

CİSİM GENİŞLEMELERİ VE ORİGAMI ÇİZİMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu ŞANSAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ergün YARANERİ

HAZİRAN 2019

CİSİM GENİŞLEMELERİ VE ORİGAMI ÇİZİMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Burcu ŞANSAN
(509981009)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ergün YARANERİ

HAZİRAN 2019

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509981009 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Burcu ŞANSAN, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “CİSİM GENİŞLEMELERİ VE ORİGAMİ ÇİZİMLERİ ” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Ergün YARANERİ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Dr. Öğr. Üyesi Fatma ALTUNBULAK AKSU**
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

Doç. Dr. Enver ÖZDEMİR
İstanbul Teknik Üniversitesi

.....

Teslim Tarihi : **3 Mayıs 2019**
Savunma Tarihi : **12 Haziran 2019**





Kendime ve Can' a



ÖNSÖZ

1998 yılında kazandığım yüksek lisans programını o zamanın koşullarında devam edememiştim. Doğru zaman ve doğru tez konusuyla başladığım işimi bitirmek için eğitim hayatıma geri döndüm. Beni destekleyenlere; "Okumanın yaşı yok" diyerek beni motive edenlere, "Okumak isteyeneye kapımız açık" diyenlere, bana "Hocam" diye hitap edip, beni gülümseten kantin görevlilerine, kütüphane çalışanlarına, çok değerli hocalarıma, ders arkadaşlarıma ve aileme teşekkür ederim.

Çalışmak istediğim konu olan origamide bana yol gösteren Atabey Kaygun'a, çalışmalarında birlikte ilerlediğimiz danışman hocam Ergün Yaraneri' ne sonsuz teşekkür ederim.

Burcu ŞANSAN



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GEOMETRİK ÇİZİMLER.....	1
1.1 Temel Çizimler	1
1.2 Çizilebilir Sayılar.....	2
1.3 4 Ana Geometrik Problem.....	8
1.3.1 Dairenin alanına eşit alanlı kare çizebilmek	8
1.3.2 Verilen bir küpün 2 katına eşit yeni bir küp çizmek	9
1.3.3 Herhangi bir açığı 3 eşit parçaya ayırmak	9
1.3.4 Düzgün Poligon Çizilmesi	11
2. ORİGAMİ ÇİZİMLER.....	13
2.1 Origami Aksiyomları.....	13
2.2 Origami ile Yapılan Temel Çizimler.....	16
2.3 Origami Çizilebilir Sayılar	16
2.4 Geometrik Soruları Origami ile Çözümlmek	28
2.4.1 Açığı 3 eşit parçaya ayırmak	28
2.4.2 Küpün İki Katına Eşit Küp Yapmak.....	31
2.4.3 Poligonlar	33
2.5 Küp Kök İşleminde Kapalılık.....	35
3. KATLANABİLİR ORİGAMİ	37
3.1 Katlanabilir Origami.....	37
3.1.1 Katlanabilir Origami Teoremleri	38
4. SONUÇ	43
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ	47

SEMBOLLER

\mathbb{Q}	: Rasyonel Sayılar
\mathbb{R}	: Reel Sayılar Kümesi
\mathbb{N}	: Doğal Sayılar
\mathbb{G}	: Geometrik Çizilebilir Sayılar
\mathbb{O}	: Origami Çizilebilir Sayılar
$ AB $: A ve B noktaları arası uzunluk
$ RA \parallel BS $: $ RA $ ve $ BS $ paraleldir





ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 : Geometrik şekillerde toplama	2
Şekil 1.2 : Geometrik şekillerde çıkarma	3
Şekil 1.3 : Geometrik şekillerde Çarpma	3
Şekil 1.4 : Geometrik şekillerde Bölüm	4
Şekil 1.5 : Geometrik şekillerde Köklü Sayı Bulmak	5
Şekil 2.1 : A1: 1. Origami Aksiyomu Diyagramı	13
Şekil 2.2 : A2: 2. Origami Aksiyomu Diyagramı	14
Şekil 2.3 : A3: 3. Origami Aksiyomu Diyagramı	14
Şekil 2.4 : A4: 4. Origami Aksiyomu Diyagramı	14
Şekil 2.5 : A5: 5. Origami Aksiyomu Diyagramı	15
Şekil 2.6 : A6: 6. Origami Aksiyomu Diyagramı - 1	15
Şekil 2.7 : A6: 6. Origami Aksiyomu Diyagramı- 2	15
Şekil 2.8 : A7: 7. Origami Aksiyomu Diyagramı(Justin/ Hatori aksiyomu)	16
Şekil 2.9 : Origami ile Paralel doğru çizmek.....	16
Şekil 2.10 : Koordinat Sistemini Oluşturma	17
Şekil 2.11 : Origami Aksiyomları ile Paralel çizmek	18
Şekil 2.12 : Toplama İşlemi Katlamaları	18
Şekil 2.13 : Çıkarma İşlemi Katlamaları	18
Şekil 2.14 : Bölme İşlemi Katlamaları	19
Şekil 2.15 : $1 + s$ Uzunluğu	19
Şekil 2.16 : Karekök Formunda Sayı Oluşturma	20
Şekil 2.17 : P fokus noktasından l doğrutmanına eşit uzaklıktaki noktalar.....	20
Şekil 2.18 : Belli bir noktadaki doğruların büyütülmüş hali	21
Şekil 2.19 : A6, P_1 ile l_1 ve P_2 nin uygulanması	23
Şekil 2.20 : $P_2(3,0)$ kübik eğrisi	23
Şekil 2.21 : Eğim.....	26
Şekil 2.22 : Herhangi dar açığı 3 eşit ayırma diyagramı.....	29
Şekil 2.23 : Origami nokta ve doğruların geometrik şekli.....	29
Şekil 2.24 : Dik Açının 3 eşit parçaya ayrılması	30
Şekil 2.25 : Dik açıdaki Origami nokta ve doğruların geometrik şekli	30
Şekil 2.26 : Karenin bir kenarını 3 eşit parçaya ayırmak.....	31
Şekil 2.27 : Karenin bir kenarını n eşit parçaya ayırmak.....	32
Şekil 2.28 : $\sqrt[3]{2}$ origami diyagramı	32
Şekil 2.29 : $\sqrt[3]{2}$ ispatı	33
Şekil 2.30 : $\sqrt[3]{s}$ ispatı	35
Şekil 3.1 : Tepe/ Vadi Katlaması	37
Şekil 3.2 : Katlanabilir modelin Tepe/Vadi deseni	38

Şekil 3.3	: Katlanabilir modelin Tepe/Vadi deseni ve renklendirilmesi	38
Şekil 3.4	: Origami noktasındaki açıların kesişimi	39
Şekil 3.5	: Katlanmış hali.....	39
Şekil 3.6	: Açısına göre Katlanabilir köşedeki Tepe/Vadi deseni -1	41
Şekil 3.7	: Açısına göre Katlanabilir köşedeki Tepe/Vadi deseni-2	42



CİSİM GENİŞLEMELERİ VE ORİGAMI ÇİZİMLERİ

ÖZET

Japonca bir kelime olan "origami"; oru - katlamak ve kami- kağıt birleşiminden oluşur. Kağıt ile yapıldığı için kağıdın icadıyla doğal olarak ortaya çıktığı düşünülüyor. Göçlerle birlikte kağıt ve kağıt katlama Çin' den Japonya' ya, Kore' ye; ipek yoluyla Avrupa' ya yayılmış. Origaminin canlanması 20. yy da yaşayan Akire Yoshizawa (1911-2005) tarafından katlama işaretlerini geliştirmesiyle hız kazandı. Bilinen klasik origami haricinde daha karmaşık modeller üretilmeye başlandı. Dekorasyondan güneş panellerine, robotikten hava yastıklarına kadar birçok katlama günlük hayatta yerini alıyor.

1990 yıllarından sonra modern origami matematikçilerin de ilgisini çekmeye başladı. Bu dönemde geliştirilen origami aksiyomları ile geometrik, cebirsel, denklem çözümleri, hata payı fonksiyonları gibi detaylarda akademik çalışmalar yapılmaya başlanmıştır.

Robert Lang tarafından geliştirilen treemaker yazılımı ile origami modellerindeki katlamaların izlerinin algoritması çözümlenmiştir. Bu sayede daha karmaşık modellerin yapılması artmış; diğer yandan da teknolojik ve endüstriyel tasarımların üretilmesine yol açmıştır. Japon bilgisayar mühendisi Tomohiro Tachi, OSME 6 sempozyumundaki konuşmasında herşeyin origamisi yapılıp mı sorusuna uzun araştırmalardan sonra evet cevabını vermiş, peki herşeyi origami ile yapan makine olur mu sorusuna da düşünmeden evet cevabını vermiştir. Origaminin geldiği noktayı kısaca bu cümle özetliyor.

Origami, günümüzde çeşitli branşlarda ele alınıyor. Matematik, ürün tasarımları, uzay araştırmaları, mimari, tekstil, biyoloji gibi ana başlıklar verebiliriz.

Bu tez, bir inceleme çalışması olup, pergel cetvel çizimleri ve cisim genişlemeleri arasındaki ilişkilerin benzerlerinin, kağıt katlamaları ve cisim genişlemeleri arasında da olduğunu göstermeyi amaçlıyor. Tez çalışmasında geometrik çizimler sorularına origami ile çözüm aradık.

İlk bölümde Yunanlı matematikçilerin geometrik sorularını ele aldık. Pergel-cetvel ile hangi şekil ve çizimlerin yapılabildiği, hangisinin imkansız olduğunu nedenleriyle inceledik.

İkinci bölümde benzer soruların origami ile çözümlerini araştırdık. Huzita aksiyomlarını kullanarak pergel-cetvel ile yapılan geometrik şekilleri oluşturduk. Origami çizilebilir sayıları tanımladık ve bunları cisim genişlemeleri ile ilişkilendirdik.

Üçüncü bölümde katlanabilir origami hakkında geliştirilen origami teoremlerine yer verdik. Katlanabilir origami kavramı genellikle hareketli tasarımların alt yapısını oluşturuyor.

Tez okuyucusuna cebirsel olarak bilgi verecek olan bu çalışma ile origami ile diğer açık sorulara çözüm bulma fırsatı verebilir.



FIELD EXTENSIONS AND ORIGAMI CONSTRUCTIONS

SUMMARY

Origami is a Japanese compound word, from *oru* meaning “folding” and *kami* meaning “paper,” and refers to the art of paper folding. Japanese origami crane is most famous of all origami models, international symbol of peace. It is believed that it originated naturally following the invention of paper. Paper and paper-folding spread from China to Japan and Korea and, via the Silk Road, to Europe through migrations. The revitalization of origami accelerated when a system of notation for origami (dotted lines and arrows) was developed by Akira Yoshizawa (1911 - 2005) in the 20th century. The standard for origami instructions in which valley folds are indicated by dashed line and mountain folds are indicated by chain line. These origami instructions are known by world widely and become origami language. This led to the creation of complicated models that go beyond conventional origami, and many such folds enter daily life in a range of areas from decoration to solar panels to robotics to airbags today.

In the 1990s, modern origami began to strike the attention of mathematicians. The origami axioms developed during this period enabled the conduct of academic study relating to details such as geometry, solutions of algebraic equations and approximation method of error functions. Origami has a real geometry that is a natural subject of study. The oldest origami math book was 1840 by Rev. Dionysius Lardner, which demonstrated geometric rules by folding paper. Other book was 1893 by Sandra Row, which was more impacted by compass, ruler and paper folding. In 1936, origami was analyzed in terms of geometric constructions, using compass and ruler according to set of axioms by Piazzolla. This study might be first contribution to "origami mathematics". In 1985 Humiaki Huzita and Benedetto Scimemi presented origami 6 axioms at the First International Meeting of Origami Science and Technology. Those six operations became known as the Huzita axioms. The Huzita axioms provided the first formal description of what types of geometric constructions were possible with origami.

The algorithms of folding patterns in origami models were analyzed using TreeMaker, a software developed by Robert Lang. This not only allowed for more complicated models to come into abundance, but at the same time it brought about the production of technological and industrial designs. In a speech he delivered during the 6th OSME symposium, Japanese computer scientist Tomohiro Tachi answered yes in reference to his long research on whether it is possible to make origami out of everything and a definite yes to the question of whether a machine is possible that does everything through origami. This briefly summarizes the current state of origami. Origami is covered in a variety of areas such as mathematics, product design, space research, architecture, textiles, and biology today.

This is a survey thesis and it aims to show that relationships that resemble those between compass and ruler constructions and field extensions hold between paper folds

and field extensions. The present thesis seeks for answers to questions about geometric constructions through origami.

The first chapter covers the geometrical problems of Greek mathematicians. It examines which shapes and drawings are possible using the compass and the ruler and which are not and why. Three geometrical problems in particular, often referred to as the Four Classical Problems, and all to be solved by purely geometric means using only a straight edge and a compass. They were “the squaring of the circle”, “the doubling of the cube”, “the trisection of an angle” and “regular polygon”. These problems’ actual solutions had to wait until the 19th Century. In 1837 Wantzel showed that trisecting an angle and doubling a cube by straightedge and compass were not always possible. In 1882 Lindemann showed that squaring the circle was impossible with straightedge and compass when he showed that π transcendental over \mathbb{Q} .

The second chapter searches for solutions to similar problems through origami. The results are surprisingly different from ruler and compass geometry. Firstly we give basic definitions and theorems of field theory. It uses the Huzita axioms to form geometrical shapes otherwise drawn using the compass and the ruler. Six main folding methods were developed by Huzita-Justin which allow constructions with circles and lines. We showed that Three Classical Problems are solvable by Origami axioms. The ability to trisect an angle shows that origami axioms are stronger than compass and ruler. 5th axiom folds a point to a line over a crease. Because the point reflects across the crease, its distance to the crease is the same as the distance from the crease to reflected point. This shows that the crease is tangent to the parabola whose focus is point and whose directrix is the line. We can use a parabola to construct square roots with origami. It is clear that the creases in 6th axiom is tangent to two parabolas. Finding a common tangent between two parabolas can be equivalent as solving cubic equations. By the way we showed that 5th axiom and 6th axiom are not available at special conditions. Additionally dividing n equal part method is explained. We show that cubic equations can be solved using origami folding. It defines origami construction numbers and associates them with field extensions.

The third chapter deals with the theorems of origami that have been proposed regarding flat foldable origami. The concept of flat foldable origami lays the groundwork for moving designs. What is the difference between with origami and flat foldable origami? Origami models could be 1D, 2D or 3D. But flat foldable origami has some special differences which are its paper is zero thickness and the folded form is flat. They called this model of origami flat foldable origami. Flat foldable origami has also been applied to other fields such as science and technology. Flat foldable origami methods are used at solar panels in space, airbag at cars, self moving cells, robotic engineering, furniture designs, enlarging fabric by body, architectural surfaces. It has also been the inspiration of mathematical research into the properties of folded shapes. Toshikazu Kawasaki, Jacques Justin and Jun Maekawa established several fundamental theorems for single flat folded vertex. These theorems are introduced in this chapter.

The conclusions part, we give some future researches by add new opportunities. Origami doesn’t allow to cutting, using glue. We can give further studies by cutting paper or using tracing paper. These ways make origami solutions more powerful than traditional origami solutions.

The present study offers an algebraic account of origami and may provide an opportunity for finding solutions to other open questions. In addition, origami is worth

studying and exploring in other math related fields. For example, there is a connection between origami and topology, differential geometry, even to graph theory, something that we don't usually assume origami would associate with.





1. GEOMETRİK ÇİZİMLER

Yunanlı matematikçiler Euclid uzayında problem çözümlerini pergeli ve cetveli (ölçsüz cetvel, cetvel olarak ifade edildi) kullanarak çözümlüyordu. Bu tip sorular genel anlamda geometrik çizim problemleri olarak bilinir. Ancak bazı soruların pergeli ve cetveli ile çözümlenemedi. Buradan yola çıkarak 4 ana çözümlenemeyen soru oluştu. Bunları bu bölümde inceleyeceğiz.

Kaynakça kısmında yer alan [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] numaralı çalışmalardan faydalanılmıştır.

1.1 Temel Çizimler

Pergel-cetvel çizimlerinde ilk olarak iki nokta verilir. Verilen O ve P noktalarıyla

T1. İki noktadan geçen bir doğru çizilebilir.

T2. Merkezi O olan ve P noktasından geçen bir çember çizilebilir.

Bu iki temel işlemi kullanarak başka noktalar elde edilir. Bunlar;

N1. İki ayrı doğruyun kesişiminden bir nokta bulunur.

N2. Bir çember ve doğruyun kesişiminden noktalar elde edilir.

N3. İki çemberin kesişiminden noktalar elde edilir.

Tanım 1.1.1 *T1, T2 ve N1, N2, N3 kullanarak çeşitli çizilebilir noktalar elde edilebiliriz. Sonlu adımda bu elde ettiğimiz bu noktalara çizilebilir nokta denir.*

Pergel-Cetvel ile yapılan temel çizimler

- Verilen bir doğruya verilen bir noktadan geçen dik çizilebilir.
- Verilen bir doğruya verilen bir noktadan geçen paralel bir doğru çizilebilir.

- Verilen iki tane paralel olmayan doğruyun kesişim açısının, açıortayı bulunur.

1.2 Çizilebilir Sayılar

Tanım 1.2.1 Bir r reel sayısı için eğer sonlu adımda birbirine uzaklığı $|r|$ olan iki nokta çizilebiliyorsa, r reel sayısına çizilebilir sayı denir.

Verilen bir düzlemde pergel-cetvel ile koordinat sistemini oluşturabiliriz.

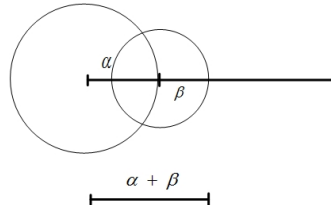
Önerme: $\alpha \in \mathbb{R}$ verilsin. α çizilebilir sayıdır ancak ve ancak $-\alpha$ çizilebilir sayıdır.

Tanım 1.2.2 Bir pozitif reel sayıya uzunluk denir.

Teorem 1.2.3 α, β iki çizilebilir sayı verilsin. $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha / \beta$ ($\beta \neq 0$ koşuluyla) çizilebilirdir.

İspat:

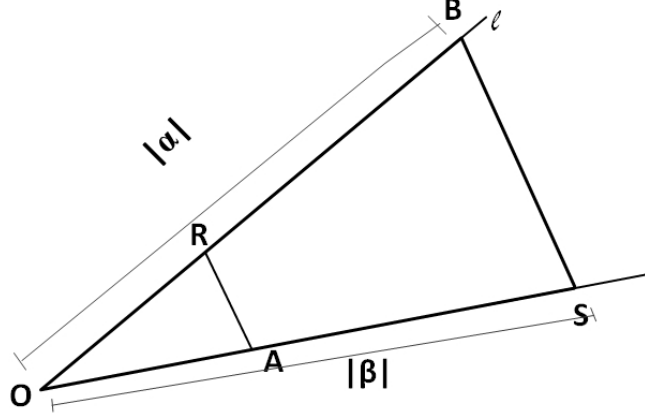
Toplama $\alpha + \beta$



Şekil 1.1 : Geometrik şekillerde toplama

- Herhangi bir uzunluk çizelim.
- Bu uzunluğun bir noktasından α yarıçaplı çember çizelim.
- Doğruyu kesen çember üzerindeki noktayı merkez alarak β yarıçaplı çember çizelim.
- Çemberlerin yarıçap uzunluğu $\alpha + \beta$ olarak bulunur.

Çıkarma $\alpha - \beta$



Şekil 1.4 : Geometrik şekillerde Bölüm

$|OB| = |\alpha|$, $|OS| = |\beta|$, $|OR| = 1$ olsun.

$|RA| \parallel |BS|$

Benzer üçgenlerden;

$$\frac{|OR|}{|OB|} = \frac{|OA|}{|OS|} \Rightarrow \frac{|1|}{|\alpha|} = \frac{|OA|}{|\beta|} \Rightarrow |OA| = |\alpha|/|\beta| \quad (1.2)$$

elde edilir.

Sonuç olarak $|\alpha|/|\beta|$, $\beta \neq 0$ iken çizilebilir olduğu gösterilir.

Pergel ve cetvel kullanarak düzlemde çizilebilir sayıların nasıl bulunduğunu gösterdik.

Teorem 1.2.4 $\alpha \in \mathbb{R}$ çizilebilir ise, $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$ koşuluyla çizilebilirdir.

İspat:

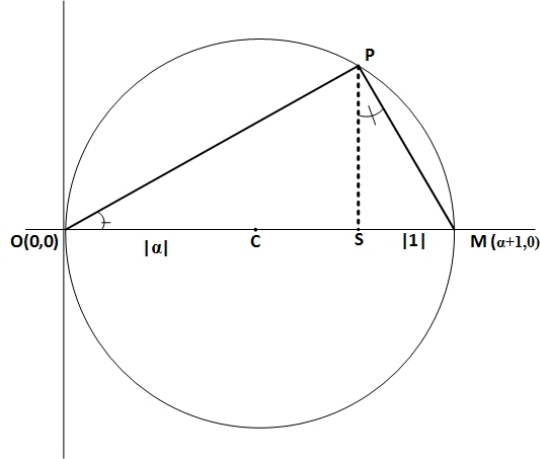
Çapı $\alpha + 1$ olan bir çember çizelim.

$|OM| = \alpha + 1$, $|OS| = \alpha$, $|SM| = 1$ olsun.

\widehat{OPS} ile \widehat{PSM} dik üçgen kuralından benzer üçgenlerdir.

$$\frac{|PS|}{|SM|} = \frac{|OS|}{|PS|} \Rightarrow \frac{|PS|}{|1|} = \frac{|\alpha|}{|PS|} \Rightarrow |PS|^2 = \alpha \Rightarrow |PS| = \sqrt{\alpha} \quad (1.3)$$

$|PS|$ uzunluğu ölçülebilir. Dolayısıyla $\sqrt{\alpha}$ da ölçülebilir sayıdır. Böylece α , $\beta \in \mathbb{Z}$ olmak üzere tüm tamsayıların çizilebilir olduğu anlaşılıyor.



Şekil 1.5 : Geometrik şekillerde Köklü Sayı Bulmak

Sonuç: α, β çizilebilir reel sayılar ise $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha \cdot \beta, \frac{\alpha}{\beta}, \sqrt{\alpha}$ çizilebilir reel sayılardır.

Önceki teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç: Çizilebilir reel sayılar kümesi, \mathbb{R} nin alt cisimidir.

Sonuç: Her rasyonel sayılar kümesi çizilebilirdir.

İspat: Tamsayıların çizilebilir olduğunu gördük. Böylece tüm rasyonel sayılar çizilebilir olduğu önceki teoremden aşikardır.

\mathbb{Q} ile çizilebilir reel sayıların kümesini gösterelim.

Teorem 1.2.5 F, \mathbb{R} nin bir alt cismi olsun. O halde;

1. Koordinatları F de olan ve iki noktadan geçen doğrunun denklemi $ax+by+c = 0$ dir ve $a, b, c \in F$.
2. Merkezinin koordinatları ve yarıçapının karesi F olan bir çemberin denklemi $x^2 + y^2 + rx + sy + t = 0$ dir ve $r, s, t \in F$ şeklindedir.

İspat:

(1) Doğru üzerindeki iki noktanın koordinatları (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olsun ve $x_1, y_1, x_2, y_2 \in F$. Eğer $x_1 \neq x_2$ ise doğru denklemi;

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

İki tarafı da tekrar düzenlersek;

$$\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)x - y - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)x_1 + y_1 = 0$$

F' in cisim olması ve $x_1, y_1, x_2, y_2 \in F$ nedeniyle; her bir katsayı, F' in elemanıdır.

(2) (x_1, y_1) çemberin merkezi ve k yarıçap olsun öyle ki $x_1, x_2, k \in F$ dir. O halde çemberin denklemi;

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = k^2$$

Denklemleri tekrar düzenlersek;

$$x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y + x_1^2 + y_1^2 + k^2 = 0$$

F in cisim olması ve $x_1, x_2, k \in F$ nedeniyle; her bir katsayı F in elemanıdır.

Çizilebilir noktaları iki doğrunun kesişimi, doğru ve çemberin kesişimi veya iki çemberin kesişimi olarak sınıflandırabiliriz.

Teorem 1.2.6 F rastgele alınan \mathbb{R} nin alt cisimi olsun. $l_1, l_2 \in F[x, y]$ doğruları ve $c_1, c_2 \in F[x, y]$ çemberleri verilsin. O halde

1. Eğer l_1, l_2 kesişiyorsa; kesişim noktasının koordinatları F nin elemanıdır.
2. Eğer l_1, c_1 kesişiyorsa; kesişim noktalarının koordinatları F nin elemanıdır veya $F(\sqrt{d})$ gibi bir cisim genişlemesinin elemanıdır.
3. Eğer c_1, c_2 kesişiyorsa; kesişim noktalarının koordinatları F nin elemanıdır veya $F(\sqrt{d})$ gibi bir cisim genişlemesinin elemanıdır.

İspat:

1. l_1 ve l_2 doğrularının denklemi;

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Katsayılar $a_i, b_i, c_i \in F$. Bu linear denklemin çözümü de F içindedir. Bu nedenle l_1 ve l_2 doğrularının kesişim noktalarının koordinatları da F' nin elemanıdır.

2. l_1 ve c_1 denklemleri;

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$c_1 : x^2 + y^2 + r_1x + s_1y + t_1 = 0$$

Katsayılar $a_1, b_1, c_1, r_1, s_1, t_1 \in F$. Bu denklemlerin çözümü, tüm katsayıları F de olan kuadratik denklemi verir. Bundan dolayı çözüm $F(\sqrt{d})$ cisim formunda olur. Bu nedenle l_1 ve c_1 denklemlerin kesişim noktalarının koordinatları $F(\sqrt{d})$ nin elemanıdır.

3. Eğer c_1 ve c_2 denklemleri;

$$c_1 : x^2 + y^2 + r_1x + s_1y + t_1 = 0$$

$$c_2 : x^2 + y^2 + r_2x + s_2y + t_2 = 0$$

Katsayılar $a_i, b_i, c_i \in F$. c_2 ve c_1 denklemlerini taraf tarafa çıkarırsak, linear denkleme ulaşırız.

$$(r_1 - r_2)x + (s_1 - s_2)y + (t_1 - t_2) = 0$$

Bu denklemin çözümü, tüm katsayıları F de olan kuadratik denklemi verir. Bundan dolayı çözüm $F(\sqrt{d})$ cisim formunda olur. Bu nedenle c_1 ve c_2 denklemlerin kesişim noktalarının koordinatları $F(\sqrt{d})$ nin elemanıdır.

Teorem 1.2.7 $r \in \mathbb{R}$ olsun. O halde r sayısı çizilebilirdir ancak ve ancak $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ ve $[F_i : F_{i-1}] = 2 \quad r \in F_n$, olacak şekilde sonlu bir F_i cisim dizisi vardır.

İspat:

(\Rightarrow) r sayısı çizilebilir olsun. Tanım 1.1.1 gördüğümüz üzere r sayısının çizilebilir olması için pergel-cetvel ile N_1, N_2, N_3 işlemleri kullanılır. Teorem 1.2.6 dan ; pergel-cetvel kullanılarak oluşturulan cisim genişlemesinin derecesi 1 veya 2 dir. Tümevarımdan r sayısının çizilebilir olması için sonlu cisim sıralaması vardır

$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ ve $r \in F_n$, $[F_i : F_{i-1}] = 2$ dir.

(\Leftarrow) $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ ve $r \in F_n$, $[F_i : F_{i-1}] = 2$ olsun.

O halde $F_i = F_{i-1}[\sqrt{d_i}]$ $d_i \in F_i$ olur.

$n=0$ için $r \in F_0 = \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q} \subset \mathbb{G}$. F_n herhangi bir elemanın $n=k-1$ olduğunda çizilebilir olduğunu farz edelim. O halde herhangi bir $d_k \in F_{i-1}$ çizilebilir olması $\sqrt{d_k}$ çizilebilir olmasını gerektirir. Bundan dolayı herhangi bir elemanı $F_k = F_{k-1}[\sqrt{d_k}]$ de çizilebilirdir. Tümevarım prensibinden herhangi $r \in F_n$ de çizilebilirdir.

Sonuç: α , çizilebilir sayı ise $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^n$, $n \geq 0$ dır.

İspat: Teorem 1.2.7 den; r çizilebilir ise sonlu cisim sıralaması vardır

$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{Q}$ ve $r \in F_n$, $[F_i : F_{i-1}] = 2$ dir. Zincir kuralından

$$[F_n : \mathbb{Q}] = [F_n : F_{n-1}][F_{n-1} : F_{n-2}] \dots [F_1 : F_0] = 2^n. \quad (1.4)$$

O halde $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(r) \subset F_n$ ile zincir kuralını tekrar edersek; $[\mathbb{Q}(r) : \mathbb{Q}][F_n : \mathbb{Q}] = 2^n$, eğer r çizilebilir ise $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^k$, $k \geq 0$

Buradan sonuç olarak her çizilebilir sayı \mathbb{Q} üzerinde cebirseldir ve minimal polinomun derecesi \mathbb{Q} üzerinde 2 nin kuvvetidir.

Uyarı: İncelediğimiz bu sonucun tersi doğru değildir. Yani $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^n \quad \exists n \geq 0$ olduğunda α çizilemeyebilir.

1.3 4 Ana Geometrik Problem

1.3.1 Dairenin alanına eşit alanlı kare çizilemek

Bir dairenin alanına eşit alanlı kare, pergel- cetvel yardımıyla çizilemez.

İspat:

Dairenin yarıçapı $r=1$ olsun. Alanı da π olur. Karenin alanının π olması için kenarının $\sqrt{\pi}$ olması gerekir. Teoreme göre çizilebilir olması için $[\mathbb{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbb{Q}] = 2^l$, $\sqrt{\pi}$ cebirsel olması gerekir.

Fakat 1882'de Lindemann tarafından gösterildiği gibi π sayısı \mathbb{Q} üzerinde cebirsel değildir. Sonuç olarak π sayısı transandantal olduğundan çizilemez.

1.3.2 Verilen bir küpün 2 katına eşit yeni bir küp çizmek

Pergel ve cetvel kullanarak küpün hacminin iki katına eşit yeni bir küp çizilemez.

İspat: Küpün bir kenar uzunluğu 1 birim olsun. Küpün hacmi 1 *birim*³ olur. Hacmi iki katı olan küpün kenar uzunluğu $\sqrt[3]{2}$ olmalıdır.

Ancak $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}] = 3$.

3, 2'nin kuvveti olmadığından $\sqrt[3]{2}$ çizilemez. Teoreme göre çizilebilir olması için $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}] = 2^l$ olmalıdır.

1.3.3 Herhangi bir açığı 3 eşit parçaya ayırmak

Genel olarak pergel ve cetvel kullanarak bir açığı 3 eşit parçaya ayırmak mümkün değildir. ($\pi/2$ ve π hariç)

İspat:

De Moivre's Teoremini

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta \quad (1.5)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\cos^2\theta\sin\theta - i\sin^3\theta \quad (1.6)$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad (1.7)$$

Bu ifadeyi De Moivre denklemi ile eşleştirirsek;

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad (1.8)$$

$$\sin 3\theta = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta \quad (1.9)$$

elde ederiz.

Sonuç :

θ açısının çizilebilir olması $\cos \theta$ uzunluğunun çizilebilir olmasını gerektirir.

Örnek : 60° açısı 3 eşit parçaya ayrılır mı? **Çözüm :**

$\theta = 20$ ve $\text{Cos}20 = x$ olsun.

$\text{Cos } 3\theta = 4 \text{Cos}^3\theta - 3 \text{Cos}\theta$ da yerine koyarsak

$$\text{Cos}60 = 4\text{Cos}^320 - 3\text{Cos}20$$

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \Rightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Bu durumda $\alpha = \text{Cos}20$, $8x^3 - 6x - 1$ polinomunun bir köküdür ve bu polinom \mathbb{Q} üzerinde $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3 \neq 2^l$ olduğu için indirgenemez. Dolayısıyla 60° , pergel ve cetvel ile 3 eşit parçaya ayrılamaz.

Örnek : 90° açısı, 3 eşit parçaya ayrılır mı?

Çözüm :

$\text{Cos}30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ olduğu için

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{R}$$

$[K_1 : K_0] = 2$ ve $\alpha \in K_1$ olur. Bu durumda Teorem 1.2.7 den α nin çizilebilir olduğunu görürüz. Dolayısıyla 30° çizilebilirdir. Sonuç olarak 90° , 3 eşit parçaya bölünebilir.

Örnek : 42° çizilebilir mi?

Çözüm : Geometrik çizilebilir sayılar; toplama, çıkarma, çarpma, bölmeye göre kapalı olduğundan $42^\circ = 72^\circ - 30^\circ$ olarak çözebiliriz. 30° çizilebilir olduğunu önceki örneklerde inceledik. 72° yi inceleyelim.

$$\text{Cos}\frac{2\pi}{5} = \text{Cos}72$$

$\text{Cos}\frac{2\pi}{5} + i\text{Sin}\frac{2\pi}{5}$ kutupsal koordinatları $x^5 - 1 = 0$ denklemin köküdür.

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$\text{Cos}\frac{2\pi}{5} + i\text{Sin}\frac{2\pi}{5} \neq 1$, yani $x-1$ in kökü değildir. Bu nedenle $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ in kökü olmalıdır.

$$\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^4 = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

olsun.

Taraf tarafa toplarsak;

$$z + z^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

$\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ diyelim.

$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ elde edilir.

$$\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\alpha > 0$ olacağından $\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Sonuç olarak 72° çizilebilir olduğu açıktır. Bununla birlikte 42° çizilebilir olduğu çıkar.

1.3.4 Düzgün Poligon Çizilmesi

Bir düzgün n köşeli çokgenin çizilmesi ancak ve ancak $\cos\frac{2\pi}{n}$ sayısının çizilebilmesi ile mümkündür. Herhangi bir n-gen çizilebilmesi için

$$[\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$$

olmalıdır. Bir asal sayı eğer $p = 2^{2^m} + 1$ şeklinde yazılabiliyor ise p ye Fermat asalı denir.

Gauss göstermiştir ki: Bir düzgün $n > 2$ köşeli çokgen çizilebilir ancak ve ancak $n = 2^s p_1 p_2 \dots p_r$ dir ve bazı Fermat asalları $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ ve bazı $s \geq 0$ tamsayısı için.



2. ORİGAMI ÇİZİMLER

Bu bölümde geometrik şekillerin çizimlerini, origami aksiyomları ile karşılaştırıp inceleyeceğiz.

Kaynakça kısmında yer alan [8], [1], [9], [2], [10], [11], [3], [4], [5], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18] numaralı çalışmalardan faydalanılmıştır.

Origami çizimleri, kağıt üzerindeki katlamaların serisidir. Elimizde sonsuz genişlikte kağıt ve üzerinde farklı iki nokta verilmiş olsun. Bu iki noktadan geçecek şekilde katlayarak doğru elde ederiz. İki noktadan başlayarak yapılan kat izleri, bir sonraki katlama adımına referans oluşturur. Her bir katlamada, kat izi oluşturur. Bunlara origami çizilebilir doğru denir. Bu doğruların kesişiminden origami çizilebilir noktalar oluşur.

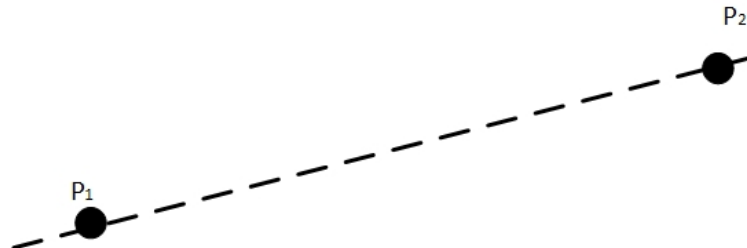
Bu bölümde kullanılan çizilebilir ifadesi origami çizilebilir olarak alınmalıdır.

2.1 Origami Aksiyomları

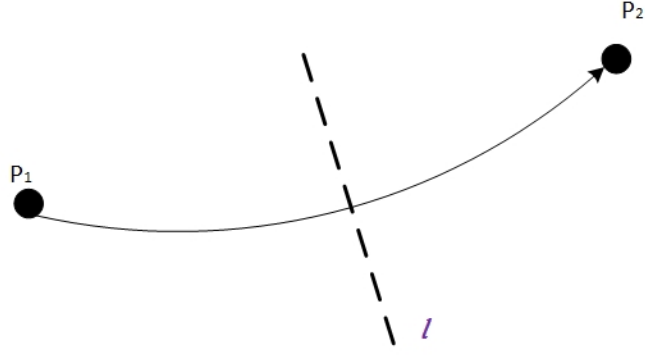
Origami aksiyomları, temel matematiksel katlama yöntemlerinin kuralları olarak bilinir. 1989 yılında origami aksiyomları Humiaki Huzita tarafından bulundu ve 1991 yılında First International Conference on Origami in Education and Therapy de sunuldu.

Bu 6 aksiyom Huzita aksiyomları olarak bilinir. 2001 yılında Koshiro Hatori 7. aksiyomu tanımlamıştır.

A1 Verilen iki nokta P_1 ve P_2 olsun. Bu iki noktadan geçen bir doğru katlanabilir.



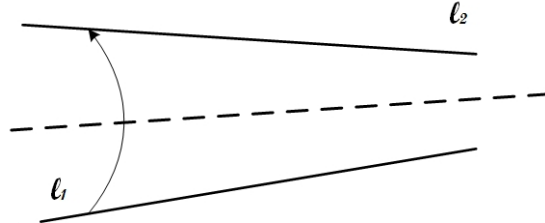
Şekil 2.1 : A1: 1. Origami Aksiyomu Diyagramı



Şekil 2.2 : A2: 2. Origami Aksiyomu Diyagramı

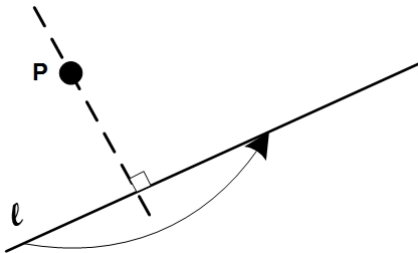
A2 Verilen iki nokta P_1 ve P_2 olsun. P_1 noktası, P_2 noktası üzerine katlanabilir.
(Bu durumda kat izi, P_1P_2 doğru parçasının orta dikmesi olur.)

A3 l_1 ve l_2 iki doğru olsun. l_1 doğrusu, l_2 doğrusu üzerine katlanabilir.(Bu durumda kat izi, l_1 ve l_2 doğruları arasındaki açının açıortayı olur.)



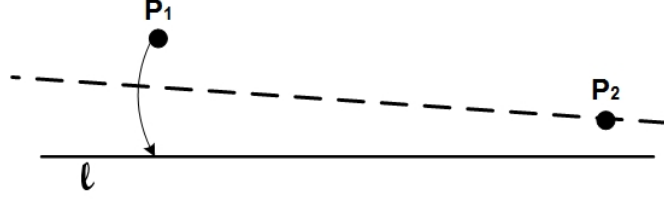
Şekil 2.3 : A3: 3. Origami Aksiyomu Diyagramı

A4 P noktası ve l doğrusu verilsin. P noktasından geçen ve l ye dik olan doğru katlayabiliriz.



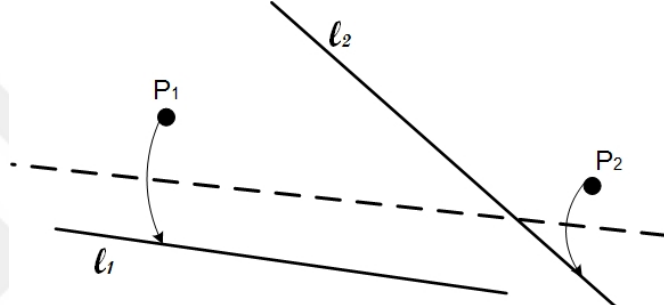
Şekil 2.4 : A4: 4. Origami Aksiyomu Diyagramı

A5 P_1 ve P_2 noktaları ile l doğrusu verilsin. P_1 noktasını l doğrusu üzerine katlayabiliriz ve oluşan kat izi, P_2 noktasından geçer.

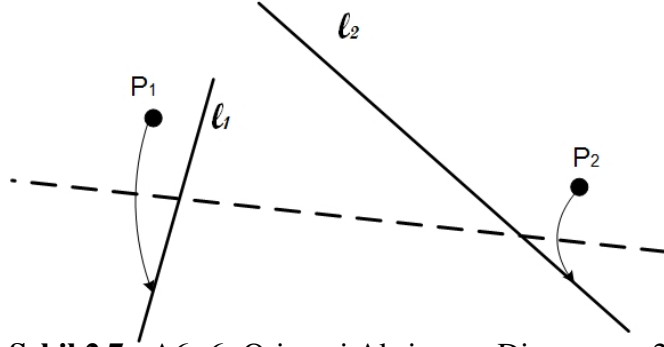


Şekil 2.5 : A5: 5. Origami Aksiyomu Diyagramı

A6 P_1 ve P_2 noktaları ile l_1 ve l_2 doğruları verilsin. P_1 noktasını l_1 doğrusu üzerine ve P_2 noktasını l_2 üzerine götüren bir katlama yapabiliriz.



Şekil 2.6 : A6: 6. Origami Aksiyomu Diyagramı - 1



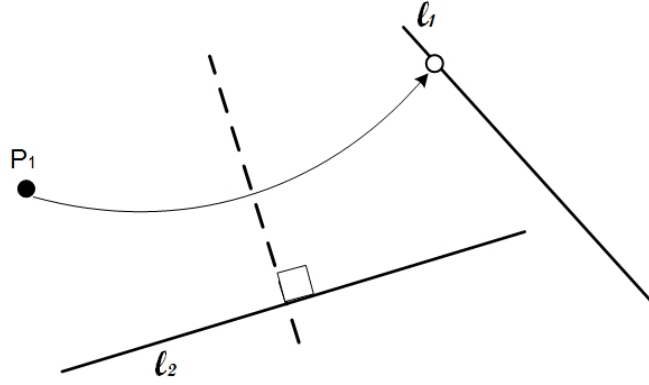
Şekil 2.7 : A6: 6. Origami Aksiyomu Diyagramı- 2

Bu 6 aksiyom Huzita aksiyomları olarak bilinir.

A7 P_1 noktası ile l_1 ve l_2 doğruları verilsin. P_1 noktası l_1 üzerine gelecek şekilde l_2 doğrusuna dik doğru katlayabiliriz.

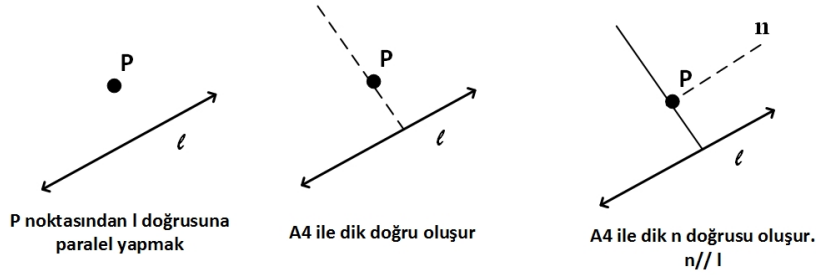
Bu aksiyom, Justin/ Hatori aksiyomu olarak adlandırılır.

2.2 Origami ile Yapılan Temel Çizimler



Şekil 2.8 : A7: 7. Origami Aksiyomu Diyagramı(Justin/ Hatori aksiyomu)

Pergel-cetvel ile yapılan (dik, paralel, açıortay) örneğin dik çizmek ve açıortay işlemleri A3 ve A4 origami aksiyomlarına denktir. Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir doğruya paralel çizmek için iki kez A4 uygulayabiliriz.



Şekil 2.9 : Origami ile Paralel doğru çizmek

2.3 Origami Çizilebilir Sayılar

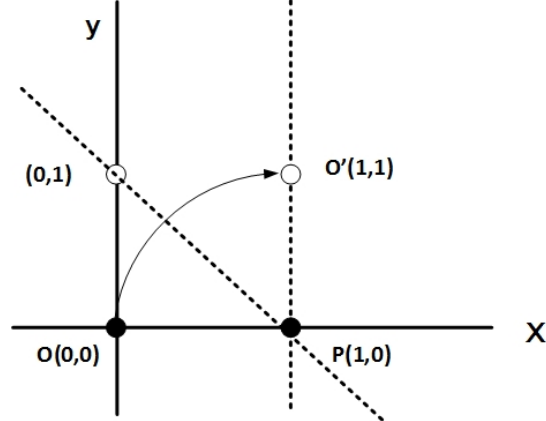
Tanım 2.3.1 Sonsuz genişlikte kağıt üzerinde O ve P noktaları verilsin. O ve P noktalarına A1-A7 origami aksiyomlarını uygulayarak yeni doğrular (kat izleri) bulabiliriz. Yeni ve eski doğruların birbirleriyle kesişimleri O ve P haricinde fazladan noktalar verecektir. A1-A7 origami aksiyomlarını var olan tüm nokta ve doğrulara uygulayarak bu prosedüre devam edebiliriz. Bu prosedürün sonlu defa uygulanmasından elde edilen bir doğruya origami çizilebilir doğru denir.

Tanım 2.3.2 Origami çizilebilir doğruların kesişimlerine de origami çizilebilir nokta denir.

Tanım 2.3.3 Aralarında $|r|$ uzaklık olan iki origami çizilebilir nokta bulabilirsek, r reel sayısına origami çizilebilir sayı denir.

Origami ile düzlemde xy koordinat sistemini oluşturabiliriz. (Şekil 2.10)

Elimizde iki farklı nokta, O ve P olsun. Öncelikle merkez noktayı O ile belirleyip $|OP|$ yi 1 birim alalım. $A1$ işlemiyle O ve P noktaları arasında oluşan doğru, x eksenini oluşturur. $A4$ ile O noktasında x eksenine dik doğru yapılarak y eksenini oluştur.



Şekil 2.10 : Koordinat Sistemini Oluşturma

$A4$ ile P noktasında x eksenine dik doğru oluşturularak $x = 1$ doğrusu oluşur. Ardından $A5$ ile O noktasını $x = 1$ doğrusu üzerinde katlayan ve P noktasından geçen yeni doğru elde ederiz. Böylece $O'(1,1)$ noktası bulunur. Bu yeni doğrunun y eksenini kestiği yer $(0,1)$ noktasıdır. Böylece iki noktadan başlayarak ve Huzita aksiyomlarını kullanarak koordinat düzlemi ve $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ nokta çiftlerini buluruz.

Önerme: (a,b) origami çizilebilirdir ancak a ve b origami çizilebilir reel sayılardır.

Önerme: $r \in \mathbb{R}$ origami çizilebilirdir ancak $|r|$ çizilebilir reel sayılardır.

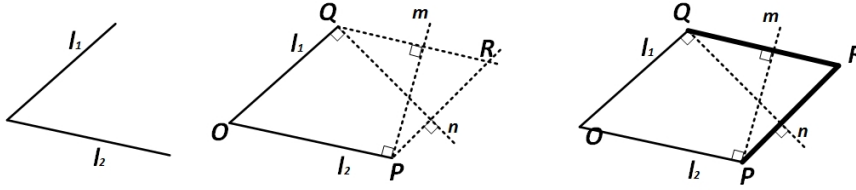
Teorem 2.3.4 *Origami çizilebilir reel sayılar, \mathbb{R} nin bir alt cisimidir.*

Origami çizilebilir l_1 ve l_2 ($\geq 0, \in \mathbb{R}$) uzunlukları verilsin. Bunları kullanarak $l_1 + l_2$, $l_1 - l_2$, $l_1 \cdot l_2$, l_1 / l_2 ve $\sqrt{l_1}$ uzunluklarını origami aksiyomları ile çizebiliriz.

İspat:

Origami sayıları; toplama, çıkarma, çarpma, bölme, karekök işlemleri altında kapalıdır. Sırasıyla bu işlemler altında kapalı olduğunu gösterelim. Öncelikle origami aksiyomları ile paralel oluşturma yöntemini inceleyelim (Şekil 2.11).

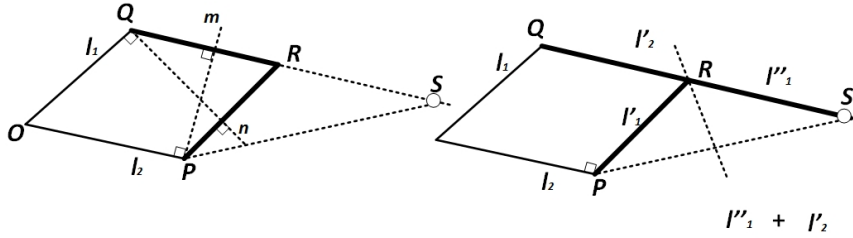
1. Q noktasında $A4$ kullanarak n doğrusu oluşturulur.



Şekil 2.11 : Origami Aksiyomları ile Paralel çizmek

2. n doğrusundan A4 kullanarak P noktasından geçen dik doğru oluşturulur.
3. P noktasında A4 kullanarak m doğrusu oluşturulur.
4. m doğrusundan A4 kullanarak Q noktasından geçen dik doğru oluşturulur.

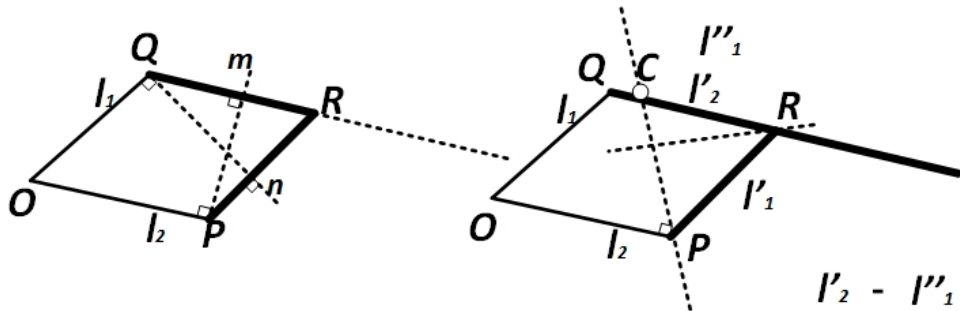
Toplama l_1 ve l_2 uzunluklar verilsin. $l_1 + l_2$ uzunluğu da origami çizilebilir sayıdır. Paraleller çizerek toplamamın kapalılık özelliğini gösterelim (Şekil 2.12).



Şekil 2.12 : Toplama İşlemi Katlamaları

1. l_1 ile l_2 doğrularından Şekil 2.11'deki katlamalarla paralel doğrular çizelim. Yeni oluşan doğrular l'_1 ve l'_2 olsun.
2. A5 Aksiyomu ile R noktasından geçen ve P noktasını S noktasına götüren doğru çizebiliriz. Böylece l''_1 doğrusu oluşur.
3. $l'_2 + l''_1$ nin origami çizilebilir sayı olduğu görülür.

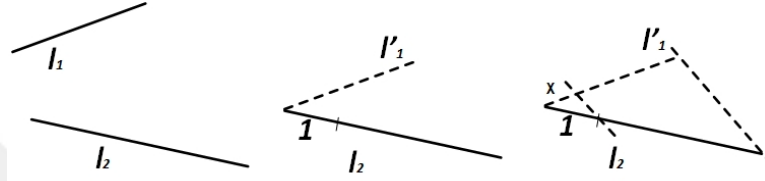
Çıkarma l_1 ve l_2 uzunluklar verilsin. $l_1 - l_2$ uzunluğu da origami çizilebilirdir.



Şekil 2.13 : Çıkarma İşlemi Katlamaları

1. l_1 ile l_2 doğrularından Şekil 2.11 deki katlamalarla paralel doğrular çizelim. Yeni oluşan doğrular l'_1 ve l''_1 olsun. $|QR| = l'_2$ ve $|PR| = l'_1$ dir.
2. A5 Aksiyomu ile R noktasından geçen ve P noktasını C noktasına götüren doğru çizebiliriz. Böylece l''_1 doğrusu oluşur.
3. $l'_2 - l''_1$ nin origami çizilebilir sayı olduğu görülür. ($l'_2 > l''_1$)

Çarpma / Bölme l_1 ve l_2 , $l_1 < l_2$ uzunluklar verilsin. l_1 / l_2 uzunluğu da origami çizilebilirdir.



Şekil 2.14 : Bölme İşlemi Katlamaları

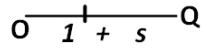
1. l_1 doğrusunu l_2 ye gelecek şekilde paralel yapalım. Bunu l'_1 ile gösterelim.
2. A1 ile l'_1 son noktası ve l_2 doğrusu son noktasından geçen bir doğru oluşturalım.
3. Oluşan doğruya paralel 1 birimlik noktadan geçen paralel oluşturalım.

Benzer üçgenler kuralından çıkan denklemden $x = l'_1 / l_2$ nin origami çizilebilir sayı olduğu görülür (Benzer geometrik çizimler geçerlidir Şekil 1.4).

Benzer şekilde çarpmanın da origami çizilebilir sayı olduğu gösterilir. (Benzer geometrik çizimler geçerlidir Şekil 1.3).

Karekök

s uzunluğu verilsin.

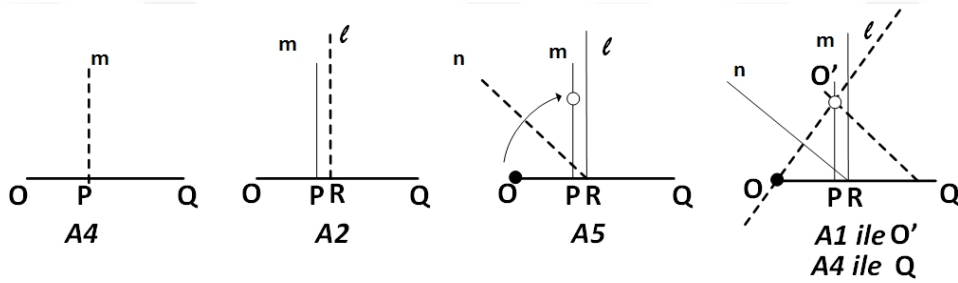


Şekil 2.15 : 1 + s Uzunluğu

1. Toplamada kapalılık özelliğinden $1 + s$ uzunluğu çizilebilir.(Şekil 2.15)
2. A4 ile 1 ve s arasında dik olacak şekilde m doğrusu oluşturulur. (Şekil 2.16)
3. A2 ile $1+s$ uzunluğunda orta noktası R den geçen l doğrusu oluşturulur.

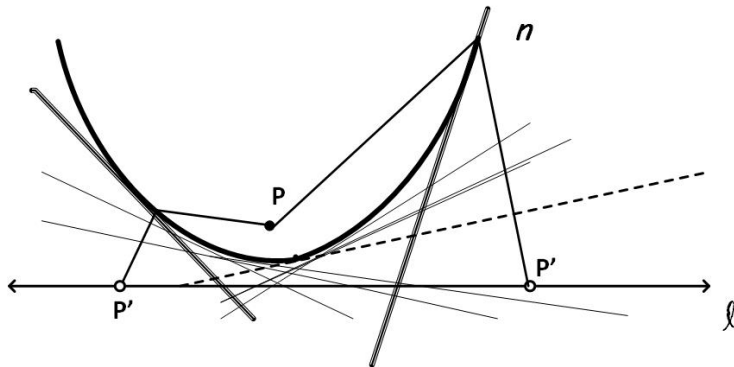
4. A5 ile O noktasını m doğrusu üzerine götüren ve R noktasından geçen kat izi doğrusu bulunur. Bu doğruya n diyelim. O noktasının m doğrusuna düşen noktasına O' diyelim.
5. A1 ile O' ve O noktalarından geçen bir kat izi doğrusu vardır. Oluşan l doğru ile n doğrusu diktir.
6. A4 ile O' noktasından geçen l doğrusuna dik olan bir doğru çizilebilir. Oluşan bu doğrunun 1 + s uzunluğunu kestiği nokta Q noktasıdır.

OO'P üçgeni ile O'PQ üçgenleri benzer üçgendir. 1.Bölümde pergel cetvel çizilebilir sayılardaki benzer işlemlerle $|PQ'| = \sqrt{s}$ olduğu görülür. (Şekil 1.5)



Şekil 2.16 : Karekök Formunda Sayı Oluşturma

5. Aksiyomu biraz cebirsel olarak ele alalım. İki nokta ve bir doğru verilsin. Verilen bir noktayı, verilen doğruya düşüren ve verilen diğer noktadan geçen yeni kat izi oluşur. A5 ile; verilen sabit bir P noktası ve sabit bir l doğrusunu kullanalım. P noktasını, l doğrusu üzerinde katlayabileceğimiz sonsuz sayıda P' noktası vardır. (Şekil 2.17)



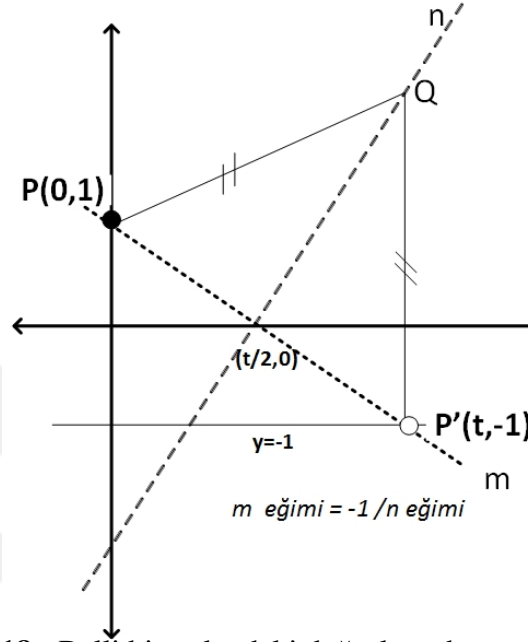
Şekil 2.17 : P fokus noktasından l doğrutmanına eşit uzaklıktaki noktalar

Aşağıdaki teorem kaynak [8] den alınmıştır.

Teorem 2.3.5 *Belli bir P noktasını, verilen bir l doğrusuna katlayan doğrular, P fokus ve l doğrultmanı olan parabolaya teğettir. (Şekil 2.18)*

İspat :

Genel yapıdan uzaklaşmadan kartezyen düzleminde $P(0,1)$ ve $l: y = -1$ doğrusu alalım. O halde P' noktası; P 'nin l üzerine katlandığı nokta $(t, -1)$, $t \in \mathbb{R}$ olsun.



Şekil 2.18 : Belli bir noktadaki doğruların büyütülmüş hali

P ve P' noktalarına sırasıyla $A1$ ve $A2$ yi uygulayalım. $A2$ ile $|PP'|$ uzunluğunun orta dikmesini elde ederiz. Orta noktanın koordinatı $(t/2, 0)$ ve $|PP'|$ eğimi $-\frac{2}{t}$ olur. Dik olarak kesen n doğrusunun eğimi $\frac{t}{2}$ dir. $A5$ ile oluşan n doğrusunun denklemi ;

$$y = \frac{t}{2}x + u \quad (2.1)$$

$(t/2, 0)$ noktasını yerine yazarak ;

$$y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4} \quad (2.2)$$

elde ederiz.

Q noktası, n doğrusu ile ve P' noktasından l doğrusuna çizilen dikmenin kesişimi olsun. Bu durumda Q noktası P ve P' noktalarına eşit uzaklıktadır. Tüm Q tipinde noktaların birleşimi, P fokus ve l doğrultmanı olan parabolayı oluşturur. Bu nedenle, Q noktası

P fokus ve l doğrultmanı olan parabol üzerindedir. $x = t$ yazarak $Q(t, \frac{t^2}{4})$ olarak bulunur. Q formundaki noktalarının birleşiminden olan bu eğrinin kuadratik eşitliği $y = \frac{x^2}{4}$ denkleminde parabolüdür. Ayrıca n doğrusu $y = \frac{x^2}{4}$ parabolüne $x = t$ de (yani Q noktasında) teğettir. Elde ettiğimiz son denklemi tekrar düzenlersek;

$$\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}x + y = 0 \quad (2.3)$$

$$t_{1,2} = \frac{\frac{x}{2} \mp \sqrt{(\frac{x}{2})^2 - y}}{1/2} \quad (2.4)$$

$t_{1,2} \in \mathbb{R}$ olması için $\frac{x^2}{4} - y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{x^2}{4}$ koşulu ortaya çıkar. Özellikle parabolün üzerindeki tüm noktalar

$$y = \frac{x^2}{4}$$

sağlar. Düzlemdeki P_2 noktaları $y \leq \frac{x^2}{4}$ olduğunda teğet doğrusundan geçer. O halde P_2 noktaları parabolün içinde olduğunda 5. aksiyom sağlanmaz.

Aşağıdaki teorem kaynak [8] den alınmıştır.

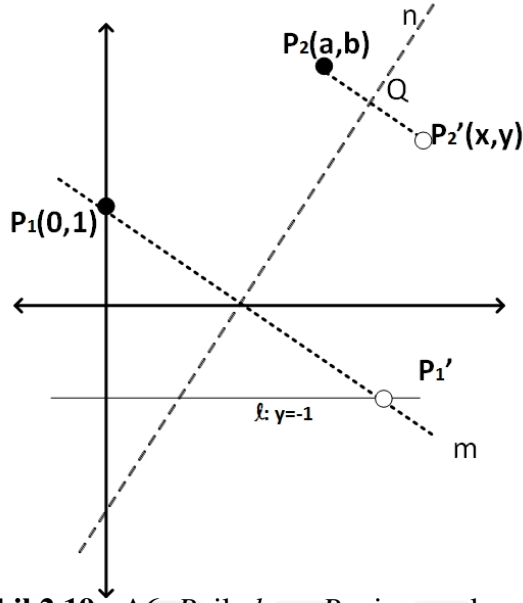
Teorem 2.3.6 P_1 ve P_2 noktaları ile l_1 ve l_2 doğruları verilsin. P_1 noktasını l_1 doğrusuna ve P_2 noktasını l_2 doğrusu üzerine götüren kat izi, iki parabolün ortak teğet doğrusudur.

İspat: Sabit olarak P_1, P_2 ve l_1 doğruları verilsin. $P_1 = (0, 1), P_2 = (a, b)$ ve $l_1 : y = -1$ olsun. P_1 noktasını l_1 doğrusuna katlarken P_2 noktası da P_2' noktasına gelecektir. P_2' noktasına (x, y) olsun. (Şekil 2.19)

Bir önceki teoremde P_1 noktası fokus, l_1 doğrusu doğrultmanı olan parabolün teğet doğrusunu bulduk. Aynı teğet doğrusu, P_2 fokusu ve l_2 doğrultmanı olan 2. parabol için de geçerlidir. Bu nedenle n doğrusu iki ayrı parabolün ortak teğet doğrusudur. Ayrıca n doğrusu $|P_2P_2'|$ diktir ve Q noktası $|P_2P_2'|$ ' nin orta noktasıdır. Q noktasını koordinatları $(\frac{a+x}{2}, \frac{b+y}{2})$ olarak bulunur.

n doğrusunun Q noktasındaki eğimi;

$$\frac{t}{2} = -\left(\frac{x-a}{y-b}\right) \quad (2.5)$$



Şekil 2.19 : A6, P_1 ile l_1 ve P_2 nin uygulanması

Q noktası, $n: y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$ üzerinde olduğundan fonksiyonda yerine yazarsak;

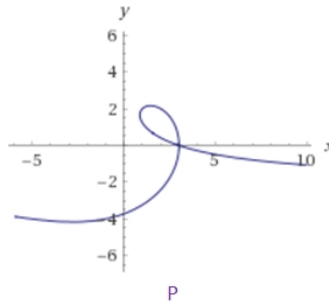
$$\frac{y+b}{2} = \frac{t}{2} \left(\frac{a+x}{2} \right) - \frac{t^2}{4} \quad (2.6)$$

Bu denklemde t yi yerine yazarsak;

$$\frac{y+b}{2} = -\left(\frac{x-a}{y-b} \right) \left(\frac{a+x}{2} \right) - \left(\frac{x-a}{y-b} \right)^2 \quad (2.7)$$

$$(y+b)(y-b)^2 = -(x^2 - a^2)(y-b) - 2(x-a)^2 \quad (2.8)$$

kübik denklemini verir. Sonuç olarak olası P_2' noktaları kübik eğrinin üzerindedir. P_1' olası yerine göre P_2' yeri değişir ve bu noktalar kümesi kübik eğrisini oluşturur. (Şekil 2.20)



Şekil 2.20 : $P_2(3,0)$ kübik eğrisi

P_2 noktasını l_2 ye katladığımızda yerlerinin pozisyonuna göre kübik eğriyi keser. İşte bu kesim noktaları 3.derece denklemin belirli noktalardaki çözümüne denktir. Robert Lang çalışmasına göre bu kübik eğrilerinin önemli özellikleri var. Birincisi P_2 noktasından geçen bir döngüsü vardır. İkincisi de herhangi l_2 doğrusu, eğriyi üç noktada keser.

l_1 ve l_2 doğruları paralel ve iki nokta bu doğruların arasındayken 6.Aksiyom gerçekleşmez.

Parabol denklemini hatırlatma:

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ formundaki parabolün merkezi $(h+p,k)$, fokus noktası (p, k) ve doğrultmanı $x=h-p$ den oluşur.

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ formundaki parabolün merkezi $(h,k+p)$, fokus noktası $(h, k+p)$ ve doğrultmanı $y = k-p$ den oluşur.

Aşağıdaki teorem kaynak [8] den alınmıştır.

Teorem 2.3.7 *Katsayıları origami çizilebilir sayılardan oluşan herhangi kübik denklemin kökleri de origami çizilebilirdir.*

İspat: Genel olarak kübik denklemini

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

olarak yazabiliriz. Buradaki a, b, c katsayıları origami çizilebilirdir. $x = X - \frac{a}{3}$ olarak yerine yazarsak ;

$$X^3 + (b - \frac{a^2}{3})X + \frac{27c + 2a^3 - 9ab}{27} = 0 \quad (2.9)$$

Katsayıları a,b,c origami çizilebilir olan denklemini $x^3 + px + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{O}$ formuna ulaşıyoruz. İki parabol ele alalım.

$$(y - \frac{p}{2})^2 = 2qx$$

$$y = \frac{x^2}{2}$$

İlk parabolün merkezi $(0, \frac{p}{2})$, fokus noktası $(\frac{q}{2}, \frac{p}{2})$, doğrultmanı da $x = -\frac{q}{2}$.

İkinci parabolün merkezi $(0, 0)$, fokus noktası $(0, \frac{1}{2})$, doğrultmanı da $y = -\frac{1}{2}$.

Önceki teoremden $(\frac{q}{2}, \frac{p}{2})$ noktasını $x = -\frac{p}{2}$ üzerine ve $(0, \frac{1}{2})$ noktasını $y = -\frac{1}{2}$ doğrusuna götüren bir kat izi doğrusu vardır ve bu f doğrusu iki parabole teğettir.

Bu teğet doğrusunun eğimi m olsun.

Bu eğim m' nin, $x^3 + px + q = 0$ denkleminin kökü olduğunu gösterelim.

$(y - \frac{p}{2})^2 = 2qx$ parabolünde f doğrusuna teğet noktası (x_1, y_1) ve

$y = -\frac{x^2}{2}$ parabolünde f doğrusuna teğet noktası (x_2, y_2) olsun. Denklemlerin türevlerini alıp; her iki noktayı türevlerde yerine yazarsak $\frac{dy}{dx}$ eşit olmalıdır.

$$(y_1 - \frac{p}{2})^2 = 2qx_1 \quad (2.10)$$

$$y_2 = -\frac{x_2^2}{2} \quad (2.11)$$

$$m = \frac{q}{y_1 - \frac{p}{2}} \Rightarrow y_1 = \frac{p}{2} + \frac{q}{m} \quad (2.12)$$

yerine yazarsak;

$$x_1 = \frac{q}{2m^2} \quad (2.13)$$

elde edilir.

İşlemlerden

$$\frac{2q}{2(y - \frac{p}{2})} = m = x_2 \quad (2.14)$$

olur. Buradan da

$$y_2 = \frac{m^2}{2}$$

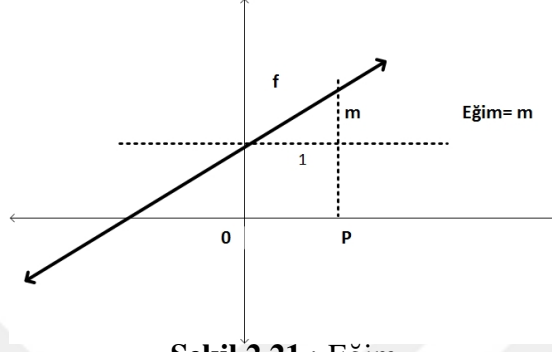
Eğim :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{m^2}{2} - (\frac{p}{2} + \frac{q}{m})}{m - \frac{q}{2m^2}} \quad (2.15)$$

İşlemleri devam ettirirsek:

$$m^3 + pm + q = 0 \quad (2.16)$$

Elde ederiz. m bu kübik denklemin köküdür ve $m \in \mathbb{O}$. Diğer taraftan f teğet doğrusunun eğimini m değerini basit origami çizilebilir aksiyomlarla da bulabiliriz. f doğrusundan; x eksenine paralel 1 birim uzunlukta doğru alarak ve y eksenine paralel doğru alarak m uzunluğuna ulaşırız (Şekil 2.21). Böylece katsayıları origami çizilebilir olan bir denklemin kökleri de origami çizilebilir olduğunu göstermiş olduk.



Şekil 2.21 : Eğim

İspat(Alternatif) :

Genel olarak kübik denklemini

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

olarak yazabiliriz. Buradaki a, b, c, d katsayıları origami çizilebilirdir. 3. derece denklemin çözümünü bulmak için Cardano Formülünü kullanalım.

Formüle göre denklemin kökleri;

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

Formüldeki S, T ;

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Formüldeki Q, R;

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$
$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

Teorem 2.3.4 ve Teorem 2.3.6 a göre S, R, Q, R origami çizilebilir sayılardır. Yine aynı teoremlere göre kübik denklemin kökleri de x_1, x_2, x_3 origami çizilebilir sayıdır.

Aşağıdaki teorem kaynak [8] den alınmıştır.

Teorem 2.3.8 $r \in \mathbb{R}$ olsun. r origami çizilebilir sayıdır ancak ve ancak

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$$

sonlu sayıda cisim sıralaması vardır öyle ki $r \in F_n$ ve her bir i için $[F_i : F_{i-1}] = 2$ veya 3 olur. ($1 \leq i \leq n$)

İspat:

(\Rightarrow) $r \in \mathbb{O}$ olduğunu farz edelim. r nin origami çizilebilir olması A1-A7 aksiyomlarıyla mümkündür. A1-A7 aksiyomlarından yalnızca birini kullandığımızda elde ettiğimiz yeni origami çizilebilen yeni sayının 1. , 2. , 3. derece (katsayıları origami çizilebilir sayılar) bir polinomun kökü olduğunu gözlemledik. Bu sonucu kullanarak r nin çizilebilir olması için sonlu cisim sıralaması olması gerekir. $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ öyle ki $[F_i : F_{i-1}] = 2 \vee 3$

(\Leftarrow)

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$$

öyle ki $[F_i : F_{i-1}] = 2 \vee 3$ olduğunu farz edelim.

O halde $F_i = F_{i-1}[\sqrt{d_i}]$ veya $F_i = F_{i-1}[\sqrt[3]{d_i}]$, $d_i \in F_{i-1}$.

$n=0$ olduğu zamanda $r \in F_0 = \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q} \subset \mathbb{O}$ dır.

$n = k-1$ için F_n nin herhangi bir elemanının origami çizilebilir olduğunu farz edelim. O halde $d_k \in F_{k-1}$ origami çizilebilirdir. 2.3.4 ve 2.3.7 den $\sqrt{d_k}$ ve $\sqrt[3]{d_k}$ çizilebilir demektir. Bu yüzden F_k nin herhangi bir elemanı origami çizilebilir. Tümevarım prensibinden $r \in F_n$ nin origami çizilebilir olduğu çıkar.

Aşağıdaki teorem kaynak [8] den alınmıştır.

Teorem 2.3.9 $r (r \in \mathbb{O})$ origami çizilebilir ise $[\mathbb{Q}(r) : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b \quad a, b \geq 0$

İspat:

Teorem 2.3.8 kullanarak r origami çizilebilirse , $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \mathbb{R}$ sonlu sayıda cisim genişlemesi vardır ve öyle ki $r \in F_n$ ve her $i=0,1, \dots, n$ için $[F_i : F_{i-1}] = 2$ veya 3 diyebiliriz. Zincir Kuralı ;

$$[F_n : \mathbb{Q}] = [F_n : F_{n-1}] \dots [F_1 : F_0]$$

ni kullanarak $[F_n : \mathbb{Q}] = 2^k 3^l$ olduğunu görürüz.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(r) \subset F_n$ olduğu için

$[\mathbb{Q}(r) : \mathbb{Q}]$ sayısı $[F_n : \mathbb{Q}]$ yu bölmelidir. Bu durumda $[\mathbb{Q}(r) : \mathbb{Q}] = 2^u 3^v \quad u, v \geq 0$ olur.

Not: Teorem 2.3.9 nin tersi doğru değildir.

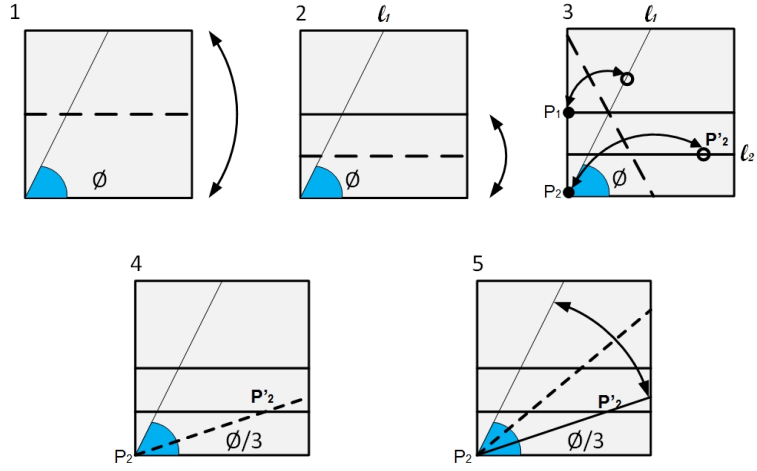
2.4 Geometrik Soruları Origami ile Çözümlemek

Bir önceki bölümde pergeli ve cetvelle sadece ikinci derece denklemleri çözümünün bulunabildiğini inceledik. Açığı 3 eşit parçaya ayırmak ve ikinin küp kökünü pergeli ve cetvelle bulmak imkansızdı. Başka bir ifadeyle pergeli-cetvel araçları, kübik denklem çözümünde yetersiz kalıyordu. Bu bölümde incelemelerimizde origaminin kübik denklem çözümünde yeterli olduğunu gösterdik (Teorem 2.3.7) . Küpün iki katının küp kökünü bulmak, açığı 3 eşit parçaya ayırmak origami aksiyomları ile yapılabilir.

2.4.1 Açığı 3 eşit parçaya ayırmak

Hisashi Abe, 1980 yılında origami kullanarak açığı 3 eşit parçaya ayırma methodunu ortaya koydu. Herhangi bir kare kağıt kullanarak, Huzita aksiyomlarıyla bu methodu inceleyelim (Şekil 2.22) . Karenin bir köşesinde ϕ keyfi bir açı alalım.

$0 < \phi < \pi/2$ durumunda ;

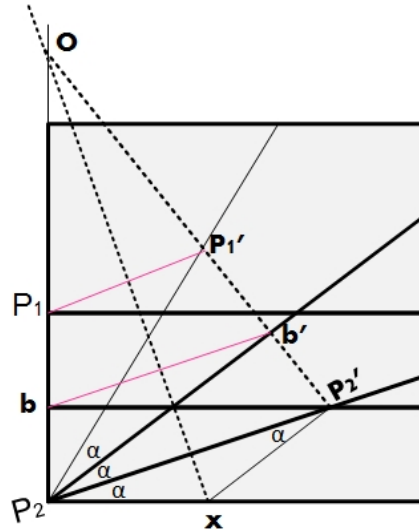


Şekil 2.22 : Herhangi dar açığı 3 eşit ayırma diyagramı

1. A3 ile alt ve üst kenarları katlayıp açalım.
2. A3 ile alt kenar ve orta kat izi üst üste katlayıp geri açalım. l_2 doğrusu oluşur.
3. A6 ile P_1 noktasını l_1 doğrusuna ve P_2 noktasını l_2 doğrusuna gelecek şekilde katlayıp geri açalım.
4. A1 ile P_2 noktası ile yeni oluşan origami çizilebilir P'_2 noktasından geçen bir kat izi yapalım.
5. A3 ile $P'_1\hat{P}_2P'_2$ açısını, iki doğruyu üst üste katlayıp geri açalım.

Böylece $\phi/3$ bulunur.

İspat:



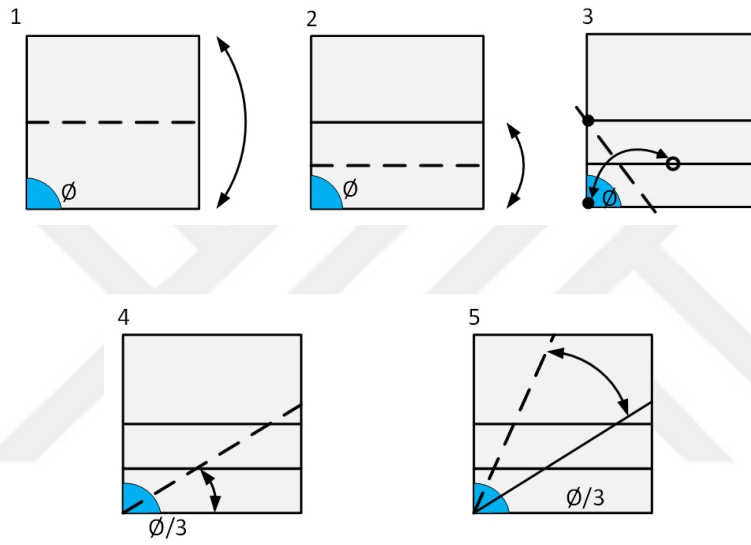
Şekil 2.23 : Origami nokta ve doğruların geometrik şekli

Karenin bir kenarı 4 birim olsun. 2. adımdan dolayı; $|P_1b| = |P_2b| = 1$ birim olur. 3. adımdan, $|OX|$ doğrusu OP_2x ve OP'_2x in simetrik ekseni olur. Benzen üçgenlerden

$P_2'P_2x$ ile $P_2P_2'x$ açıları eşittir. Aynı zamanda paralel kenar kuralından $P_2'P_2x$ açısı ile $b'P_2P_2'$ açısı eşittir. Dolayısıyla $P_2P_2'x$, α açısı olarak bulunur.

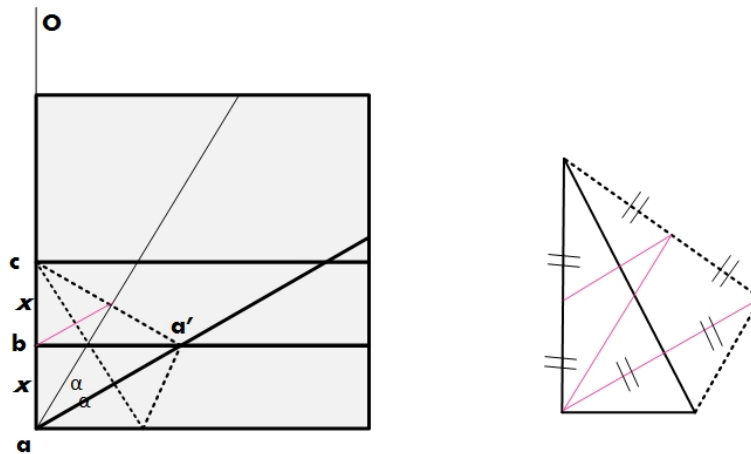
Açıların eşit olarak katlandığından (5. adım) $P_1' P_2 b'$ ve $b' P_2 P_2'$ açıları α olduğu aşikardır.

$\phi = \pi/2$ durumunda ;



Şekil 2.24 : Dik Açının 3 eşit parçaya ayrılması

Dik açıyı 3 eşit parçaya ayırma yöntemi, dar açının yöntemleriyle aynıdır. Şekil 2.22 deki adımların dik açığa uygunlanmış diyagramları Şekil 2.24 ile gösterildi.



Şekil 2.25 : Dik açıdaki Origami nokta ve doğruların geometrik şekli

$\phi > \pi/2$ durumunda ;

$\pi/2 + \beta$ olacak şekilde ayırarak aynı yöntemle açığı 3 eşit parçaya ayırabiliriz.

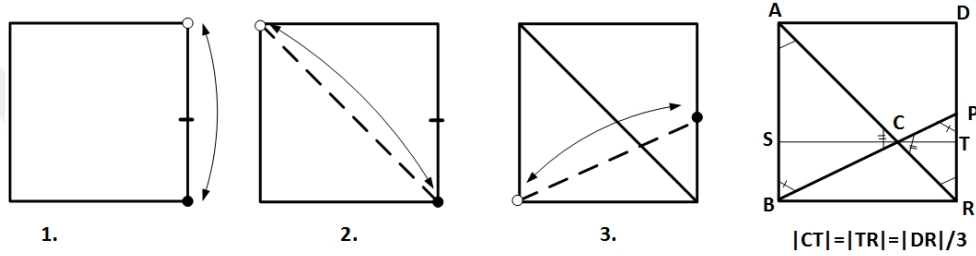
2.4.2 Küpün İki Katına Eşit Küp Yapmak

Bu kısımdan önce 3 eşit parçaya ve n eşit parçaya ayırma yöntemini vermekte fayda olacaktır.

Kenarı eşit n parçaya ayırma yöntemi

Şekil 2.26 ve Şekil 2.27 da Fujimoto yöntemini kullanıyoruz. [9] .Elimizde sonlu büyüklükte kare kağıt olsun. Sırasıyla aşağıdaki origami aksiyomlarını uygulayalım.

3 eşit parçaya ayırmak



Şekil 2.26 : Karenin bir kenarını 3 eşit parçaya ayırmak

1. A2 ile bir kenarın orta noktasını bulalım.
2. A1 ile karşı iki köşe noktasını katlayarak köşegen oluşur.
3. A1 ile 1. adımda bulunan nokta ve karşı noktasından geçen doğru oluşturulur.

$A\hat{C}B$ ve $R\hat{C}P$ benzer üçgenlerden

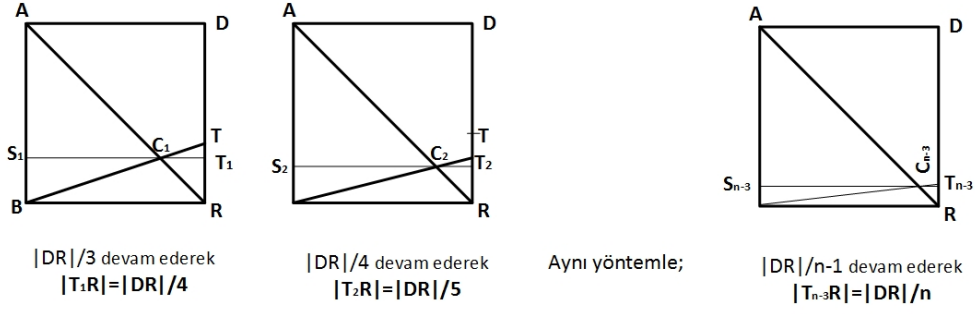
$$\frac{|AB|}{|PR|} = \frac{|AC|}{|CR|} \Rightarrow 2 = \frac{|AC|}{|CR|} \Rightarrow |CR| = \frac{|AR|}{3} \quad (2.17)$$

Aynı benzerlikten

$$|SC| = 2|CT|, \quad |CT| = |TR|, \quad |TR| = \frac{|DR|}{3} \quad \text{bulunur.}$$

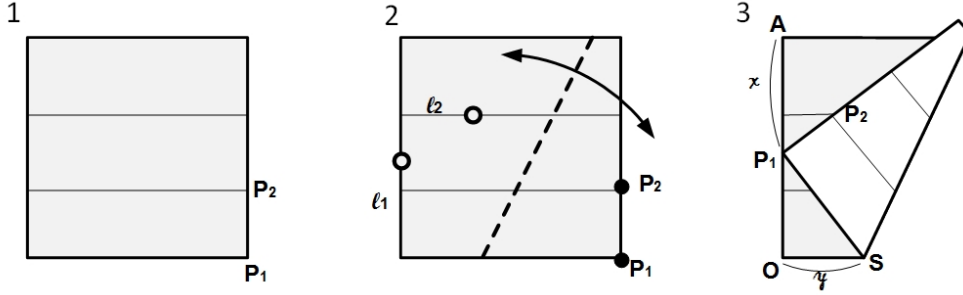
n eşit parçaya ayırmak

Her bulduğumuz yeni nokta üzerinden 2. ve 3. adımları uygularsak $\frac{|kenar|}{n}$ bulunur.



Şekil 2.27 : Karenin bir kenarını n eşit parçaya ayırmak

$\sqrt[3]{2}$ sayısının origami çizilebilir olduğu 1986 yıllarında Lang, Hull, Peter Messer tarafından ortaya çıkarılmıştır. Düzgün bir kare kağıt ile aksiyomları kullanarak başlayalım. Öncelikle karenin kenarını 3 eşit parçaya ayıralım.



Şekil 2.28 : $\sqrt[3]{2}$ origami diyagramı

1. Karenin kenarını 3 eşit parçaya ayıralım. (Şekil 2.26)
2. A6 ile P_1 noktasını l_1 doğrusu ve P_2 noktasını l_2 doğrusu üzerine gelecek şekilde katlayalım. (Şekil 2.28)
3. $|AP_1|$ değeri $\sqrt[3]{2}$ olur.

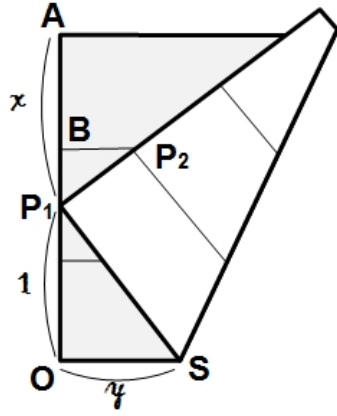
İspat:

Bunu göstermek için $|AP_1| = x$, $|OP_1| = 1$ birim , $|OS| = y$ diyelim.

$P_1\hat{O}S$ üçgeninde hipotenüs kuralından

$$1 + y^2 = (x + 1 - y)^2 \quad (2.18)$$

$$y = \frac{x^2 + 2x}{2(x+1)} \quad (2.19)$$



$$|AO| = x+1$$

$$|P_1P_2| = (x+1)/3$$

$$|P_1B| = x - (x+1)/3$$

$$|P_1S| = x+1-y$$

Olarak bulunur.

Şekil 2.29 : $\sqrt[3]{2}$ ispatı

elde edilir.

P_1BP_2 ve SOP_1 benzer üçgenlerden ;

$$\frac{y}{x+1-y} = \frac{x - \frac{x+1}{3}}{\frac{x+1}{3}} = \frac{2x-1}{x+1} \text{ bulunur.}$$

(2.19) deki y değerini yazalım.

$$\frac{x^2 + 2x}{2(x+1)(x+1-y)} = \frac{2x-1}{x+1}$$

Denkleminin çözümünden

$$x^3 = 2$$

$$\sqrt[3]{2}$$

bulunur.

2.4.3 Poligonlar

Bu bölümde düzgün n -gen şekillerin origami çizilebilir olmasını inceleyeceğiz.

Tanım 2.4.1 *Origami çizilebilir poligon, sonlu sayıda origami çizilebilir doğruların çevrelediği konvektir. Origami çizilebilir düzgün poligon, origami çizilebilir poligonun her bir kenarı eşit ve her kenar segmentin iç açısı eşit olan halidir.*

Origami çizilebilir poligonun köşeleri ve iç açıları, origami çizilebilir doğruların A3 aksiyomuyla kesişiminden oluşur ve iç açısı $\theta = \frac{2\pi}{n}$ dir.

Aşağıdaki teorem kaynak [8] den alınmıştır.

Teorem 2.4.2 *Düzgün n-gen origami çizilebilirdir ancak ve ancak $n = 2^a 3^b p_1 p_2 \cdots p_n$ olacak şekilde $a, b \geq 0$ tamsayıları ve herbiri $p_i = 2^c 3^d + 1$ formatında olan farklı $p_1, p_2 \cdots p_n$ asal sayıları vardır.*

İspat:

Düzgün poligonun origami çizilebilir olduğunu kabul edelim. Bu poligonu, merkezi 0 ve köşesi 1 noktasında olacak şekilde kartezyen düzlemine yerleştirebiliriz. O halde n-geci, her biri n tane origami çizilebilir olan birimlerden oluşturabiliriz. İlk köşe noktasını kompleks sayı olarak aldığımızda köşe $\rho_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ olur ve koordinatları $(\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n})$ olur.

(\Rightarrow) Origami aksiyomlarını kullanarak diğer köşeleri $\rho_n^2, \rho_n^3 \cdots$ de oluşturabiliriz. Kısacası n-gen origami çizilebilir olması ancak ve ancak ρ_n kompleks sayısı (yani $\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n}$ noktasının) çizilebilir olmasıdır. Cisim teorisinden $[\mathbb{Q}(\rho_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ olduğunu biliyoruz. $\phi(n) = 2^k 3^l$ olması için $n = 2^a 3^b p_1 \cdots p_n$ olmalıdır.

(\Leftarrow) $n = 2^a 3^b p_1 p_2 \cdots p_n$ $r \in \mathbb{N}$ olduğunu ve $p_i = 2^c 3^d + 1$; $a, b, c, d \geq 0$ farz edelim.

Bu durumda;

$$\phi(n) = \phi(2^a) \phi(3^b) \phi(p_1) \phi(p_2) \cdots \phi(p_n) p_r \quad (2.20)$$

$$= 2^{a-1} 3^{b-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1) = 2^l 3^m \quad (2.21)$$

$\phi(n) = 2^l 3^m$ olduğunda $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\rho_n)/\mathbb{Q})$ mertebesi $2^l 3^m$ olan bir abelyan gruptur. O halde $1 = G_0 < G_1 < G_2 < \cdots < G_n = G$ ve $G_i/G_{i-1} = 2$ veya 3 olacak şekilde bir alt grup seviyesi vardır. Herbir G_i , alt grubu G de normal olduğu için $K_i = \text{Fix}(G_i)$ bize Q nun bir Galois genişlemesini verir ki $[K_i : K_{i-1}] = [G_i : G_{i-1}] = 2$ veya 3 olur. Yani $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_m = \mathbb{Q}(\rho_n) \subseteq \mathbb{R}$ ve $\rho_n \in K_m$ olur. Teorem 2.3.8 göre ρ_n çizilebilirdir.

2.5 Küp Kök İşleminde Kapalılık

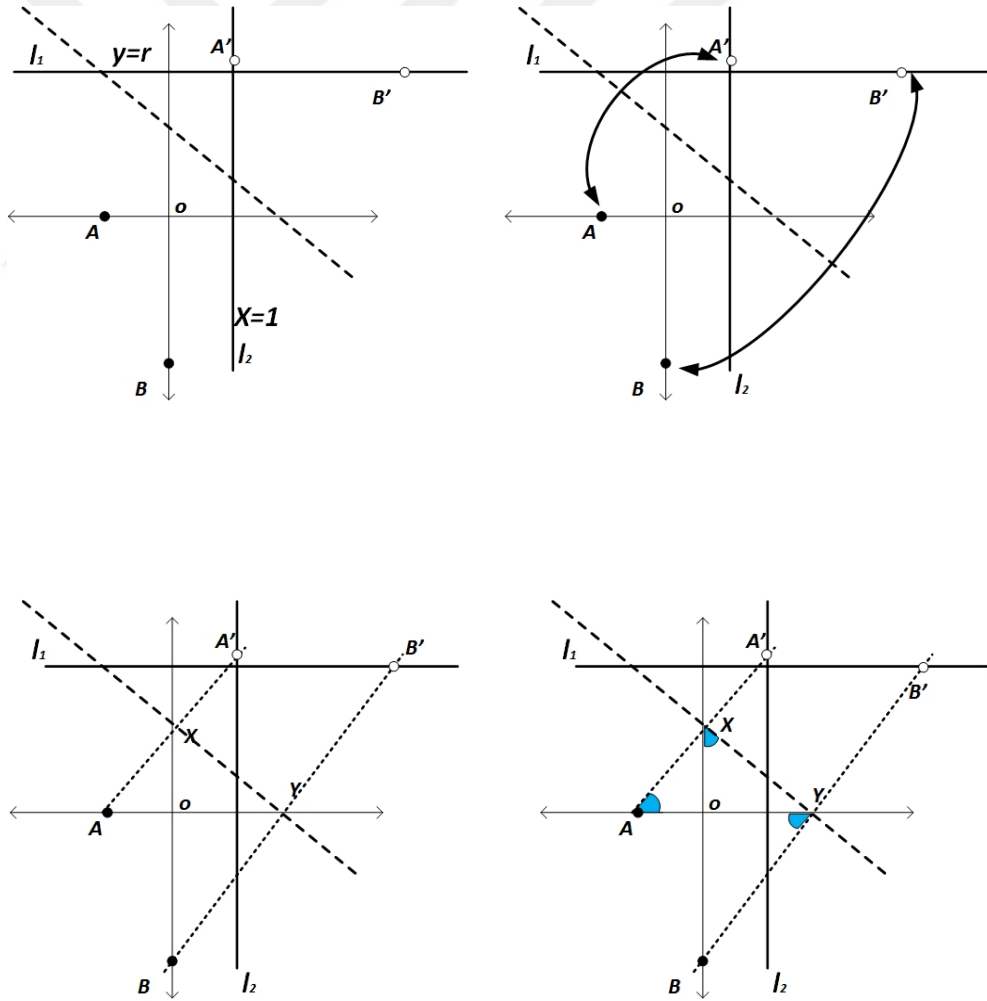
Aşağıdaki teorem kaynak [8] den alınmıştır.

Teorem 2.5.1 Origami çizilebilir sayılar kümesi küp kök işlemi altında kapalıdır.

İspat:

Herhangi bir sayı r olsun. Elimizde iki nokta ve iki doğru olsun. (Şekil 2.30) $A = (-1,0)$, $B = (0, -r)$ ve l_1 için $y = r$, l_2 için $x = 1$ doğrularını alalım. A6 aksiyomunu kullanarak; A noktasını l_2 , B noktasını l_1 üzerine götüren bir doğru oluşturabiliriz. A2 aksiyomunu kullanarak; A noktası ile A' ve B noktası ile B' noktalarından geçen kat izi doğrusu oluşturabiliriz.

Bu oluşan kat izleri , A6 ile oluşan kat izine diktir. (A1, A2 aksiyomunun sonuçları)



Şekil 2.30 : $\sqrt[3]{s}$ ispatı

$O\hat{A}X$, $O\hat{X}Y$, $O\hat{Y}B$ benzer üçgen kuralından;

$$\left[\frac{|OX|}{|OA|} = \frac{|OY|}{|OX|} = \frac{|OB|}{|OY|} \right] \quad (2.22)$$

Buradan

$$|OX| = \left[\frac{|OY|}{|OX|} \Rightarrow |OX|^2 = |OY| \right] \quad (2.23)$$

$$\left[\frac{|OY|}{|OX|} = \frac{|r|}{|OY|} \right] \quad (2.24)$$

$$|OY|^2 = r|OX| \Rightarrow |OX|^4 = r|OX| \Rightarrow r = \sqrt[3]{|OX|} \quad (2.25)$$



3. KATLANABİLİR ORİGAMİ

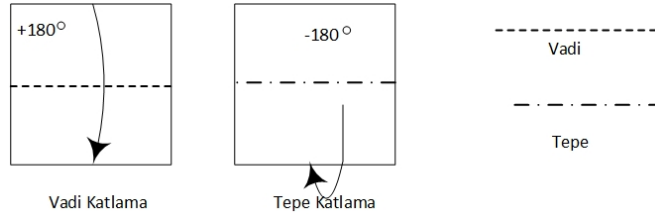
Origami ile modeller yapıldıktan sonra bazıları 2 veya 3 boyutlu olur. Bu bölümde 2 boyutlu olmasının sebeplerini matematiksel teoremlerle analiz edeceğiz. Katlanabilir/açılabilir endüstriyel ürünlerin geliştirilmesinde bu methodlar pratiklik ve işlevsellik sağlar.

Kaynakça kısmında yer alan [11], [10] numaralı çalışmalardan faydalanılmıştır.

3.1 Katlanabilir Origami

Tanım 3.1.1 Oluşan modelin kağıt kalınlığı sıfır ve modelin formu düz ise bu tarz modellere düz katlanabilir origami olarak isimlendirebiliriz.

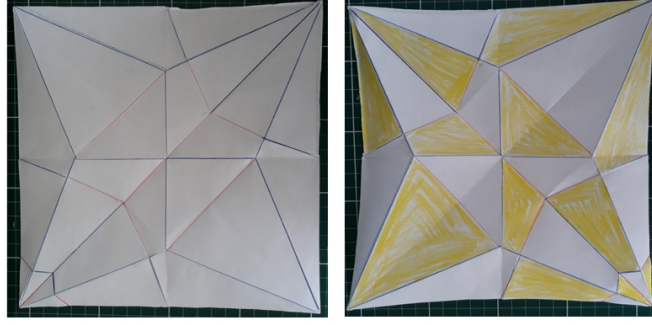
Tanım 3.1.2 Origami aksiyomları kullanarak oluşturulan katlama hareketi ön tarafa doğru yapılırsa vadi katlama olarak adlandırılır. Kağıt üzerindeki izi çukurumsu formdadır.(Şekil 3.1)



Şekil 3.1 : Tepe/ Vadi Katlaması

Tanım 3.1.3 Origami aksiyomları kullanarak oluşturulan katlama hareketi geri tarafa doğru yapılırsa tepe katlama olarak adlandırılır. Kağıt üzerindeki izi yükselti formdadır. (Şekil 3.1)

Vadi katlama ve tepe katlama işlemleri kağıt yüzeyine göre birbirinin ters yönlü hareketidir. Kat izleri birbirinin tersidir. Katlanabilir origami modelinin bir örneğini inceleyelim. Şekil 3.2 de 1. kısımda, katlanabilir modelin tepe/ vadi katlama desenini gösteriyor. Kat izlerinin kesişimi olan nokta veya köşelerde katlanabilir hareketi yapılabilir. Şekil 3.2 de 2. kısımda tepe/vadi katlamalar arasındaki segmentlerde

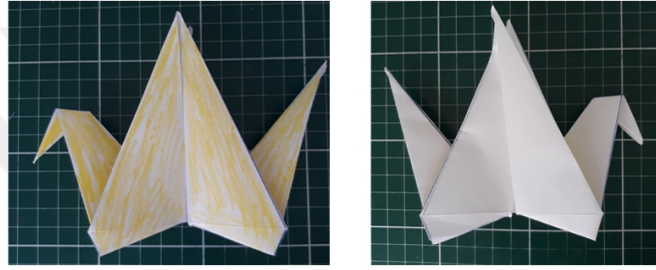


1 Vadi katlamalar kırmızı
Tepe katlamalar mavi

2 Renklendirme

Şekil 3.2 : Katlanabilir modelin Tepe/Vadi deseni

renklendirme; birbirine değmeyecek şekilde yapılabilir. Katlanabilir origamide katlamaya esas olan kat izleri arasındaki yüzeylerde ikili renklendirme yapılabilir.



3 Katlanabilir origami modelinin ön yüzü

4 Katlanabilir origami modelinin arka yüzü

Şekil 3.3 : Katlanabilir modelin Tepe/Vadi deseni ve renklendirilmesi

Şekil 3.3 de 1. kısımda katlanabilir modelin ön yüzünün tamamında tek renk görünürken 2. kısımda ise arka yüzünde ise diğer renk olduğu görünüyor.

3.1.1 Katlanabilir Origami Teoremleri

Kawasaki - Justin Teoremi 1980 yılında ortaya atıldı. Japon kökenli Kawasaki ve Fransız Justin tarafından ele alındı. Bir origami noktasındaki kesişimleri inceleyelim. Katlanmış bir kağıtta kat izleri ve o kat izlerinin kesişim noktaları vardır.

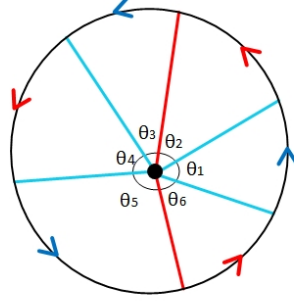
Katlanabilir origami noktasındaki kat izlerinin tipi ve aralarındaki açılarla ilgili teoremleri inceleyelim.

Teorem 3.1.4 (*Kawasaki - Justin Teoremi*) *Bu origami doğrularının kesiştiği bir origami noktası alalım. Kat izlerinin aralarındaki ardışık açılara $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ diyelim. Şekil 3.4 göre n sayıda kat izi alırsak (n çift sayı);*

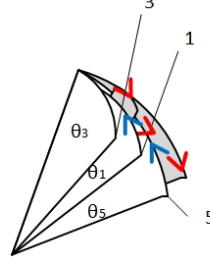
$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 2\pi$$

$$\sum_{i \text{ tek}} \theta_i = \sum_{i \text{ çift}} \theta_i$$

ise bu noktadaki origami noktası katlanabilir formdadır.



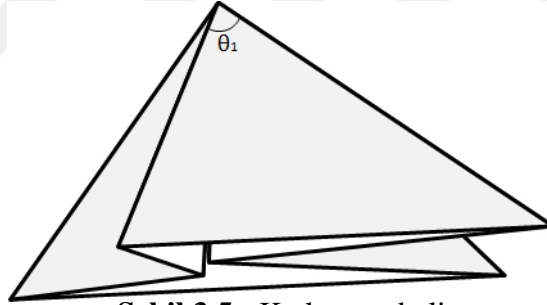
Katlanabilir noktadaki açılar ve yönlerinin açık hali



Katlanabilir noktadaki arası açılarının ve yönlerinin kapalı hali

Şekil 3.4 : Origami noktasındaki açılarının kesişimi

Teorem 3.1.5 Köşe, origami katlamalarda kesişim noktası olsun. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ bu köşedeki ardışık açılar ve n çift sayı olsun. Bu köşenin katlanabilir olması $\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \dots - \theta_n = 0$ dır.



Şekil 3.5 : Katlanmış hali

Teoremde geçen n sayısı kat izlerinin sayıdır. Buna köşenin derecesi de denir. Bir dairesel işlemde başlangıç yerine ulaşmak için çift sayıda hareket yapmak gerekir.

Kawasaki-Justin teoremi değişik varyasyonlarla ele alınabilir. En uygun varyasyon olanı aşağıdadır.

Teorem 3.1.6 Köşe, origami katlamaların kesişim noktası olsun.

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ bu köşedeki ardışık açılar ve n çift sayı olsun.

Bu köşenin katlanabilir olması

$$\theta_1 + \theta_3 + \dots + \theta_{n-1} = \theta_2 + \theta_4 + \dots + \theta_n = \pi$$

ile ilişkilidir.

Teorem 3.1.7 (*Maekawa - Justin Teoremi*) *Katlanabilir herhangi bir köşedeki açıların toplamı $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 2\pi$ olmak üzere; vadi katlamaların sayısı ile tepe katlamaların sayıları farkı 2 dir. T, tepe katlamaları sayısı ve V, vadi katlamaları sayısını gösterir.*

$$T - V = \pm 2$$

İspat:

Katlanmış kağıdın sınırları üzerinden gittiğimizi farz edelim. Bu harekette saat yönüne giderken; açı + işaretli, saat yönü tersine ise - işaretli olsun. İki aşamalı olarak bu çevrimsel açıyı hesaplayabiliriz.

Birinci aşamada bir tam dairesel harekette açıların yönleriyle toplamlarını ele alalım.

Bu toplama A diyelim.

$$A = \sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_i \in (0, 2\pi, -2\pi)$$

İkinci kısımda kat izlerindeki açıların dönme yönüyle yaptığı işlemin genel toplamı olarak ele alalım. Her bir tepe katı açığa π değeri verirken, vadi katlama işlemi de açıyı $-\pi$ kadar geri döndürür. V ile tüm vadi katlarının sayısı, T ile de tüm tepe katlamaların sayısı demiştik. Sonuç olarak toplam dönüş açısına τ dersek;

$$\tau = A \pm (T\pi - V\pi) = A \pm \pi(T - V)$$

Tam dönüş yaptığında τ değeri $\pm\pi$ değerine eşit olur.

Eğer $A = 0$ olduğunda her iki tarafı π ye bölersek $T - V = \pm 2$ elde edilir.

Eğer $A = \pm\pi$ ise

$$\tau = A$$

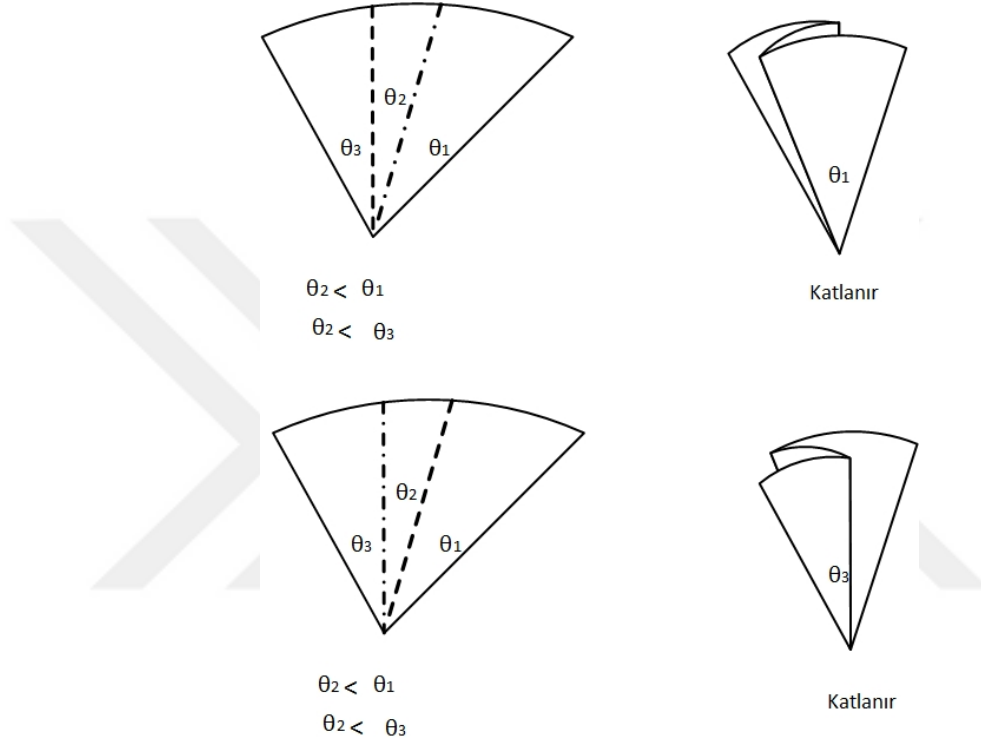
olur.

$$\tau = A = A \pm \pi(T - V) \implies T - V = 0$$

ise bu koşulda katlanabilir olmaz.

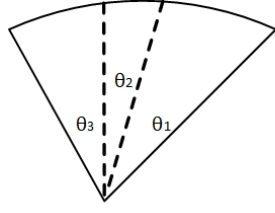
Teorem 3.1.8 (*Büyük-Küçük-Büyük Açı Teoremi* :) *Katlanabilir herhangi bir köşedeki en küçük açı θ_i ($\theta_{i-1} > \theta_i < \theta_{i+1}$) olsun. Bu açının çevrelediği kat izleri vadi veya tepe katlama tipindedir.*

Şekil 3.6 Teorem kriterlerine göre katlanabilir formdadır.



Şekil 3.6 : Açılarına göre Katlanabilir köşedeki Tepe/Vadi deseni -1

Ancak Şekil 3.7 Teorem kriterlerine göre katlanabilir formda değildir. Köşedeki en küçük açının çevrelediği kat izleri vadi katlama tipindedir. Teoreme göre zıt tipli olması gerekir.



$$\theta_2 < \theta_1$$
$$\theta_2 < \theta_3$$



θ_2 En küçük açı olmasından dolayı katlanamıyor.

Şekil 3.7 : Açısına göre Katlanabilir köşedeki Tepe/Vadi deseni-2



4. SONUÇ

Çalıştığım tez konumda pergel-cetvel çizimlerini, ardından origami sayılarını ve çizimlerini inceledim. Origami çizimlerinin, geometrik çizimlere göre daha güçlü olduğunu cisim genişlemelerini baz alarak çeşitli teoremlerle ispatladık ve gösterdik. Ayrıca ek olarak en son bölümde katlanabilir origamiye ilişkin bilinen savları inceledik. Gelecek çalışmalarda incelemek üzere 3 konu ele alabiliriz.

[Origami Aksiyomlarına Ek araçlar Ekleme] Birçok origami teorisyeni, yeni geometrik araçlar sağlayarak (kağıt kesme, şeffaf kağıt kullanarak katlamalar, işaretli cetvel) geleneksel tek katlamalı işlem kümesini genişletmiştir. [4] "Origami ve pergel Aksiyomları" olarak adlandırdıkları üç yeni operasyon sundu ve genişletilmiş aksiyomların kümesinin elipslere veya hiperbollere ortak teğet çizgiler oluşturmasına izin verdiğini göstermiştir. Ek olarak, belirli bir açının üçe ayrılması için yeni bir yöntem gösterdiler ve 4. derece denklemlerini çözenin ilginç bir yolunu sunduklarını açıkladılar. Konik bölümler üreten katlama aksiyomu ortaya çıkarıldı. Özel olarak bir noktayı doğru üzerine, diğer noktayı ise konik kısma götüren ek katlama işlemi sunuldu. Bu yeni genişletilmiş katlama aksiyomu 6.dereceye kadar polinomlar ürettiğini kanıtladılar. Bu katlama işlemlerinin gelecekteki araştırmalar için 5. ve 6. derece denklemlerin tümünü çözüp çözmeyeceği sorusunu bıraktılar.

[Origami Çizimlerde Kesme Yapılması Durumu] Tipik olarak origamide kesime izin verilmez. Origami teorisinin bir başka olası uzantısı olarak, kesime izin verilirse ne olacağı sorusunu ortaya çıkar. Bu fikri araştırmak için, kağıt kesildikten sonra kesimin ne anlama geldiği ve ne tür kıvrımlara izin verildiğine dair bir açıklama yapılması gerekecektir. Örneğin, kağıdın iki origami tarafından oluşturulabilir noktayı birleştiren doğrular veya doğru parçaları boyunca kesmesine izin verildiğinde bir durumu düşünebiliriz. Kağıdın bir doğru boyunca iki ayrılabilir parçaya kesilmesi durumunda, bir parçayı diğerinin üzerine yerleştirmeyi ve çizilebilir noktaları ve doğruları bir katmandan diğerine bindirmeyi düşünebiliriz. Ayrıca kağıdın bir doğru

boyunca kesilmesi, ancak iki parçaya tamamen ayrılmaması durumunda, kağıdın kesim etrafında katlanmasının çeşitli yollarını düşünebiliriz.

[Origami ve İkili konikler] [12] Origami ve koniklerin kesişimi kompleks sayılar kümesini oluşturur. Origamide parabolün teğet doğrusu oluşturduğundan koniklerin kesim noktaları ile arasındaki ilişki incelenebilir. Başka bir ifadeyle ikili koniklerin kesişimleriyle oluşan iki parabolün teğet doğruları arasındaki bağlantı çözülebilir.



KAYNAKLAR

- [1] **Celine Carstensen, Fine Benjamin, G.R.** Abstract Algebra, De Gruyter; 1 edition (January 28, 2011).
- [2] **Çallıalp, F.**, (2011). Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul, 1. sürüm.
- [3] **Cooke, R.**, (2008). Classical Algebra, Wiley Interscience, The University of Mathematics Emeritus.
- [4] **Fraleigh, J.B.** A First Course in Abstract Algebra, Addison Wesley, University of Rhode Island, 7. sürüm.
- [5] **Bergen, J.** A Concrete Approach to Abstract Algebra, Depaul University, 7. sürüm.
- [6] **Hull, T.** Project origami, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, first edition, 2006. Activities for exploring mathematics.
- [7] **Martin, G.E.**, (1997). Geometric Constructions, Springer, State University of New York at Albany.
- [8] **Lee Hwa, Y.** (2017). Origami-Constructible Numbers ,Thesis ,Ph.D., University of Georgia, 2017.
- [9] **Lang, R.J.** Origami and Geometric Constructions, Self Published (1996- 2003), 1996.
- [10] **Lang, R.**, (2011). Twist, Tiling and Tessellations, CRC Press, 1. sürüm.
- [11] **Demaine, E. ve O'Rourke, J.**, (2007). Geometric Folding Algorithms, Cambridge University Press, 1. sürüm.
- [12] **Cox, D.A.** Galois Theory, Wiley, Amhrest Collage, 2. sürüm.
- [13] **Ghourabi, F., Kasem, A. ve Kaliszky, C.** Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and Their Extensions , Automated Deduction in Geometry (9783642406713), pp 143, 2013.
- [14] **Alperin, C.R.** (2000). Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers , New York J. Math, 6(119):133,.
- [15] **King, J.** (2004). Origami-Constructible Numbers , Unpublished , king@cs.ubc.ca.
- [16] **Chapple, Andrew Vickers, M.E.M..T.H.** Origami and Constructible Numbers.
- [17] **Marcen, A.M.O.** (2013). Origami Constructions, Departamento De Matematicas, Universidad De Zaragoza.
- [18] **Huzita, H.** Understanding geometry through origami axioms. In Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91),70. British Origami Society, 1992.



ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Burcu Şansan

Doğum Tarihi ve Yeri: 1976, Babaeski

E-Posta: burcusans@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:**1998, İTÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER:

- 1998-2016 yılları arasında çeşitli kurumlarda analist programcı, iş analisti olarak çalıştım.
- 2016 yılından itibaren tam zamanlı olarak origami ile ilgilenmeye başladım. Ülkemizde tanınması, bilinmesi ve yaygınlaşması için çeşitli ortamlarda ve okullarda origami çalışmalarına devam ediyorum.