarına oldukça yakındır.

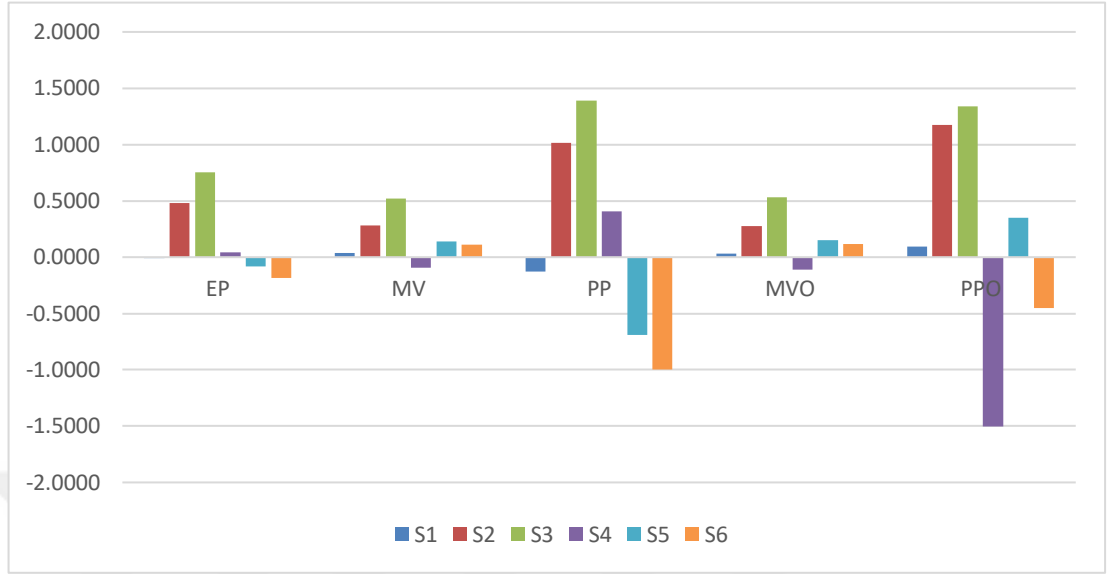
Çizelge 4.6 : Olabilirlik korelasyon matrisi.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
S1	1	0.2542	0.4371	0.4193	0.3293	0.1834
S2	0.2542	1	0.1930	0.2920	0.3291	0.2825
S3	0.4371	0.1930	1	0.7203	0.6696	0.4330
S4	0.4193	0.2920	0.7203	1	0.8948	0.5434
S5	0.3293	0.3291	0.6696	0.8948	1	0.5846
S6	0.1834	0.2825	0.4330	0.5434	0.5846	1

Portföy alternatiflerinin (EP, MV, PP, MV_O ve PP_O 'nun) ağırlık vektörleri Şekil 4.2'de sırasıyla verilmiştir. Burada EP, $(0.2660)PP+(0.7340)MV$ olarak bulunmuştur. EP_O ise seçilen λ değeri ve PP_O 'nun beklenen performansının pozitif olması nedeniyle PP_O 'ya eşittir.

Test periyodu için portföyler hakkındaki öngörüler Çizelge 4.7'deki gibidir. Burada ortalamanın ve olabilirlik ortalamasının zamanın lineer fonksiyonu olduğu ve diğer bilgiler için ise zamanın karekökü kuralının geçerli olduğu varsayılmıştır. Görüldüğü üzere MV ve MV_O ile ilgili tahminler birbirlerine oldukça yakındır. Bunun nedeni bunların ağırlık vektörlerinin birbirlerine oldukça yakın olmasıdır. Tüm portföyler için olabilirlik OV modeli, daha düşük (yüksek) risk (kar ve performans) öngörmektedir. EA düşük risk açısından tatmin edici olsa da yüksek karlılık ve performans kriterleri

açısından en kötü öngörüler, EA hakkındadır. Aslında MV ve MV_O portföyleri EA'ya, hem OV kriteri açısından hem de olabilirlik OV kriteri açısından baskındır.



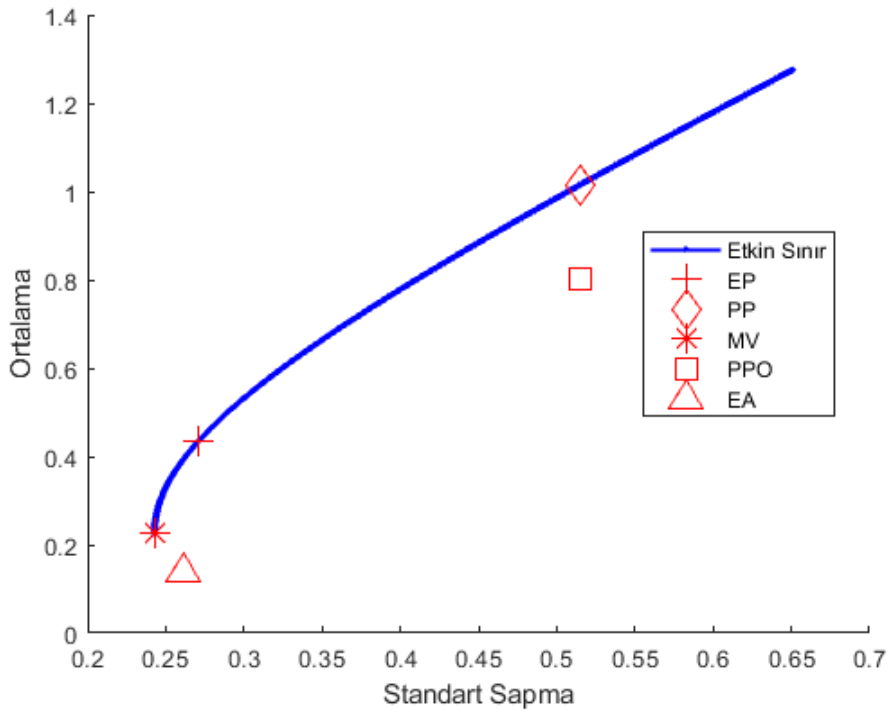
Şekil 4.2 : Ağırlık vektörleri.

Çizelge 4.7 : Portföyler hakkındaki öngörüler.

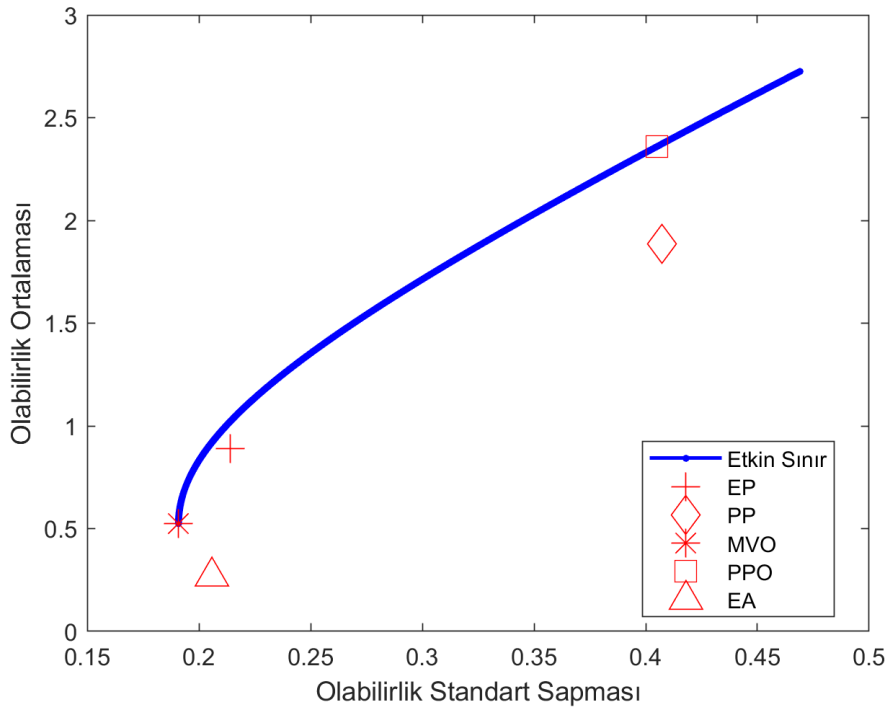
	EP	MV	PP	MV _O	PP _O	EA
Ortalama	0.4356	0.2255	1.0152	0.2221	0.8001	0.1384
Ol. Ortalaması	0.8885	0.5265	1.8875	0.5243	2.3584	0.2676
Standart Sapma	0.2712	0.2428	0.5150	0.2428	0.5154	0.2612
Ol. Standart Sapması	0.2140	0.1909	0.4072	0.1909	0.4049	0.2058
Sharpe Oranı	1.6064	0.9291	1.9712	0.9148	1.5523	0.5299
Beklenen Performans	4.1511	2.7577	4.6353	2.7468	5.8254	1.3000

Şekil 4.3'te OV etkin sınırının bir kısmı gösterilmiştir. Burada PP'nin Sharpe oranı pozitif ve İki Fon Teoremi geçerli olduğundan, tüm OV etkin portföylerde PP'nin uzun pozisyonunun bir nonnegatif skaler ile çarpılmış hali bulunur.

Şekil 4.4'te olabilirlik OV etkin sınırının bir kısmı gösterilmiştir. PP_O'nun beklenen performansı pozitif ve İki Fon Teoremi geçerli olduğundan, tüm olabilirlik OV etkin portföylerde PP_O'nun uzun pozisyonunun bir nonnegatif skaler ile çarpılmış hali bulunur. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'te görüldüğü üzere bu iki modelin sonuçları arasındaki fark, λ arttıkça (azaldıkça) azalmaktadır (artmaktadır).

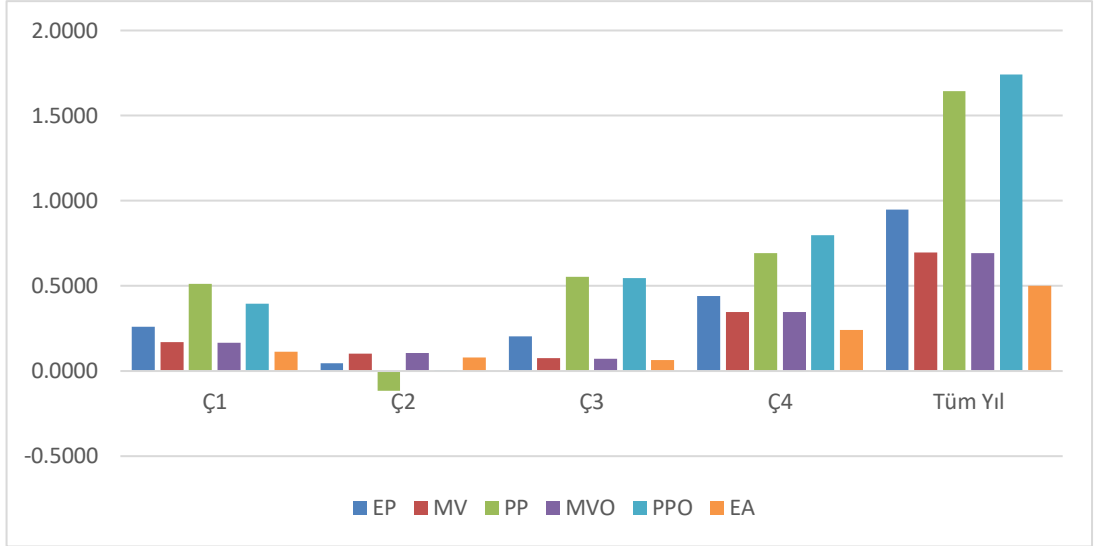


Şekil 4.3 : Ortalama – varyans etkin sınırı.



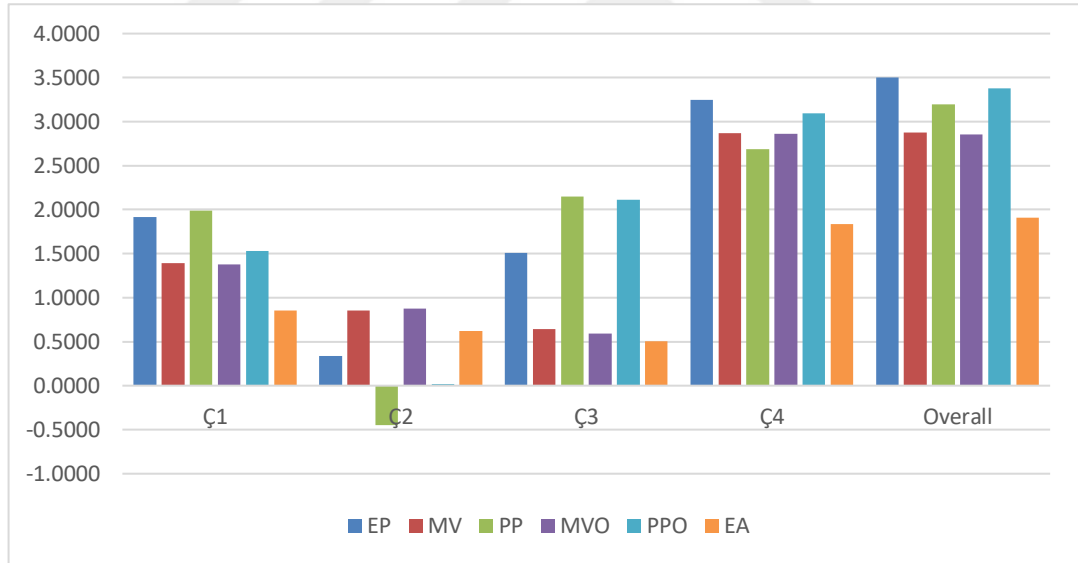
Şekil 4.4 : Olabilirlik ortalama – varyans etkin sınırı.

Test periyodu iç içe geçmeyen ve on üçer haftadan oluşan dört alt periyottan oluşsun. Bunlar sırasıyla Ç1, Ç2, Ç3 ve Ç4 ile gösterilmiştir. Portföylerin çeyrekse bazda gerçekleşmiş karları Şekil 4.5'te verilmiştir.



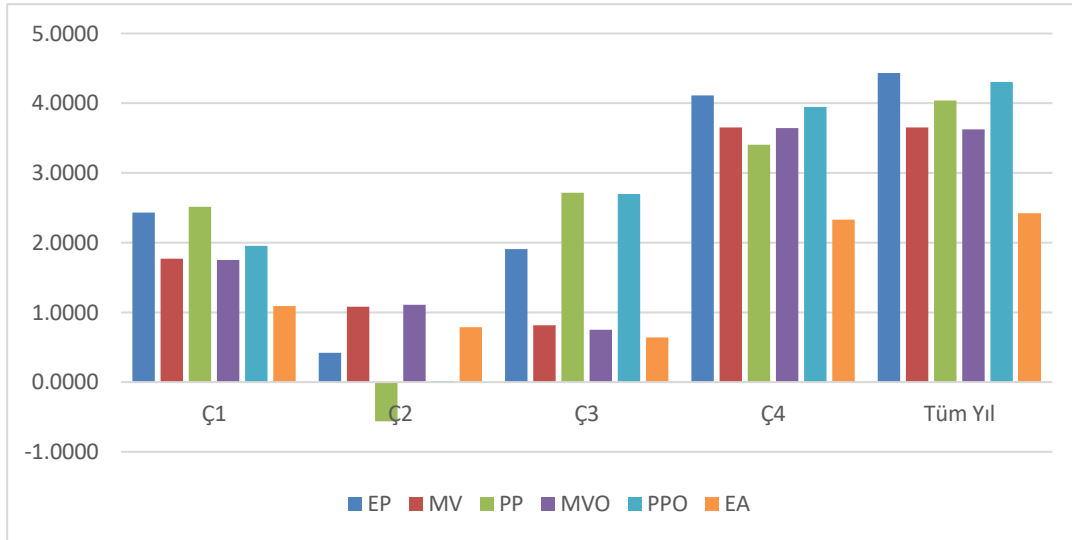
Şekil 4.5 : Gerçekleşmiş karlar.

Portföylerin çeyrekse bazda Sharpe oranları Şekil 4.6’da verilmiştir. Görüldüğü üzere tüm alternatifler farklı düzeylerde olsa da Ç1, Ç3 ve Ç4’te pozitif kara ve performansa sahiptir.



Şekil 4.6 : Sharpe oranları.

Portföylerin çeyrekse bazda gerçekleştirmiş performansları Şekil 4.7’de verilmiştir. Şekil 4.2, Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 birlikte değerlendirilsin. Buna göre riski minimize etme, performansı maksimum yapmaya oranla çeyrekse bazda daha stabil sonuçlar vermektedir. Bunun akla gelen ilk nedeni, riski minimize eden portföylerin ağırlık vektörlerinin daha düşük 1-normlu olmasıdır. Başka bir deyişle portföyde alınan tüm pozisyonların (işaretten bağımsız olarak) toplamının daha düşük seviyede olmasıdır.



Şekil 4.7 : Gerçekleşmiş performanslar.

Tüm yıl için sonuçlar Çizelge 4.8’de verilmiştir. Örneğimizde, EP portföyü hariç PPO (EA) tüm kriterlerde en iyi (en kötü) sonucu vermiştir. Aslında boğa piyasasında EA iyi bir alternatiftir ama örneğimizde olabilirlik OV modelinin kullanılması gibi çok daha iyi stratejiler de vardır. İki Fon Teoreminden kaynaklanan çeşitlendirme etkisi nedeniyle EP’nin performansı PPO’nun performansından biraz daha iyidir. Öte yandan PPO, EP’den çok daha karlıdır. Çünkü olabilirlik OV modeli, örneğimizde daha derin bir boğa piyasası öngörmüş ve bu öngörüsü de gerçekleşmiştir.

Çizelge 4.8 : Tüm yıl için sonuçlar.

	EP	MV	PP	MVO	PP _O	EA
Gerçekleşmiş Kar	0.9495	0.6977	1.6445	0.6923	1.7419	0.4992
Sharpe Oranı	3.5018	2.8742	3.1931	2.8513	3.3796	1.9112
Gerç. Performans	4.4362	3.6543	4.0386	3.6255	4.3025	2.4252

Örneğimizde; performansı maksimum yapma, riski minimum yapmaya göre daha iyi sonuçlar vermiştir. Bu durum gereğinden daha fazla tutucu olmanın bir maliyeti olduğu gerçeğiyle uyumludur. Ayrıca Çizelge 4.7’deki öngörülere paralel olarak MV, MVO’dan biraz daha iyi sonuçlar vermiştir. Öte yandan örneğimizde; olabilirlik OV modeli, OV modelinden genel olarak daha iyi sonuçlar vermiştir. Çünkü olabilirlik OV modeli (seçilen yaklaşımla birlikte) veri setindeki çarpıklığı dikkate almaktadır ve dışa düşen gözlemlerden daha az etkilenmektedir.

5. PARAMETRE BELİRSİZLİĞİ VE YENİ DAYANIKLI MODELLER

Muhtemel parametre belirsizliği nedeniyle bu bölümde, OV modelinin ve olabilirlik OV modelinin dayanıklı versiyonları önerilmiştir. Önerilen dayanıklı modellerde temel bileşenlerin ortalama vektörü kutu tipi bir belirsizlik kümesine aittir. Her bir portföy alternatifi için buradaki en kötü durum dikkate alınır. En kötü duruma göre karar vermenin maliyetini kontrol altına almak için ise bir belirsizlik parametresi tanımlanmıştır. Bu parametrenin belirlenmesinde ise kovaryans matrisin maksimum özdeğerine dayanan bir yaklaşım kullanılmıştır. Belirsizlik parametresi sıfır iken söz konusu modellerle bunların dayanıklı versiyonları özdeşdir. Bu nedenle önerilen dayanıklı modeller, söz konusu modellerin genel halidir. Olabilirlik OV modeli gibi önerilen dayanıklı modeller de Bölüm 4'te verilen şart altında %100 olasılıkla iyi tanımlıdır. Önerilen dayanıklı modellerin analitik çözümleri, portföyde risksiz varlık ve kısa pozisyon bulunabiliyorken elde edilmiştir. Ayrıca risksiz varlığın portföyde bulunmadığı durumlarda nümerik çözümler için başlangıç noktaları önerilmiştir.

Bu bölümün kalanı şu şekilde organize edilmiştir. Bölüm 5.1'de, önerilen dayanıklı modellerin teorisi oluşturulmuştur. Bölüm 5.2'de, BIST 30 endeksindeki tüm holding hisse senetlerinin 2016 yılına ait haftalık ek logaritmik getirileri kullanılarak önerilen dayanıklı modeller tanıtılmıştır. Ayrıca eğitim ve test periyotları sırasıyla 2016 ve 2017 yılları olmak üzere söz konusu modellerin ve önerilen dayanıklı versiyonlarının karlılıkları ve performansları karşılaştırılmıştır.

5.1 Önerilen Dayanıklı Modellerin Teorisi

Portföyde risksiz varlık ve kısa pozisyon bulunabilsin. (4.1)'deki ortogonal koordinat sistemi üzerinde OV optimal ağırlıklar, (2.39)'a benzer olarak aşağıdaki gibi bulunur.

Ayrıca $w = \tilde{V}\tilde{w}$ lineer eşleme olduğundan $EP = \tilde{V}\tilde{w}^*$ eşitliği geçerlidir.

$$\tilde{w}_i^*(\lambda) = \frac{\hat{\mu}_{x,i}}{\lambda \hat{\Lambda}_{i,i}}, \forall i \quad (5.1)$$

Benzer şekilde bu ortogonal koordinat sistemi üzerinde olabilirlik OV optimal ağırlıklar aşağıdaki gibi bulunur. Ayrıca $EP_o = \widehat{V}\tilde{w}_o^*$ eşitliği geçerlidir.

$$\tilde{w}_{o,i}^*(\lambda) = \frac{\tilde{\mu}_i}{\lambda \tilde{\sigma}_i^2}, \forall i \quad (5.2)$$

Kovaryans matris, yansız tahmincisine eşit olsun. r 'nin dağılımından bağımsız olarak Merkezi Limit Teoremine göre aşağıdaki bilgi geçerlidir (Johnson ve Wichern, 2007).

$$\hat{\mu}_x \sim^a N\left(\mu_x, \frac{1}{m} \hat{\Lambda}\right) \quad (5.3)$$

Çok değişkenli normal dağılımlar için sıfır korelasyon, bağımsızlığı garanti eder. (5.3)'teki asimptotik bağımsızlık nedeniyle temel bileşenlerin ortalama vektörünün belirsizlik kümesi, τ güven düzeyinde aşağıdaki kutu tipi küme olarak belirlenebilir.

$$\delta_i := \frac{z_{(1+\tau)/2}}{\sqrt{m}} \sqrt{\hat{\Lambda}_{i,i}}, \forall i \quad (5.4)$$

$$G_T = \left\{ \mu_x \mid \mu_{x,i}^L := \hat{\mu}_{x,i} - \delta_i \leq \mu_{x,i} \leq \mu_{x,i}^U := \hat{\mu}_{x,i} + \delta_i, \forall i \right\}$$

(2.48)'e benzer olarak önerilen dayanıklı OV modeli, ortogonal koordinat sisteminde aşağıdaki supremum - infimum problemiyle tanımlanmıştır.

$$\sup_{\tilde{w} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\mu_x \in G_T} \tilde{w}^T \mu_x - 0.5\lambda \left(\tilde{w}^T \hat{\Lambda} \tilde{w} \right) \quad (5.5)$$

(2.48) ve (2.49) arasındaki ilişkiye benzer olarak (5.5), aşağıdaki düzgün olmayan, kesin konkav maksimizasyon problemi ile özdeştir. Bunların optimal çözümleri ise Önerme 5.1'de verilmiştir.

$$\sup_{\tilde{w} \in \mathbb{R}^n} \tilde{w}^T \hat{\mu}_x - |\tilde{w}|^T \delta - 0.5\lambda \left(\tilde{w}^T \hat{\Lambda} \tilde{w} \right) \quad (5.6)$$

Önerme 5.1: İşaret fonksiyonu sgn ile gösterilsin. i . temel bileşenin ortalaması için (5.4)'de verilen alt (üst) sınır $\mu_{x,i}^L$ ($\mu_{x,i}^U$) iken bunun dayanıklı OV optimal ağırlığı (5.7)'deki gibi bulunur.

$$\tilde{w}_{D,i}^*(\lambda, \tau) = \begin{cases} \frac{\mu_{x,i}^L}{\lambda \Lambda_{i,i}}, \text{sgn}(\mu_{x,i}^L) = \text{sgn}(\mu_{x,i}^U) = 1 \\ \frac{\mu_{x,i}^U}{\lambda \Lambda_{i,i}}, \text{sgn}(\mu_{x,i}^L) = \text{sgn}(\mu_{x,i}^U) = -1 \\ 0, \text{sgn}(\mu_{x,i}^L \mu_{x,i}^U) \leq 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

İspat: (5.1) ve aşağıdaki bilgiler doğrultusunda (5.7) elde edilir. Ayrıca dayanıklı OV etkin portföy (EP_D) $\widehat{V}\tilde{w}_D^*(\lambda, \tau)$ olarak bulunur.

- i. Temel bileşenler lineer olarak ilişkili olmadığından ve $S = \mathbb{R}^n$ olduğundan, i . temel bileşenin dayanıklı OV optimal ağırlığı yalnızca bunun varyansına ve en kötü durumdaki ortalamasına bağlıdır.
- ii. Alt ve üst sınırlar pozitifse (negatifse), bunun uzun (kısa) pozisyonu optimal portföyde bulunur. Ayrıca (5.6)'daki mutlak değerli ifade nedeniyle bu alt (üst) sınır, bu uzun (kısa) pozisyonu belirlemede kullanılır. Başka bir deyişle, i . temel bileşenin dayanıklı OV optimal ağırlığı sifıra yaklaştırılır.
- iii. Eğer bu alt ve üst sınırlar için işaret fonksiyonu farklı değerler veriyorsa (i . temel bileşenin ortalaması τ güven düzeyinde istatistiksel olarak anlamlı değilse), bunun dayanıklı OV optimal ağırlığı sıfır olarak bulunur. Çünkü bunun uzun (kısa) pozisyonu herhangi bir portföyün varyansını artırır ama en kötü durumdaki ortalamasını artırmaz. Bu nedenle risksiz varlık, bunun tüm uzun (kısa) pozisyonlarına baskındır ve $S = \mathbb{R}^n$ olduğundan eğer gerekliyse bu tür pozisyonların yerine portföyde bulunabilir.

Önsav 4.2, Önerme 4.3 ve (5.4)'teki bilgiler doğrultusunda dayanıklı olabilirlik OV modeli aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\sup_{\tilde{w} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\mu_x \in G_T} \tilde{w}^T \left(\frac{b + 2\mu_x + e}{4} \right) - 0.5\lambda \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i^2 \tilde{\sigma}_i^2 \quad (5.8)$$

(2.48) ve (2.49) arasındaki ilişkiye benzer olarak (5.8), aşağıdaki düzgün olmayan, kesin konkav maksimizasyon problemi ile özdeştir.

$$\sup_{\tilde{w} \in \mathbb{R}^n} \tilde{w}^T \tilde{\mu} - 0.5 |\tilde{w}|^T \delta - 0.5 \lambda \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i^2 \tilde{\sigma}_i^2 \quad (5.9)$$

Önerme 5.1'e göre aşağıdaki bilgi geçerlidir. Ayrıca dayanıklı olabilirlilik OV etkin portföy (EP_{DO}) $\hat{V} \tilde{w}_{DO}^*(\lambda, \tau)$ olarak bulunur.

$$\tilde{w}_{DO,i}^*(\lambda, \tau) = \begin{cases} \frac{\tilde{\mu}_i - 0.5\delta_i}{\lambda \tilde{\sigma}_i^2}, \text{sgn}(\tilde{\mu}_i - 0.5\delta_i) = \text{sgn}(\tilde{\mu}_i + 0.5\delta_i) = 1 \\ \frac{\tilde{\mu}_i + 0.5\delta_i}{\lambda \tilde{\sigma}_i^2}, \text{sgn}(\tilde{\mu}_i - 0.5\delta_i) = \text{sgn}(\tilde{\mu}_i + 0.5\delta_i) = -1 \\ 0, \text{sgn}((\tilde{\mu}_i - 0.5\delta_i)(\tilde{\mu}_i + 0.5\delta_i)) \leq 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Uyarı: (5.6) ve (5.9)'da belirsizlik vektörü (δ) 0'a eşit ise sırasıyla OV modeli ve olabilirlilik OV modeli elde edilir. Bu nedenle önerilen dayanıklı modeller, söz konusu modellerin genel halidir. Özel olarak (2.39)'daki ve (5.7)'deki bilgiler doğrultusunda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir. Ayrıca belirsizlik parametresi (τ) sıfıra yaklaşırken, EP_D (EP_{DO}) portföyü de EP (EP_O) portföyüne sürekli bir şekilde yaklaşır.

$$EP = \frac{\hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}}{\lambda} = \frac{\hat{V} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{V}^T \hat{\mu}}{\lambda} = \hat{V} \left(\frac{\hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mu}_x}{\lambda} \right) = \hat{V} \tilde{w}_D^*(\lambda, 0) \quad (5.11)$$

τ arttıkça EP_D ve EP_{DO} 0'a yaklaşır. Halbuki en kötü durumla nadir olarak karşılaşılır ve gerektiğinden fazla tutucu olmanın bir maliyeti vardır (Huang ve diğ., 2010). Öte yandan Duran ve Bommarito (2011)'de, yüksek (düşük) piyasa oynaklığının paniği (fırtına öncesi sessizliği) işaret ediyor olabileceği belirtilmiştir. Söz konusu çalışmada, algoritmik bir alım satım stratejisi önerilmiş ve S&P 500 ile Russell 2000 endeksleri için kısa pozisyon sınırı varken yapılan iki farklı uygulamada, bu stratejinin kıyaslama stratejisinden hem daha yüksek ortalama getiri hem de daha düşük varyans kriterleri açısından çok daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Yapılan uygulamalarda S&P 500'deki 168 hisse senedinin 1998 – 2008 yılları arasındaki logaritmik getirileri ve Russel 2000'deki 213 hisse senedinin 1995 – 2007 arasındaki logaritmik getirileri kullanılmıştır. Yani faiz oranı pozitifken, etkin piyasa hipotezinin zayıf formunun ihlal edildiği zaman aralıklarının bulunduğu gösterilmiştir. Bu nedenle bu tez çalışmasında belirsizlik parametresinin, (5.12)'deki gibi tanımlanan π dikkate alınarak belirlenmesi

önerilmektedir. Örneğimizde olduğu gibi π , 1 veya $1/n$ 'e yakın değil iken τ çok yüksek olmamalıdır. Burada $\widehat{\Lambda}_{n,n}$ kovaryans matrisin maksimum özdeğeridir.

$$\pi = \frac{\widehat{\Lambda}_{n,n}}{\sum_{i=1}^n \widehat{\Lambda}_{i,i}} \quad (5.12)$$

Dayanıklı olabilirlik OV modelinde x_i 'nin marjinal olabilirlik dağılımı, kesin olarak bilinemez ve her i için en kötü durumda $\bar{X}_i = (b_i, c_i^{EKD}, e_i)$ üçgensel bulanık sayısına eşittir. Buna, (4.4)'e ve (5.2)'ye göre (5.10) ile (5.13) özdeş sonuç verir.

$$\tilde{w}_{DO,i}^*(\lambda, \tau) = \frac{b_i + 2c_i^{EKD} + e_i}{4\lambda\tilde{\sigma}_i^2}, \forall i \quad (5.13)$$

Marjinal olabilirlik dağılımının desteği, çekirdeğinin aksine tam olarak bilinmektedir. Çekirdeğinin en kötü durumdaki değeri ise (5.13)'teki bilgi doğrultusunda aşağıdaki gibi bulunur.

$$C_i^{EKD} = \left\{ c_i^{EKD} \mid c_i^{EKD} = \frac{4\tilde{w}_{DO,i}^*(\lambda, \tau)\lambda\tilde{\sigma}_i^2 - (b_i + e_i)}{2} \right\}, \forall i \quad (5.14)$$

Uyarı: (Olabilirlik) OV modelinin sonuçları belirtilen varsayımlar altında zamandan bağımsızdır. Bu tez çalışmasında varsayıldığı üzere belirsizlik parametresi zamanın kesin artan fonksiyonu olsun öyle ki (5.4) zamanın lineer fonksiyonu olsun. Buna göre bu bölümde önerilen dayanıklı modellerin sonuçları da zamandan bağımsızdır.

Uyarı: EP_D en az bir riskli varlık içersin. Bunun riskli varlık yapısı, λ 'dan bağımsızdır ve dayanıklı piyasa portföyü (PP_D) olarak adlandırılabilir. EP_{D0} en az bir riskli varlık içersin. Bunun riskli varlık yapısı da λ 'dan bağımsızdır ve dayanıklı olabilirlik piyasa portföyü (PP_{D0}) olarak adlandırılabilir. Karşı gelen etkin sınırlar ise risksiz varlık ve bunların lineer kombinasyonlarıyla elde edilir. Başka bir deyişle önerilen dayanıklı modeller için de Tek Fon Teoremi geçerlidir.

Portföyde risksiz varlık bulunmasın. O zaman dayanıklı OV modeli, ortogonal koordinat sisteminde aşağıdaki gibi verilir.

$$\sup_{\tilde{w}^T(\tilde{V}^T\bar{1})=1} \tilde{w}^T \hat{\mu}_x - |\tilde{w}|^T \delta - 0.5\lambda (\tilde{w}^T \hat{\Lambda} \tilde{w}) \quad (5.15)$$

(5.15)'in çözümü için yaklaşık bir değer (5.16)'da verilmiştir. Burada λ^+ pozitif veya negatif bir skaler olmak üzere $PP_D = \hat{V}\tilde{w}_D^*$ (λ^+, τ) eşitliği geçerlidir.

$$\tilde{w}_D^+(\lambda, \tau) \approx \hat{V}^T \left(\frac{\lambda^+}{\lambda} PP_D + \left(1 - \frac{\lambda^+}{\lambda}\right) \frac{\hat{\Sigma}^{-1}\bar{1}}{\bar{1}^T \hat{\Sigma}^{-1}\bar{1}} \right) \quad (5.16)$$

(5.15)'in nümerik çözümü için (5.16), başlangıç noktası olarak kullanılabilir. EP_D ise $w_D = \hat{V}\tilde{w}_D$ lineer eşlemesi ile bulunur.

Portföyde risksiz varlık bulunmasın. O zaman dayanıklı olabilirlik OV modeli, ortogonal koordinat sisteminde aşağıdaki gibi verilir.

$$\sup_{\tilde{w}^T(\tilde{V}^T\bar{1})=1} \tilde{w}^T \tilde{\mu} - 0.5|\tilde{w}|^T \delta - 0.5\lambda \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i^2 \tilde{\sigma}_i^2 \quad (5.17)$$

(5.17)'nin çözümü için yaklaşık bir değer (5.18)'de verilmiştir. Burada λ^{++} pozitif veya negatif bir skaler olmak üzere $PP_{D0} = \hat{V}\tilde{w}_{D0}^*$ (λ^{++}, τ) eşitliği geçerlidir.

$$\tilde{w}_{D0}^+(\lambda, \tau) \approx \hat{V}^T \left(\frac{\lambda^{++}}{\lambda} PP_{D0} + \left(1 - \frac{\lambda^{++}}{\lambda}\right) \frac{\Sigma_p^{-1}\bar{1}}{\bar{1}^T \Sigma_p^{-1}\bar{1}} \right) \quad (5.18)$$

(5.17)'nin nümerik çözümü için (5.18), başlangıç noktası olarak kullanılabilir. EP_{D0} ise $w_{D0} = \hat{V}\tilde{w}_{D0}$ lineer eşlemesi ile bulunur.

5.2 Borsa İstanbul Üzerine Bir Uygulama

Önerilen dayanıklı modeller, Bölüm 4.2'deki veri seti kullanılarak tanıtılmıştır. Ayrıca risksiz varlık portföyde bulunabiliyorken, söz konusu modellerin ve önerilen dayanıklı versiyonlarının 2017 yılındaki karlılıkları ve performansları karşılaştırılmıştır. Bölüm 4.2'de olduğu gibi her bir portföy alternatifi için al ve tut stratejisi izlenmiştir ve λ parametresi 14.3890'a eşit alınmıştır. Ayrıca 2017'nin ilk haftası için τ parametresi 0.8 olarak alınmıştır. Çünkü π , 0.5055'e eşit bulunmuştur ve 1/6 veya 1'e yakın değildir.

Marjinal olabilirlik dağılımlarının temel durumdaki parametreleri; sırasıyla temel bileşenlerin alt aşırı, örneklem ortalaması ve üst aşırı istatistikleri kullanılarak Çizelge 5.1'deki gibi belirlenmiştir. Burada ayrıca önerilen dayanıklı modeller için $\tau=0.8$ iken bulunan δ vektörü verilmiştir. Görüldüğü üzere c vektörünün elamanlarının mutlak değeri, δ vektörünün karşı gelen elemanlarından büyük değildir. Başka bir deyişle temel bileşenlerin ortalamaları, verilen güven düzeyinde istatistiksel olarak anlamlı değildir. Bu nedenle EP_D her λ için sadece risksiz varlıktan oluşur.

Çizelge 5.1 : Temel durumdaki parametreler.

	b	c	e	δ
TB1	-0.0385	0.0006	0.0276	0.0027
TB2	-0.0696	-0.0032	0.0441	0.0043
TB3	-0.0829	0.0064	0.0918	0.0065
TB4	-0.1493	-0.0058	0.0755	0.0083
TB5	-0.1227	0.0044	0.1527	0.0107
TB6	-0.1975	0.0060	0.2285	0.0160

Marjinal olabilirlik dağılımlarının en kötü durumdaki parametreleri, sırasıyla temel bileşenlerin alt aşırı, (5.14) ve üst aşırı istatistikleri kullanılarak Çizelge 5.2'deki gibi belirlenmiştir. Görüldüğü üzere burada da üçgensel bulanık sayılar simetrik değildir. Başka bir deyişle olabilirlik OV modeli gibi dayanıklı olabilirlik OV modeli de veri setindeki çarpıklığı dikkate alır.

Çizelge 5.2 : En kötü durumdaki parametreler.

	b	c^{EKD}	e
TB1	-0.0385	0.0032	0.0276
TB2	-0.0696	0.0012	0.0441
TB3	-0.0829	0.0000	0.0918
TB4	-0.1493	0.0025	0.0755
TB5	-0.1227	-0.0063	0.1527
TB6	-0.1975	-0.0100	0.2285

Risksiz varlık RV ile gösterilsin. Portföy alternatiflerinin (EP , EP_O , EP_{DO} , A1 ve A2'nin) ağırlık vektörleri Şekil 5.1'de sırasıyla verilmiştir. A1 (A2), EP_{DO} 'nun daha az (çok) tutucu alternatifidir ve $\tau=0.5$ ($\tau=0.99$) için bulunan dayanıklı olabilirlik OV etkin portföydür. Görüldüğü üzere tüm portföylerde S2 ve S3 pozitif ağırlığa sahiptir. Ayrıca dayanıklı olabilirlik OV etkin portföylerin 1-normu, modelin tutuculuğu (eşdeğer olarak τ parametresinin değeri) arttıkça azalmaktadır.



Şekil 5.1 : Ağırlık vektörleri II.

Zamanın karekökü kuralına göre, 2017 yılı için performans öngörülerinin alt ve üst sınırları aşağıdaki gibidir. Bu alt ve üst sınırların (eşdeğer olarak en kötü ve en iyi durum için öngörülerin) ortalaması ise temel durumdaki öngörülere karşı gelmektedir. Açıkça görüldüğü üzere aralık değerli olabilirlilik OV analizi, kesin bir boğa piyasası öngörmektedir. Buna karşın aralık değerli OV analizi piyasanın yönünü tam olarak belirleyememiştir. Bu durumun temel nedeni (aralık değerli) olabilirlilik OV analizinin, (aralık değerli) OV analizinin aksine veri setindeki çarpıklığı dikkate almasıdır. Ayrıca modelin tutuculuğundaki artışın, daha belirli performans öngörülerine neden olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle tutuculuk arttıkça alt ve üst sınırlar arasındaki fark azalmaktadır.

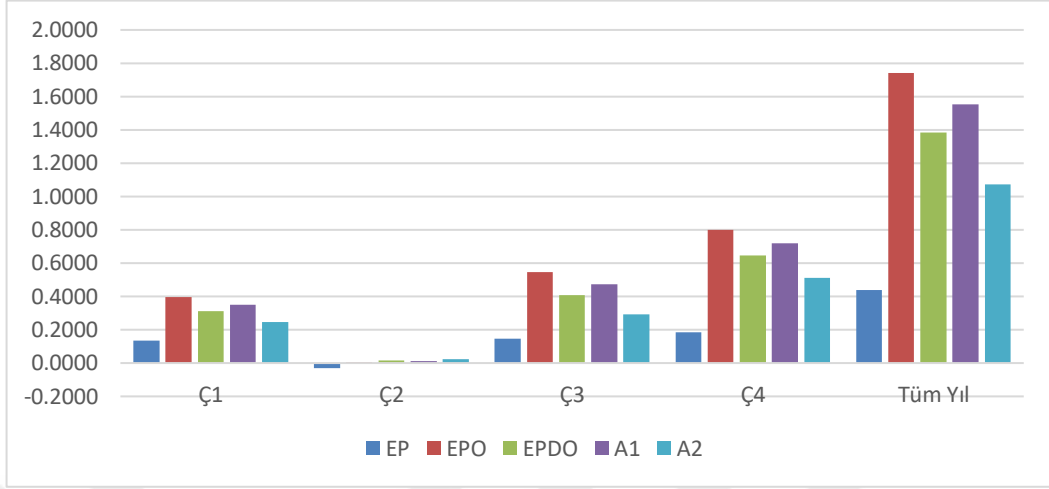
Çizelge 5.3 : Performans öngörülerini.

	EP	EP _O	EP _{DO}	A1	A2
SO için alt sınır	-0.8811	-1.2576	-0.9673	-1.1374	-0.5073
SO için üst sınır	4.8234	4.3681	3.8647	4.1707	2.9841
BP için alt sınır	2.8316	4.0368	4.1447	4.1109	3.9610
BP için üst sınır	6.4391	7.6140	7.2030	7.4807	6.1590

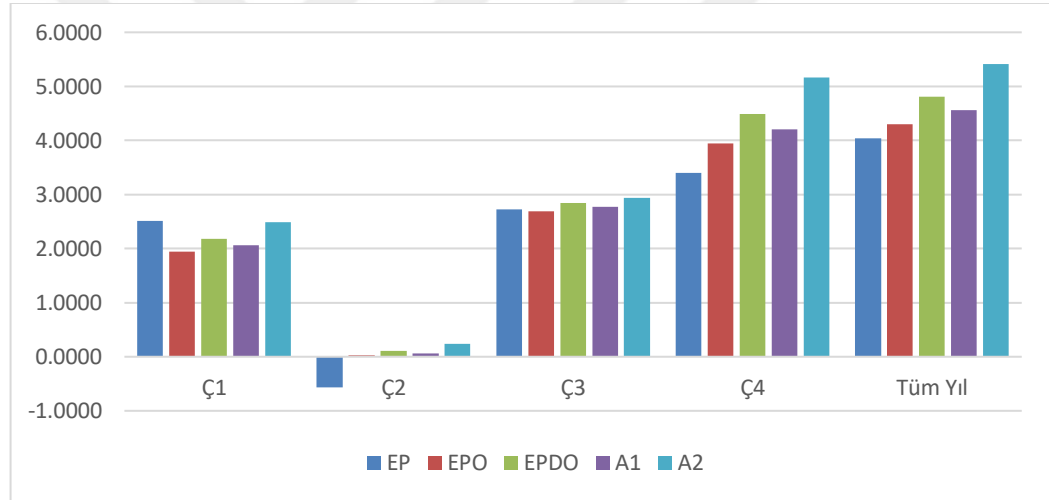
Uyarı: EP_D (EP_{DO}) Sharpe oranının (beklenen performansın) alt sınırını maksimum yapar. EP (EP_O) Sharpe oranının (beklenen performansın) temel durumdaki değerini maksimum yapar. Örneğimizde, riskten kaçınma katsayısından bağımsız olarak EP_D sadece risksiz varlıktan oluşur. Başka bir deyişle PP_D yoktur. Çünkü riskli varlık içeren tüm portföyler için dayanıklı Sharpe oranı nonpozitifdir.

Portföy alternatiflerinin gerçekleşmiş karları, gerçekleşmiş performansları ve Sharpe oranları sırasıyla Şekil 5.2, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te verilmiştir. Görüldüğü üzere

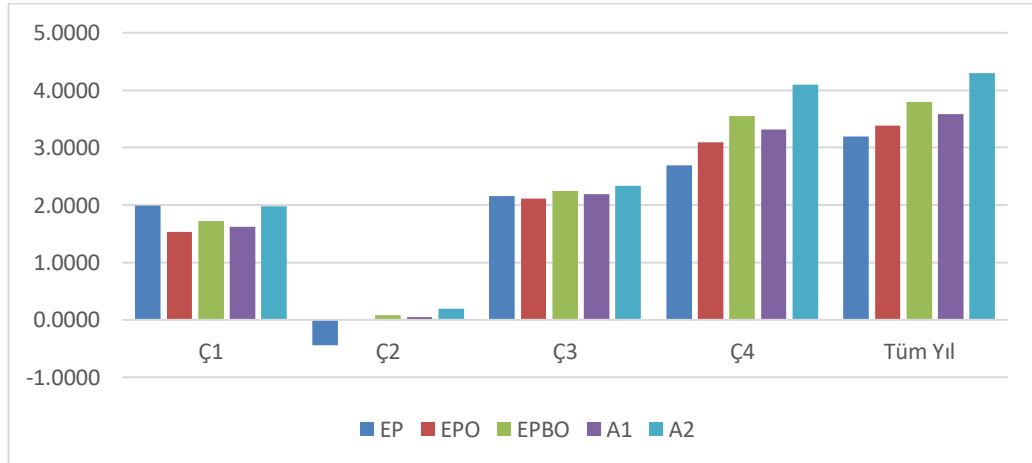
çeyreksel bazda ve tüm yıl için elde edilen sonuçlar neredeyse aynı sıradadır. Başka bir deyişle yıllık bazda yaptığımız karşılaştırmalar çeyreksel bazda tutarlıdır.



Şekil 5.2 : Gerçekleşmiş karlar II.



Şekil 5.3 : Gerçekleşmiş performanslar II.



Şekil 5.4 : Sharpe oranları II.

Tüm yıl için sonuçlar Çizelge 5.4'te verilmiştir. PP'nin (PP_O'nun) Çizelge 4.8'te verilen performansları ve EP'nin (EP_O'nun) burada verilen performansları aynıdır. Çünkü Tek Fon Teoremine göre bunların riskli varlık yapıları özdeşdir.

Çizelge 5.4 : Tüm yıl için sonuçlar II.

	EP	EP _O	EP _{DO}	A1	A2
Gerçekleşmiş Kar	0.4374	1.7419	1.3850	1.5540	1.0732
Sharpe Oranı	3.1931	3.3796	3.7984	3.5876	4.3018
Gerç. Performans	4.0386	4.3025	4.8082	4.5551	5.4163

Örneğimizde; belirsizlik parametresindeki artış, dayanıklı olabilirlik OV etkin portföylerin karlılığını (performansını) azaltmaktadır (artırmaktadır). Yani örneğimiz kapsamındaki dayanıklı olabilirlik OV analizinde, karlılık ve performans arasında bir ödünleşim bulunmuştur.⁵ Karlılığın azalması, gereğinden daha fazla tutucu olmanın bir maliyeti olduğu gerçeğiyle uyumludur. Performanstaki artışının nedeni ise optimal portföylerin 1-normlarındaki azalış olabilir. Bu bilgiye benzer olarak De Miguel ve diğ. (2009)'da portföy normlarını kısıtlayarak MV'nin performansının artırılacağı gösterilmiştir. Bu ödünleşime paralel olarak EP_{DO} ile EP_O arasında net bir üstünlük durumu yoktur. Bununla birlikte tüm kriterler için bu iki portföy, EP'den üstündür. Başka bir deyişle örneğimizde; (dayanıklı) olabilirlik OV analizi, (dayanıklı) OV analizinden daha iyi sonuçlar vermiştir.

⁵ Belirsizlik parametresinin ve dolayısıyla modelin tutuculuğunun belirlenmesinde, kovaryans matrisinin maksimum özdeğerine dayanan yaklaşım kullanılabilir. Böylece en kötü duruma göre karar vermenin maliyeti kontrol altına alınabilir ve (eğer mevcut ise) bu tip bir ödünleşimde alınacak yer belirlenir.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının üç farklı özgün değeri vardır. Birincisi; risk faktörlerinin marjinal olabilirlik dağılımlarının üçgensel bulanık sayılar ile verildiği varsayımı altında, eski olabilirlik OV modelinin matematiksel analizi yapılmıştır. Böylece literatürdeki boşluk doldurulmuştur. Bu kapsamda performansı ya da faydayı maksimum yapan portföyler analitik olarak elde edilmiştir. Ayrıca bu modelin verdiği farklı etkin sınır yapıları örneklerle açıklanmıştır. Bununla birlikte bu modelin önemli sorunları olduğu gösterilmiştir. İkincisi, bu sorunları ortadan kaldırmak için yeni bir olabilirlik OV modeli önerilmiştir. Önerilen bulanık model, OV modelinin çözüm yollarıyla çözülebildiğinden oldukça kullanışlıdır. Üçüncüsü, OV modelinin ve önerilen bulanık modelin dayanıklı versiyonları oluşturulmuştur. Ayrıca bunların analitik çözümleri, portföyde risksiz varlık ve kısa pozisyon bulunabiliyorken elde edilmiştir. Bunlar muhtemel parametre belirsizliği ile piyasa şoklarını dikkate alır ve söz konusu modellerin genel halidir.

Önerilen bulanık modelin başarısı, marjinal olabilirlik dağılımlarının geleceği hangi oranda doğru yansıttığına bağlıdır. Bunların belirlenmesi ise bilim olduğu kadar aynı zamanda sanattır ve farklı yaklaşımlar önerilse de aslında uygulayıcıya bırakılır. (OV modeli bile seçilen marjinal olabilirlik dağılımlarına bağlı olarak önerilen bulanık model ile elde edilebilir.) Başka bir deyişle önerilen bulanık model, kullanıcıya büyük oranda esneklik sağlar ve doğru ellerde değerli bir araç olabilir. Öte yandan pratikte, çok başarılı uzmanların geleceği öngörmedeki başarısı bile %70'leri geçmemektedir. Bununla birlikte bulanık yaklaşımların finansal kurumlar tarafından pratikte kullanımı için takip edilebilirlik ve hesap verebilirlik yeterince yoktur. Bu nedenlerden ötürü; önerilen bulanık modelin veya bunun dayanıklı versiyonunun kullanımı, pratikte ciddi başarısızlıklara neden olabilir.

Bu çalışmada önerilen tüm modellerde kovaryans matrisin, yansız tahmincisine eşit olduğu varsayılmıştır. (Burada zamana bağlı kovaryans matris de kullanılabilir.) Öte yandan ortalama vektörüne ek olarak kovaryans matrisin de bir belirsizlik kümesine ait olduğu dayanıklı OV modelleri literatürde mevcuttur. Çünkü bu matris kesin olarak

bilinse bile muhtemel piyasa şokları bunu değiştirebilir. Ayrıca önerilen modeller yalnızca örneklem kovaryans matrisinin özdeğerleri ayrık iken iyi tanımlıdır. Bu iki sınırlılık ortadan kaldırılamaz ve önerilen modellerin başarısını etkileyebilir.

Bu tez çalışmasındaki uygulamaların temel amacı önerilen modellerin tanıtılmasıdır. Uygulamalarda; eğitim ve test süreleri birer yıllık çok kısa sürelerdir ve sadece BIST 30 holding hisselerinin verileri kullanılmıştır. Bu nedenle örneğimiz kapsamında elde edilen sonuçlar, 2016 ile 2017 yıllarına veya BIST 30 holding hisselerine has özel durumlara bağlı olabilir. Başka bir deyişle bu tez çalışmasında örneklem dışı analiz yapılmamıştır ve örneğimiz kapsamında elde edilen sonuçların genelleştirilmesi için yeterli veri mevcut değildir. Uygulamalarda açığa satışın serbest olduğu varsayılmıştır. Öte yandan açığa satış bilindiği üzere çok riskli bir işlemdir ve düzenleyici kurumlar tarafından kısmen veya tamamen sınırlandırılabilir. Gelecekteki çalışmalarda daha kapsamlı sonuçlar elde edebilmek için örneklem dışı analizler yapılabilir ve açığa satış üzerindeki sınırlamalar değiştirilebilir.

Önerilen bulanık modelde ve bunun dayanıklı versiyonunda, temel bileşenlerin değer alma aralığının kesin olarak bilindiği varsayılmıştır. Gelecekteki çalışmalarda bu sınırlılığı ortadan kaldırmak için temel bileşenlerin marjinal olabilirlik dağılımları, üçgensel bulanık sayılar yerine aralık değerli bulanık sayılarla verilebilir. Böylece bu modellerin iyimser ve kötümser yatırımcılar için varyantları da oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

- Asness, C.** (2004). *Short Selling: Strategies, Risks, And Rewards*. John Wiley & Sons.
- Bajalinov, E. B.** (2013). *Linear-Fractional Programming: Theory, Methods, Applications and Software*. Springer.
- Berkowitz, J.** (2000). A coherent framework for stress-testing. *Journal of Risk*, 2, 1-11.
- Bhattacharyya, R., Kar, S. ve Majumder, D. D.** (2011). Fuzzy mean–variance–skewness portfolio selection models by interval analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(1), 126-137.
- Biswas, A., Verma, S. ve Ojha, D. B.** (2017). Optimality and Convexity Theorems for Linear Fractional Programming Problem. *International Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12(3), 911-916.
- Breuer, T.** (2006). Providing against the worst: Risk capital for worst case scenarios. *Managerial Finance*, 32(9), 716-730.
- Breuer, T.** (2008). Overcoming dimensional dependence of worst case scenarios and maximum loss. *Journal of Risk*, 11(1), 79-92.
- Breuer, T. ve Csiszar, I.** (2013). Systematic stress tests with entropic plausibility constraints. *Journal of Banking & Finance*, 37(5), 1552-1559.
- Breuer, T., Jandacka, M., Rheinberger, K. ve Summer, M.** (2009). How to find plausible, severe, and useful stress scenarios. *International Journal of Central Bank*, 5(3), 205-224.
- Bykadorov, I. A.** (1994). On Quasiconvexity In Fractional Programming. In S. Komlosi, T. Rapcsak ve S. Schaible (Eds.). *Generalized Convexity* (Vol. 405, pp. 281-293). Springer.
- Carlsson, C. ve Fuller, R.** (2001). On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 122, 315-326.
- Carlsson, C., Fuller, R. ve Majlender, P.** (2002). A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. *Fuzzy Sets and Systems*, 131(1), 13-21.
- Carlsson, C., Fuller, R. ve Majlender, P.** (2005). On possibilistic correlation. *Fuzzy Sets and Systems*, 155(3), 425-445.
- Chicheportiche, R. ve Bouchaud, J. P.** (2012). The joint distribution of stock returns is not elliptical. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 15(3), 1250019.
- Corazza, M. ve Nardelli, C.** (2019). Possibilistic mean–variance portfolios versus probabilistic ones: the winner is... *Decisions in Economics and Finance*, 42, 51-75.

- Deb, K.** (2001). *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons.
- De Miguel, V., Garlappi, L., Nogales, F. J. ve Uppal, J.** (2009). A generalized approach to portfolio optimization: improving performance by constraining portfolio norms. *Management Science*, 55(5), 798-812.
- Dubois, D.** (2006). Possibility theory and statistical reasoning. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(1), 47-69.
- Dubois, D. ve Prade, H.** (1981). Additions of interactive fuzzy numbers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4), 926-936.
- Duran, A.** (2006). *Overreaction behavior and optimization techniques in mathematical finance* (Doctoral dissertation). University of Pittsburgh.
- Duran, A. ve Bommarito, M. J.** (2011). A profitable trading and risk management strategy despite transaction costs. *Quantitative Finance*, 11(6), 829-848.
- Duran, A. ve Caginalp, G.** (2007). Overreaction diamonds: Precursors and aftershocks for significant price changes. *Quantitative Finance*, 7(3), 321-342.
- Eichner, T. ve Wagener, A.** (2005). Notes and Comments: Measures of risk attitude: correspondences between mean-variance and expected-utility approaches. *Decisions in Economics and Finance*, 28(1), 53-65.
- Embrechts, P., McNeil, A. ve Straumann, D.** (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, 1, 176-223.
- Fuller, R., Mezei, J. ve Varlaki, P.** (2011). An improved index of interactivity for fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 165(1), 50-60.
- Frahm, G.** (2004). *Generalized elliptical distributions: theory and applications* (Doctoral dissertation). Universität zu Köln.
- Frahm, G. ve Jaekel, U.** (2008). Tyler's M-estimator, random matrix theory, and generalized elliptical distributions with applications to finance. *Discussion Papers in Econometrics and Statistics*, No. 2/07.
- Garlappi, L., Uppal, R. ve Wang, T.** (2006). Portfolio selection with parameter and model uncertainty: A multi-prior approach. *The Review of Financial Studies*, 20(1), 41-81.
- Girko, V. L.** (2018). *An Introduction to Statistical Analysis of Random Arrays*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.
- Goldfarb, D. ve Iyengar, G.** (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Research*, 28(1), 1-38.
- Huang, D., Zhu, S., Fabozzi, F. J. ve Fukushima, M.** (2010). Portfolio selection under distributional uncertainty: a relative robust CVaR approach. *European Journal of Operational Research*, 203(1), 185-194.
- Johnson, R. A. ve Wichern, D.** (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall.

- Jolliffe, I. T.** (2002). *Principal Component Analysis*. Springer.
- Jorion, P.** (1986). Bayes-Stein estimation for portfolio analysis. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21(3), 279-292.
- Jorion, P.** (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill.
- Kim, W. C., Fabozzi, F. J., Cheridito, P. ve Fox, C.** (2014). Controlling portfolio skewness and kurtosis without directly optimizing third and fourth moments. *Economics Letters*, 122(2), 154-158.
- Klir, G. ve Yuan, B.** (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Prentice Hall.
- Kopa, M.** (2013). *Stochastic dominance in portfolio efficiency testing* (Habilitation thesis). Charles University in Prague.
- Kosinski, W.** (2006). On fuzzy number calculus. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 16, 51-57.
- Landsman, Z. M. ve Valdez, E. A.** (2003). Tail conditional expectations for elliptical distributions. *North American Actuarial Journal*, 7(4), 55-71.
- Levy, H.** (2016). *Stochastic Dominance: Investment Decision Making Under Uncertainty*. Springer.
- Li, X., Guo, S. ve Yu, L.** (2015). Skewness of fuzzy numbers and its applications in portfolio selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(6), 2135-2143.
- Liu, B.** (2006). A survey of credibility theory. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 5(4), 387-408.
- Markowitz, H.** (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Mina, J. ve Xiao, J. Y.** (2001). Return to RiskMetrics: the evolution of a standard. *RiskMetrics Group*, 1, 1-11.
- Morrison, J. B. ve Pyle, D. H.** (1978). Interest rate risk and the regulation of financial institutions. *NBER Working Paper*, No. 266.
- Okhrin, Y. ve Schmid, W.** (2006). Distributional properties of portfolio weights. *Journal of Econometrics*, 134(1), 235-256.
- Oksendal, B.** (2000). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer.
- Pflug, G. C.** (2000). Some Remarks On The Value-at-risk And the Conditional Value-at-risk. In S. P. Ursayev (Eds.). *Probabilistic Constrained Optimization* (Vol. 49, pp. 272-281). Springer.
- Pistovcak, F. ve Breuer, T.** (2004). Using Quasi-Monte Carlo Scenarios In Risk Management. In Niederreiter H. (Eds.). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2002* (pp. 379-392). Springer.
- Rockafellar, R. T. ve Uryasev, S.** (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1443-1471.
- Roman-Flores, H., Barros, L. C. ve Bassanezi, R. C.** (2001). A note on Zadeh's extensions. *Fuzzy Sets and Systems*, 117(3), 327-331.

- Shigeta, Y.** (2017). Portfolio selections under mean-variance preference with multiple priors for means and variances. *Annals of Finance*, 13(1), 97-124.
- Steuer, R. E., Qi, Y. ve Hirschberger, M.** (2006). Portfolio optimization: New capabilities and future methods. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 76(2), 199-220.
- Studer, G.** (1997). *Maximum loss for measurement of market risk* (Doctoral dissertation). ETH Zurich.
- Tanaka, H. ve Guo, P.** (1999). Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. *European Journal of Operational Research*, 114(1), 115-126.
- Tanaka, H., Guo, P. ve Türksen, I. B.** (2000). Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems*, 111(3), 387-397.
- Tanaka, H., Nakayama, H. ve Yanagimoto, A.** (1995). Possibility portfolio selection. *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, (pp. 813-818). Japan, Yokohama, March 20-24.
- Taş, O., Kahraman, C. ve Güran, C. B.** (2016). A Scenario Based Linear Fuzzy Approach in Portfolio Selection Problem: Application in the Istanbul Stock Exchange. *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*, 26(3-5), 269-294.
- Tütüncü, R. H. ve Koenig, M.** (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132(1-4), 157-187.
- Zhang, W. G.** (2007). Possibilistic mean–standard deviation models to portfolio selection for bounded assets. *Applied Mathematics and Computation*, 189(2), 1614-1623.
- Zhang, W. G., Zhang, X. L. ve Xiao, W. L.** (2009). Portfolio selection under possibilistic mean–variance utility and a SMO algorithm. *European Journal of Operational Research*, 197(2), 693-700.
- Zhang, Y., Li, X. ve Guo, S.** (2018). Portfolio selection problems with Markowitz’s mean–variance framework: a review of literature. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 17(2), 125-158.
- Zimmermann, H. J.** (2001). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Springer.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Furkan Göktaş
Doğum Tarihi ve Yeri : 10.04.1988 / Karabük
E-posta : goktasfurkan78@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2012, İTÜ, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği
2012, İTÜ, İşletme Fakültesi, İşletme Mühendisliği
- **Yüksek lisans** : 2014, İTÜ, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, Matematik Mühendisliği Programı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2011-2012 Eğitim-Öğretim Yılı İşletme Mühendisliği Lisans Programı Birinciliği

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Göktaş, F., Duran. A.** 2019. Eski Olabilirlik Ortalama – Varyans Modelinin Matematiksel Analizi. *II. Uluslararası BOR Konferansı*, Eylül 4-6, 2019 İzmir, Türkiye.
- **Göktaş, F., Duran. A.** basımda. Olabilirlik Ortalama – Varyans Modelinin Matematiksel Analizi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*.
- **Göktaş, F., Duran. A.** 2019. A New Possibilistic Mean-Variance Model Based On The Principal Components Analysis: An Application On The Turkish Holding Stocks. *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*, 32(5-6), 455-476.
- **Göktaş, F., Duran. A.** in press. New Robust Portfolio Selection Models Based On The Principal Components Analysis: An Application On The Turkish Holding Stocks. *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*.

