İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOALİSYON OLUŞTURMA OYUNLARI: İÇSEL KARARLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seçkin ÖZBİLEN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Yüksek Lisans Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali ERCENGİZ

HAZİRAN 2018

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOALİSYON OLUŞTURMA OYUNLARI: İÇSEL KARARLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seçkin ÖZBİLEN
(509141213)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Yüksek Lisans Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali ERCENGİZ

HAZİRAN 2018

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509141213 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Seçkin ÖZBİLEN, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "KOALİSYON OLUŞTURMA OYUNLARI: İÇSEL KARARLILIK" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Ali ERCENGİZ** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Ulviye BAŞER ILGAZ** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Doç. Dr. Ayça Ebru GİRİTLİGİL İstanbul Bilgi Üniversitesi	....

Teslim Tarihi : **3 Mayıs 2018**
Savunma Tarihi : **4 Haziran 2018**

Canım sevgilim Pınar Özbilen'e ve minik kuşumuza,

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın oluşumu esnasında sabırla ve anlayışla beni sürekli destekleyen değerli hocam Doç. Dr. Ali Ercengiz'e ve tez jürisinde yer almayı kabul eden değerli hocalarım Prof. Dr. Ulviye Başer Ilgaz'a ve Doç. Dr. Ayça Ebru Giritligil'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Haziran 2018

Seçkin ÖZBİLEN
(Araştırma Görevlisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ .... **vii**
İÇİNDEKİLER .... **ix**
SEMBOLLER .... **xi**
ŞEKİL LİSTESİ .... **xiii**
ÖZET .... **xv**
SUMMARY .... **xvii**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Tezin Amacı 3
1.2 Temel Kavramlar ve Tanımlar 4
1.3 Literatür Araştırması 9
1.3.1 Teorik literatür 9
1.3.2 Hesaplama karmaşıklığı literatürü 11
2. İÇSEL KARARLILIK **13**
2.1 İçsel Kararlılık 13
2.2 İçsel Kararlılık ve Diğer Kararlılık Kavramları 14
2.3 İçsel Algoritma 16
2.3.1 İçsel algoritma 16
2.4 Hesaplama Karmaşıklığı 18
3. SONUÇLAR **19**
KAYNAKLAR **21**
EKLER **23**
EK A 25
EK B 29
ÖZGEÇMİŞ **31**

SEMBOLLER

$\mid N \mid$	**:** N kümesinin eleman sayısı
$\wedge$	**:** Ve
$\vee$	**:** Veya
$\subset$	**:** Sıradan olmayan alt kümesi
$\subseteq$	**:** Alt kümesi
$\prod^N$	**:** N kümesinin tüm partisyonları kümesi
$\prod_0^N$	**:** N kümesinin sıradan olmayan tüm partisyonları kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

Şekil 1.1 : Kararlılık kavramları arasındaki ilişki. 7
Şekil 2.1 : Kararlılık kavramları arasındaki ilişki. 16

KOALİSYON OLUŞTURMA OYUNLARI:
İÇSEL KARARLILIK

ÖZET

Bu tezde İşbirlikçi (kooperatif) Oyun Teorisi'nin bir alt kolu olan Hedonik Koalisyon Oluşturma Oyunları çalışılacaktır. Bir hedonik koalisyon oluşturma oyununda sonlu sayıda birey yer almaktadır. Her bireyin sadece kendisinin içinde yer aldığı altkümeler (koalisyonlar) üzerine yansıyan, anti-simetrik, karşılaştırılabilir ve geçişken tercih bağıntısı vardır. Tüm bireylerin tercih bağıntıları düşünüldüğünde bir hedonik koalisyon oluşturma oyununun çözümü birey kümesinin partisyonlara (koalisyon yapısı) ayrılmasıdır.

Çözümlerin analizi ve sınıflandırılması kararlılık kavramları göz önünde bulundurularak yapılmaktadır. Bir koalisyon yapısının kararlı olması bireysel veya grup halinde herhangi bir tür harekete imkan sağlamaması ile alakalıdır. Literatürde üzerinde çalışma yapılan birçok kararlılık kavramı mevcuttur. Kararlılık kavramları arasında bugüne kadar en çok çalışılanları Çekirdek Kararlılık ve Nash Kararlılık kavramlarıdır. Genel olarak yapılan analizler bu kararlı koalisyon yapılarının hangi tanım kümeleri üzerinde var ve tek olduğu üzerinedir. En geniş tanım kümesi, tüm hedonik koalisyon oluşturma oyunları, düşünüldüğünde çekirdek kararlı veya Nash kararlı koalisyon yapıları her zaman var olamamaktadır. Bu kararlılık kavramlarını ayrı ayrı sağlayan koalisyon yapılarının en geniş tanım kümesinde olamamasının en temel sebebi bireysel ya da grup halinde yer değiştirme (bloke etme) kavramlarının çok kolay olması, dolayısıyla bloke edilemeyen koalisyon yapılarının neredeyse hiç bir şekilde var olmamasıdır. Diğer bir deyişle, bu kararlılık kavramlarının var olamamasının sebebi var olmak için talep ettiklerinin çok çok fazla olmasıdır. Bu kavramlar en geniş tanım kümesinin sadece bazı özel altkümelerinde var olabilmektedirler. Literatürde de genel olarak bu özel altkümelerin varlığı araştırılmakta, bu özel altkümelerde analiz ve karakterizasyon yapılabilmektedir. Ancak, çok özel altkümelerde kararlılık analizi çalışıldığında tüm bireylerin tüm olası tercihleri göz ardı edilmekte, bireyler sadece özel tercih kalıpları içine sokulmuş olmaktadır. Böyle durumlarda ortaya çıkan partisyon (koalisyon yapısı) da doğal değildir.

Bu tezde yukarıda bahsedilen aksaklıkların giderilmesine yönelik olarak içsel kararlılık kavramı çalışılacaktır. İçsel kararlı koalisyon yapıları tüm hedonik oyunlar kümesinde her zaman vardır. İçsel kararlılık bu yönüyle çekirdek kararlılık ve Nash kararlılık kavramlarına göre temsiliyet yeteneği daha yüksektir. Bireylerin tercihlerinin hiçbir şekilde kısıtlanmasına gerek olmadığı için koalisyon yapılarının analizini içsel kararlılık kavramı ile yapmak hem daha fazla seçenek hem de daha fazla serbestiyet sağlamaktadır.

Birinci ünitede hedonik koalisyon oluşturma oyunlarının genel modeli ve kararlılık kavramları tanıtılacaktır. Daha sonra teorik literatür anlatılacak, kısaca hesaplama karmaşıklığı literatüründen de bahsedilecektir. İkinci ünitede içsel kararlılık kavramı

tanıtılacaktır. İçsel kararlılık kavramının popüler kararlılık kavramları ile ilişkisi açıklanacaktır. Daha sonra içsel algoritma tanıtılacaktır. Herhangi bir hedonik koalisyon oluşturma oyununda içsel algoritmanın ürettiği tüm koalisyon yapıları içsel kararlıdır. Son ünitede sonuçlar özetlenecek, ileriye yönelik araştırma sorularından bahsedilecektir. Ekler kısmında tüm hedonik koalisyon oluşturma oyunlarının bazı özel altkümeleri tanıtılacak, daha sonra da hedonik koalisyon oluşturma oyunlarının gündelik hayatta karşımıza çıkan örnekleri uygulama olarak aktarıcaktır.

COALITION FORMATION GAMES:
INNER STABILITY

SUMMARY

In this thesis, we study a special topic from Cooperative Game Theory which is Hedonic Coalition Formation Games. In a hedonic coalition formation game, there exists finite number of individuals. Every individual only cares about which individuals are in her coalition, but does not care how other individuals are grouped. Every individual has reflexive, anti symmetric, complete, and transitive preferences over the coalitions of which she is a member. The duple, finite set of individuals and preferences of individuals, is called as hedonic coalition formation game, or simply hedonic game. Several hedonic game examples can be given from social life. Allocation of sophomore, junior, and senior university students into dormitory rooms, designation of homework groups in a class, government formation process of political parties after elections, allocation of deputies into parliamentary committees, and Central (Axis) Powers and Allied Powers during World War 1 (World War 2) are all hedonic games. In each of the example above, an individual only cares about which individuals are in her group. She does not care how other individuals are grouped. Moreover, each individual can be placed only in one coalition which is also meaningful and consistent with real life. For example, a student can only live in one room in a dormitory, or a political party either takes part in coalitional government or in opposition, but not in each side. Similarly, a country can not ally with central and axis powers at the same time, which is against the grain of the war.

The solution of a hedonic game is partitioning of individuals into disjoint coalitions. The solution is called as coalition structure. When analyzing, comparing, and classifying coalition structures, stability concepts are used. A coalition structure is called stable if and only if no individual or no group of individuals engage in coalition change. There exist several stability concepts in the literature. Most of the study in the literature is about finding the domains (set of hedonic games) in which stable coalition structures exist or unique. Nash stability and core stability are the most predominantly studied stability concepts. However, they do not exist in the full domain, that is in the set of all hedonic games. The main reason of the non-existence is, they require a lot from a coalition structure to become stable. In the full domain, they require that a coalition structure should not be blocked by an individual or a group of individuals. When we consider the complement of the domain in which coalition structures are either blocked by an individual or a group of individuals, we find the sub-domain which guarantees the existence of stable coalition structures. However, the complement sub-domain is very tiny. Studying with tiny sub-domains are not satisfactory because we ignore the generality of preferences of individuals. Thus, incoming coalition structures in sub-domains are not representative and natural. Moreover, when a society (set of individuals) is quite small, Nash stability somehow becomes senseless because every individual knows each other and there exists complete communication.

Nash stability becomes meaningful as the size of the society increases. On the other hand, core stability becomes almost meaningless and useless as the size of a society increases. This stems form the lack of complete communication in large societies. Contrary to Nash stability, core stability becomes meaningful as the size of the society decreases.

In this thesis, we introduce and analyze a new stability concept called inner stability. This stability concept is proposed in order to cure the deficiencies of the core stability and the Nash stability. A coalition structure is called inner stable if and only if there exists no coalition in the given coalition structure and no proper subset of that coalition such that individuals of the proper subset strictly prefer being in that proper subset to being in the coalition. Inner stable coalition structures exist for all hedonic games. Thus, we do not need to restrict preferences of individuals. Moreover, inner stability is meaningful, legitimate, and sensible for all size of societies. It is immune to size hitches and communication problems. As a result, stability analyzes of coalition structures through inner stability become more representative than Nash stability or core stability.

In the first chapter, we introduce the model of hedonic games and popular stability concepts in the literature. We present some hedonic game examples and we indicate the coalition structures which individually or simultaneously feature some of the stability concepts. Then we put across the theoretical literature. We mention the sub-domains (subsets of the set of all hedonic games) in which core stable coalition structures or Nash stable coalition structures always exist. In addition, we touch on the computational complexity literature. In the second chapter, we introduce the inner stability. A coalition structure is called inner stable if and only if there exists no coalition in the given coalition structure and no proper subset of that coalition such that individuals of the proper subset strictly prefer being in that proper subset to being in the coalition. We firstly explain the relation of inner stability with other stability concepts. We prove that every core stable coalition structure is also inner stable, however the converse of this statement is not true. Core stability requires that there should not exist any subset of the set of individuals which block the relevant coalition structure. For inner stability, this extreme requirement is loosened. Inner stability requires that there should not exists a proper sub-coalition (subset) of any coalition in a given coalition structure such that the proper sub-coalition blocks the coalition structure. This relation between requirements reveal the implication relation between core stability and inner stability. Then, we study the relation between Nash stability and inner stability. Nash stability requires that there should not be any individual who is dissatisfied with his current coalition and wants to get better off by joining in an existing (possibly empty) coalition. Nash stability and inner stability are independent concepts because Nash stability is related with individual moves and inner stability is related with coalitional moves. We can always find two hedonic games such that a coalition structure satisfies one of them but not the other, both of them, and neither of them. Afterwards, we compare inner stability and individual rationality. Individual rationality is a very natural concept which is both a domain restriction and a property of a coalition structure. If a coalition structure is individually rational, then every individual prefers to take part in a coalition rather than staying alone. We show that every inner stable coalition structure is individually rational. Subsequently, we explain the relation between inner stability and Pareto optimality. A coalition structure is called Pareto optimal if there exists no other coalition structure such that every individual is weakly better off and some of individuals are strictly better off in the new coalition structure. Both of the stability concepts exist in the full domain, however they are independent. This relation lights the fuse of several research questions: *Do inner stable and Pareto optimal coalition structures exist in the full domain ? In which sub-domain a coalition structure which is both inner stable and Pareto optimal always exist ? Can we find an efficient algorithm which gives inner stable and Pareto optimal coalition structures in polynomial time ?*

After we explain the relation between inner stability and other stability concepts, we introduce an algorithm called Inner Algorithm. Inner algorithm always brings inner stable non-trivial coalition structures in the full domain. Inner algorithm consists of three main parts. In the first part, algorithm finds mutually acceptable coalitions for leading individuals in each iteration. In the second part, algorithm detects blocking sub-coalitions and allows them to form up. This is done for each coalition selected in the first part. If there exists no such sub-coalition, the previously selected coalition does not dissolve and remains. In the last part, algorithm brings a non-trivial coalition structure. Followingly, we introduce our main result: *In the domain of all hedonic coalition formation games, every coalition structure which is brought out by the inner algorithm is always inner stable.* Aforementioned coalition structure is always individually rational. This property is guaranteed by the first part of the algorithm. Moreover, there exists no sub-coalition which inner blocks the coalition structure. This is guaranteed by the second part of the algorithm. A catchy property of the inner algorithm is, when the leading individuals in the firs part (in each iteration) changes, the inner algorithm brings out a different non-trivial coalition structure. In addition, we briefly talk about the computational complexity of the inner algorithm. Inner algorithm gets into action in the full domain. In the first part it searches mutually acceptable coalitions. In the worst case, it evaluates all non-empty coalitions of the set of individuals. This step becomes over in exponential time. In the second step, it checks the selected coalitions in the previous step. This step also becomes over in exponential time. Thus, the inner algorithm brings in the result in non-polynomial time. In the last chapter, we conclude and present some open research questions for future studies. Lastly, in the appendix, we touch on the domain restrictions that we present in the first chapter. Additionally, we study some real life applications of hedonic games.

1. GİRİŞ

İnsanoğlu sosyal bir canlıdır. Hayatının neredeyse tüm kademelerinde diğer insanlarla karşılıklı iletişim, etkileşim ve işbirliği içindedir. Bu karşılıklı iletişim, etkileşim ve işbirliği gruplar/topluluklar halinde hareket etmek şeklinde ortaya çıkmaktadır. Meslek odaları, ticari topluluklar, bir işyerindeki proje grupları, bir sınıftaki ödev grupları, bir hastanedeki ameliyat ekipleri, hobi grupları, siyasi partiler arasındaki koalisyon ve ortaklıklar, ülkeler arasındaki bloklaşmalar, vs. hepsi bu grup halinde hareket etmeye birer örnektir.

İnsanların gruplar halinde hareket etmesinin bir sürü sebebi bulunmaktadır. Proje ve ödev grupları oluşturmak, ameliyathane ekipleri kurmak işlerin daha hızlı, daha az maliyetle ve daha verimli yapılmasını sağlar. Siyasi partiler beraber hareket ettiklerinde daha fazla seçmen topluluklarına hitap edebilmekte ve daha çok oy alabilmektedirler. Ancak grup büyüklüğü arttığında, grup halinde hareket etmenin anlamı ve etkinliği azalmaktadır. Örneğin, bir ödev/proje grubunda ne kadar fazla birey yer alırsa diğerlerinin sırtından geçinen veya ödeve/projeye hiçbir katkı yapmayan birey sayısı daha da artmaktadır. Siyasi partilerin oluşturduğu blok/siyasi koalisyon ne kadar çok büyürse, koalisyonun hitap ettiği topluluğu temsil eden aday bulmak gitgide zorlaşır. Öyle ki en sonunda nötr bir aday ortaya çıkar ve hiçbir seçmen kitlesi temsil ve tatmin edilemez. Ameliyathane ekipleri belirli bir sayının üzerine çıkarsa ameliyatların hızlı ve etkin biçimde gerçekleştirilmesi hedefinden şaşılmış olunur. Bu durum hastanın hayatına bile mal olabilmektedir.

Tüm bunlar göz önünde bulundurulduğunda, şu sorular ortaya çıkmaktadır:

1. *İnsanlar bir araya geldiklerinde hangi grupların oluşması beklenmektedir?*
2. *İnsanlar bir araya geldiklerinde hangi büyüklükte grupların oluşması beklenmektedir?*
3. *İnsanlar gruplara ayrıldıktan sonra neden bazı grup yapıları bozulur ya da yeni yeni gruplaşmalar ortaya çıkar?*

4. *Oluşturulan gruplar bütünlüğünü ne şartlar altında koruyabilmektedirler?*

Yukarıda bahsedilen tüm konuların ve yöneltilen soruların cevabı Oyun Teorisi'nden yararlanılarak verilebilmektedir. Oyun Teorisi, matematiksel modelleme alanında yer almaktadır ve matematik ile iktisat bilimlerinin ortak bir alt koludur.

Bu tezde yukarıdaki soruların cevapları Oyun Teorisi'nin bir alt kolu olan Koalisyon Oluşturma Oyunları Teorisi kullanılarak verilecektir. Yukarıdaki soruların muhatabı olan alt alanın adı Hedonik Koalisyon Oluşturma Oyunları'dır. Hedonik koalisyon oluşturma oyunları (kısaca Hedonik oyunlar) ilk kez Dreze ve Greenberg 'in [1] çalışmasında ele alınmıştır. Bir hedonik oyunda sonlu sayıda birey yer almaktadır. Sonlu sayıdaki birey kümesinin boş olmayan tüm alt kümelerine koalisyon denmektedir. Her birey, sadece hangi diğer bireylerin kendi koalisyonu içerisinde yer alacağıyla ilgilenir. Kendisi dışındaki diğer bireylerin tercihleri ve öncelikleri ile ilgilenmez. Bir diğer deyişle, her bireyin, içerisinde yer aldığı koalisyonların üzerine tercihleri vardır. Kendisi dışındaki bireylerin oluşturduğu koalisyonlar ile ilgilenmez. Oda arkadaşı problemleri [2] ve evlenme problemleri [3], hedonik oyunların koalisyon büyüklüğünün maksimum iki olabildiği özel versiyonlarıdır.

Sonlu sayıda birey kümesi ve bu bireylerin tercihleri göz önünde bulundurulduğunda, bir hedonik oyununun çözümü birey kümesinin birbirinden bağımsız alt kümelere (koalisyonlara) ayrılmasıdır. Çözüme, koalisyon yapısı ya da kısaca partisyon (bölüntü) denmektedir. Hedonik oyunlarda çözümün kalitesi çeşitli kararlılık (stabilite) kavramları ile analiz edilmektedir. Literatürde üzerinde çalışma yapılmış birçok kararlılık kavramı mevcuttur [4]. Karalılık kavramları analiz edilirken ve karşılaştırılırken iki temel konu (soru) üzerinde durulmaktadır. Bunlardan ilki "*Var olan bir koalisyon yapısından kim ne amaçla ayrılır?*" sorusu, ikincisi de "*Ayrılan kişiler ne tür haklara sahiptir?*" sorusudur. Bir koalisyon yapısı düşünüldüğünde, tek bir birey içinde yer aldığı koalisyondan başka bir koalisyona katılmak için ya da yalnız hareket etmek amacıyla ayrılabilir. Ayrıca, grup halinde bireyler içinde yer aldıkları koalisyonlardan yeni bir koalisyon oluşturmak için ya da var olan bir koalisyona katılmak amacıyla ayrılabilirler. Ancak tüm bu hareketlerin gerçekleşmesi hakkı dolaylı yoldan bu ayrılışlardan etkilenen kişilerin (terk edilen koalisyondaki bireyler veya yeni katılınacak koalisyondaki bireyler) iznine tabidir. Tüm bu hak ve izinlerin hepsine Oyun Teorisi literatüründe *Üyelik Mülkiyet Hakları* denmektedir.

Üyelik mülkiyet hakları, bir birey ya da bireyler içinde yer aldıkları bir koalisyonu herhangi bir amaç ile terk ettiklerinde aktive olmaktadırlar.

Literatürde yer alan tüm kararlılık kavramlarının ayrıntılı sınıflandırılması Sung ve Dimitrov 'da [4], üyelik mülkiyet hakları ile ilgili analizler Sertel'de [5] ve Koray ve Sertel'de [6] anlatılmaktadır.

1.1 Tezin Amacı

Bu tezde yeni bir kararlılık kavramı olan içsel kararlılık (inner stability) tanıtılacak ve analiz edilecektir. Çekirdek kararlılık ve Nash kararlılık kavramları literatürde üzerinde en çok çalışma yapılmış kararlılık kavramlarıdır. Ancak tüm hedonik oyunlar tanım kümesi düşünüldüğünde, bazı hedonik oyunlar için çekirdek kararlı veya Nash kararlı çözüm (koalisyon yapısı) bulunmayabilir. Çekirdek kararlılık ve Nash kararlılık sadece kısıtlı tanım kümelerinde (bazı tür hedonik oyunlarda) mevcuttur. Bunun sebebi, bloke etme kavramının çok talepkar olmasıdır. Bu durum, çekirdek kararlı veya Nash kararlı çözümleri olmayan hedonik oyunlarda, çözümlerin analiz edilebilmesi için bu ikisi kadar talepkar olmayan, ancak yine de istenen koalisyon yapılarını istenmeyenlerden ayırmaya yarayan yeni kararlılık kavramlarına ihtiyacı arttırmaktadır. Bu tezde tanıtılacak olan içsel kararlı koalisyon yapıları en geniş tanım kümesinde (tüm hedonik oyunlar kümesi) her zaman vardır. Bu özelliği sayesinde içsel kararlılık kavramı, çekirdek kararlılık ve Nash kararlılık kavramlarının sebep olduğu mağduriyeti giderebilmektedir.

Verilen bir koalisyon yapısında, bir grup birey şimdiki yerlerini (koalisyonlarını) terkedip kendi başlarına yeni bir koalisyon oluşturarak daha mutlu olabiliyorlar ise, bu koalisyon yapısı bu yeni koalisyon tarafından bloke ediliyor denir. Eğer bir koalisyon yapısı hiçbir koalisyon tarafından bloke edilemiyor ise, bu koalisyon yapısına çekirdek kararlı koalisyon yapısı denir [7]. Verilen bir koalisyon yapısında, eğer hiçbir birey içinde yer aldığı koalisyonu terk edip kendi başına kaldığında ya da var olan başka bir koalisyona katıldığında daha mutlu olamıyor ise, bu koalisyon yapısına Nash kararlı denir [8]. Verilen bir koalisyon yapısında (tüm koalisyonlar düşünüldüğünde), herhangi bir koalisyon parçalanıp bu koalisyonun üyesi bazı bireyler kendi başlarına yeni bir koalisyon oluşturup daha mutlu olabiliyorlar ise, bu koalisyon yapısına (alt koalisyon tarafından) içsel bloke ediliyor denir. Eğer bir koalisyon yapısında herhangi bir içsel bloke mümkün değil ise, bu koalisyon yapısına içsel kararlı denir.

Bu tezde ilk önce hedonik oyunların matematiksel modeli verilecektir. Ardından hedonik oyunlar ile alakalı teorik literatür tanıtılacak ve hesaplama karmaşıklığı literatürüne değinilecektir. Sonrasında içsel kararlılık kavramı tanımlacaktır. Tüm çekirdek kararlı koalisyon yapılarının aynı zamanda içsel kararlı olduğu, ancak bu ifadenin tersinin doğru olmadığı gösterilecektir. İçsel kararlılık ve Nash kararlılık kavramlarının ise tamamen bağımsız kavramlar olduğu açıklacaktır. Devamında içsel kararlı koalisyon yapılarının her zaman var olduğu bir algoritma yardımı ile ispatlanacaktır. Son olarak bu algortimanın hesaplama karmaşıklığı tartışılacaktır.

1.2 Temel Kavramlar ve Tanımlar

$\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesi, potansiyel birey kümesini simgelemektedir. **Birey kümesi** N, potansiyel birey kümesi $\mathbb{Z}^+$'nin boş olmayan sonlu bir alt kümesidir, yani, $N \subset \mathbb{Z}^+ \wedge |N| < \infty \wedge N \neq \emptyset$.

Eğer $|N| = n$ ise, birey kümesi $N = \{1, 2, ..., n\}$ şeklinde gösterilmektedir. Birey kümesinin her elemanı sayı, bir bireyi temsil etmektedir. i, j, k gibi harfler birey kümesinden alınan rastgele temsili bir bireyi anlatmak için kullanılacaktır.

N birey kümesinin boş olmayan tüm alt kümelerine **koalisyon** denmektedir. Koalisyonlar A, B, C, H, S ve T gibi büyük harfler ile gösterilecektir.
$\mathscr{C} = \{S \subseteq N \mid S \neq \emptyset\}$ kümesi, tüm koalisyonlar kümesini, $\mathscr{C}_i^N = \{S \in \mathscr{C} \mid i \in S\}$ kümesi de i bireyinin içerisinde yer aldığı tüm koalisyonların kümesini gösterecektir. Bir T koalisyonu i, j ve k bireylerinden oluşuyor ise bu koalisyon $T = (i, j, k)$ şeklinde gösterilecektir.

$\succsim_i$ her $i \in N$ bireyi için, $\mathscr{C}_i^N$ üzerine tanımlı yansıyan, ters simetrik, karşılaştırılabilir ve geçişken bir **tam sıralama bağıntısı**nı gösterecektir.

Yansıyan : $\forall A \in \mathscr{C}_i^N, A \succsim_i A$,

Ters Simetrik : $\forall A, B \in \mathscr{C}_i^N, A \succsim_i B \wedge B \succsim_i A \Longrightarrow A \sim_i B$,

Karşılaştılaştırılabilir : $\forall A, B \in \mathscr{C}_i^N, A \succsim_i B \vee B \succsim_i A$,

Geçişken : $\forall A, B, C \in \mathscr{C}_i^N, A \succsim_i B \wedge B \succsim_i C \Longrightarrow A \succsim_i C$

Her $i \in N$ bireyi için, $\succsim_i$ sıralama bağıntısına i **bireyinin tercihi** diyeceğiz. $\succsim_i$ sıralama bağıntısının **sıkı** hali $\succ_i$ ile **kayıtsız** hali $\sim_i$ ile gösterilmektedir. Eğer $A, B \in \mathscr{C}_i^N$ ise $A \succ_i B \Longleftrightarrow A \succsim_i B \wedge B \not\succsim_i A$ olur. $A \sim_i B \Longleftrightarrow A \succsim_i B \wedge B \succsim_i A$ olur.

$L(\mathscr{C}_i^N)$ kümesine, $\mathscr{C}_i^N$ üzerine tanımlı tüm tam sıralama bağıntıları (tüm tercihler) kümesi diyeceğiz. $N = \{1, 2, ..., n\}$ birey kümesi düşünüldüğünde:
$\mathscr{R}^N = L(\mathscr{C}_1^N) \times L(\mathscr{C}_2^N) \times ... \times L(\mathscr{C}_n^N)$ kümesine tüm tercih profilleri kümesi diyeceğiz.
$\succsim = (\succsim_1, ..., \succsim_n) \in \mathscr{R}^N$ vektörüne ise **tercih profili** diyeceğiz.

Tanım 1.1: N birey kümesi ve $\succsim$ tercih profili olsun. $(N, \succsim)$ ikilisine **hedonik koalisyon oluşturma oyunu** (kısaca hedonik oyun) denir.

$\mathscr{G} = \{(N, \succsim) \mid \succsim \in \mathscr{R}^N \wedge N \subset \mathbb{Z}^+ \wedge \mid N \mid < \infty\}$ tüm hedonik oyunlar kümesini göstermektedir.
Rastgele bir hedonik oyun $(N, \succsim)$ verildiğinde, bu oyunun çözümü birey kümesi N'in birbiriyle kesişimi olmayan alt kümelere bölüntülenmesidir (partisyonudur). Bir diğer deyişle, $\pi = \{T_1, T_2, ..., T_K\}$ ($K <\mid N \mid$ pozitif sayı) $(N, \succsim)$ hedonik oyununun çözümü ise (i) $\forall l \in \{1, 2, ..., K\}, T_l \neq \emptyset$, (ii) $\forall l \neq m \in \{1, 2, ..., K\}, T_l \cap T_m = \emptyset$ ve (iii) $\bigcup_{l=1}^{K} T_l = N$ olur. $\pi = \{T_1, T_2, ..., T_K\}$'ye **koalisyon yapısı** denmektedir. $\pi(i)$, π koalisyon yapısında i bireyinin içerisinde yer aldığı koalisyonu simgelemektedir. Tüm bireylerin tek başına kaldığı koalisyon yapısı $\{(1), (2), ..., (n)\}$'nı $\Im$ sembolü ile göstereceğiz. Herkesin bir arada olduğu büyük koalisyon yapısı $\{(1, 2, .., n)\}$'nı ise $\aleph$ sembolü ile göstereceğiz. Bu iki koalisyon yapısına $(N, \succsim)$ hedonik oyununun **sıradan (trivial) koalisyon yapıları** denmektedir. Bunların dışında kalan tüm koalisyon yapılarına ise **sıradan olmayan (non-tirivial) koalisyon yapıları** denmektedir.
Bir birey kümesi N düşünüldüğünde $\prod^N$ tüm koalisyon yapıları kümesini, $\prod_0^N = \prod^N \setminus \{\Im, \aleph\}$ de tüm sıradan olmayan koalisyon yapıları kümesini gösterecektir.

Örnek 1.1: $N = \{1, 2, 3\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_1, \succsim_2, \succsim_3\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olsun.

$\succsim_1$	$\succsim_2$	$\succsim_3$
12	$12 \sim 123$	123
13	23	13
123	2	23
1		3

Bu hedonik oyunun toplam 5 tane çözümü bulunmaktadır. Bunlar sırasıyla $\pi^1 = \{(1),(2,3)\}$, $\pi^2 = \{(1,2),(3)\}$, $\pi^3 = \{(1,3),(2)\}$, $\pi^4 = \{(1,2,3)\}$ ve $\pi^5 = \{(1),(2),(3)\}$ koalisyon yapılarıdır.

Bir hedonik oyunda koalisyon yapılarının tercih edilirliği ve kalitesi kararlılık kavramıyla analiz edilmektedir. Literatürde üzerine çalışma yapılmış çok sayıda kararlılık kavramı bulunmaktadır. Aşağıda bireysel ve grup halinde ayrılmalara dayalı olarak tanımlanan ve literatürde üzerine çokça çalışma yapılmış kararlılık kavramlarının tanımı verilecektir [7], [8].

Tanım 1.2: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $\pi \in \prod^N$ bir koalisyon yapısı olsun.

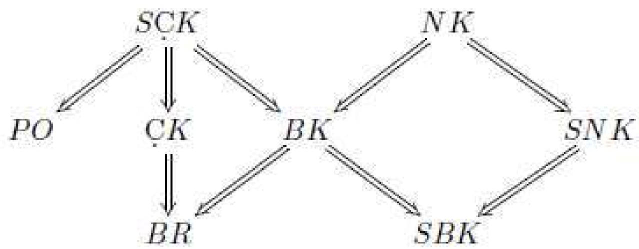
- π **çekirdek kararlı** (ÇK) $\iff \nexists S \subseteq N$ öyle ki $\forall i \in S$, $S \succ_i \pi(i)$.
- π **sıkı çekirdek kararlı** (SÇK) $\iff \nexists S \subseteq N$ öyle ki $\forall i \in S$, $S \succsim_i \pi(i)$ ve $\exists j \in S$, $S \succ_j \pi(j)$.
- π **Nash kararlı** (NK) $\iff \nexists i \in N$, $\nexists S \in (\pi \cup \{\emptyset\})$ öyle ki $S \cup \{i\} \succ_i \pi(i)$.
- π **bireysel kararlı** (BK) $\iff \nexists i \in N$, $\nexists S \in (\pi \cup \{\emptyset\})$ öyle ki $S \cup \{i\} \succ_i \pi(i)$ ve $\forall j \in S$, $S \cup \{i\} \succsim_j S$.
- π **sözleşmeli Nash kararlı** (SNK) $\iff \nexists i \in N$, $\nexists S \in (\pi \cup \{\emptyset\})$ öyle ki $S \cup \{i\} \succ_i \pi(i)$ ve $\forall j \in (\pi(i) \backslash \{i\})$, $(\pi(i) \backslash \{i\}) \succsim_j \pi(i)$.
- π **sözleşmeli bireysel kararlı** (SBK) $\iff \nexists i \in N$, $\nexists S \in (\pi \cup \{\emptyset\})$ öyle ki $S \cup \{i\} \succ_i \pi(i)$ ve $\forall j \in S$, $S \cup \{i\} \succsim_j S$ ve $\forall k \in (\pi(i) \backslash \{i\})$, $(\pi(i) \backslash \{i\}) \succsim_k \pi(k)$.
- π **bireysel rasyonel** (BR) $\iff \forall i \in N$, $\pi(i) \succsim_i \{i\}$.
- π **Pareto optimal** (PO) $\iff \nexists \pi^* \in \prod^N$ öyle ki $\forall i \in N$, $\pi^*(i) \succsim_i \pi(i)$ ve $\exists j \in N$, $\pi^*(j) \succsim_j \pi(j)$.

Her sıkı çekirdek kararlı koalisyon yapısı aynı zamanda çekirdek kararlı, Pareto optimal ve bireysel kararlıdır. Ancak bunun tersi doğru değildir. Ayrıca çekirdek kararlılık ve Nash kararlılık arasında herhangi bir gerektirme ilişkisi bulunmamaktadır, bu kavramlar birbirinden bağımsızdır. Eğer bir koalisyon yapısı Nash kararlı ise aynı zamanda bireysel kararlı, sözleşmeli bireysel kararlı ve sözleşmeli Nash kararlıdır.

Ayrıca tüm sözleşmeli Nash kararlı koalisyon yapıları ile bireysel kararlı koalisyon yapıları aynı zamanda sözleşmeli bireysel kararlıdır.

Tüm hedonik oyunlar kümesi $\mathscr{G}$ düşünüldüğünde, her hedonik oyun için Pareto optimal koalisyon yapıları, sözleşmeli bireysel kararlı koalisyon yapıları ve bireysel rasyonel koalisyon yapıları her zaman mevcuttur, [8]. Diğer koalisyon yapılarının varlığı $\mathscr{G}$'nin bazı özel alt kümelerinde mümkündür.

Kararlılık kavramları arasındaki gerektirme ilişkisi Şekil 1.1'de açıklanmaktadır. Tek taraflı gerektirme okunun anlamı şu şekildedir: yukarıdaki kararlılık kavramı aşağıdaki kararlılık kavramını gerektirmektedir. Aralarında doğrudan ya da dolaylı bir şekilde gerektirme oku (okları) bulunmayan kararlılık kavramları birbirinden bağımsızdır.



Şekil 1.1 : Kararlılık kavramları arasındaki ilişki.

Örnek 1.2: $N = \{1,2,3\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_1, \succsim_2, \succsim_3\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olsun.

$\succsim_1$	$\succsim_2$	$\succsim_3$
$13 \sim 123$	123	13
12	23	23
1	12	123
	2	3

Bu hedonik oyunun toplam 5 tane çözümü bulunmaktadır. Bunlar sırasıyla $\pi^1 = \{(1,3),(2)\}$, $\pi^2 = \{(1),(2,3)\}$, $\pi^3 = \{(1,2),(3)\}$, $\pi^4 = \{(1,2,3)\}$ ve $\pi^5 = \{(1),(2),(3)\}$ koalisyon yapılarıdır. Bu koalisyon yapılarının kararlılıklarını inceleyelim:

- $\pi^1 = \{(1,3),(2)\}$ koalisyon yapısı sıkı çekirdek kararlıdır. Dolayısıyla aynı zamanda Pareto optimal, çekirdek kararlı, bireysel kararlı, sözleşmeli Nash kararlı ve bireysel rasyoneldir. Bireysel kararlı ve sözleşmeli Nash kararlı olmasından dolayı sözleşmeli bireysel kararlıdır. Ancak Nash kararlı değildir. Çünkü 2 numaralı birey var olan $(1,3)$ koalisyonuna katılarak daha yüksek bir tercihinde yer almış olur ve böylelikle bu koalisyon yapısını bireysel olarak bloke eder.

- $\pi^2 = \{(1),(2,3)\}$ koalisyon yapısı Pareto optimaldir. Çekirdek kararlı değildir. Çünkü $(1,3)$ koalisyonu bir araya gelerek kendi başlarına yeni bir koalisyon oluştururlar ve bu koalisyondaki tüm bireyler daha yüksek tercihlerinde yer alırlar. Yani $(1,3)$ bu koalisyon yapısını bloke eder. Nash kararlı değildir. Çünkü 1 numaralı birey var olan $(2,3)$ koalisyonuna katılarak daha yüksek bir tercihinde yer almış olur ve böylelikle bu koalisyon yapısını bireysel olarak bloke eder. Bu koalisyon yapısı sözleşmeli Nash kararlıdır, ancak bireysel kararlı ve sözleşmeli bireysel kararlı değildir. Hem bireysel kararlı hem de sözleşmeli bireysel kararlı olmamasının sebebi, 1 numaralı bireyin var olan $(2,3)$ koalisyonuna katıldığında 3 numaralı bireyin daha alttaki bir tercihine düşmesi ve daha mutsuz olmasıdır.

- $\pi^4 = \{(1,2,3)\}$ koalisyon yapısı Nash kararlı, çekirdek kararlı ve Pareto optimaldir. Ancak sıkı çekirdek kararlı değildir çünkü $(1,3)$ koalisyonu zayıf olarak bu koalisyon yapısını bloke etmektedir (1 numaralı birey kayıtsız kalmakta, 3 numaralı birey daha mutlu olabilmektedir).

- $\pi^3 = \{(1,2),(3)\}$ ve $\pi^5 = \{(1),(2),(3)\}$ koalisyon yapıları sadece ve sadece bireysel rasyoneldir. Bu koalisyon yapıları tekil bireylerin var olan bir koalisyona katılması şeklinde ya da birkaç bireyin yeni bir koalisyon oluşturması şeklinde bloke edilebilmektedir. Pareto optimal olmamalarının sebebi sırasıyla şöyledir: π^4 koalisyon yapısı π^3'e Pareto baskındır, yani tüm bireyler π^4 koalisyon yapısındaki yerlerinde π^3'teki yerlerine göre en az daha mutludurlar. Aynı şekilde π^1, π^2, π^3 ve π^4 koalisyon yapıları da π^5'e Pareto baskındır.

Örnek 1.3: $N = \{1,2,3\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_1, \succsim_2, \succsim_3\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olsun.

$\succsim_1$	$\succsim_2$	$\succsim_3$
12	23	13
13	12	23
123	123	3
1	2	123

Bu hedonik oyunun toplam 5 tane çözümü bulunmaktadır. Bunlar sırasıyla $\pi^1 = \{(1,2),(3)\}$, $\pi^2 = \{(1),(2,3)\}$, $\pi^3 = \{(1,3),(2)\}$, $\pi^4 = \{(1,2,3)\}$ ve $\pi^5 = \{(1),(2),(3)\}$ koalisyon yapılarıdır. Bu koalisyon yapılarından hiçbiri çekirdek kararlı, Nash kararlı ve bireysel kararlı değildir. $\pi^* = \{(i,j),(k)\}$ şeklindeki tüm koalisyon yapıları sözleşmeli Nash kararlı, sözleşmeli bireysel kararlı, Pareto optimal ve bireysel rasyoneldir. π^4 koalisyon yapısı ise hiçbir kararlılık kavramını sağlamamaktadır. Pareto optimal ve bireysel rasyonel de değildir. $\pi^* = \{(i,j),(k)\}$ şeklindeki tüm koalisyon yapıları π^4'e Pareto baskındır. 3 numaralı birey ise tek başına kalmayı $(1,2,3)$'ün içinde yer almaya tercih ettiğinden dolayı bireysel rasyonellik bozulmaktadır.

1.3 Literatür Araştırması

Bu kısımda ilk önce hedonik oyunlar ile alakalı teorik literatür tanıtılacaktır. Ardından kararlılık kavramları ile alakalı hesaplama karmaşıklığı literatürü anlatılacaktır.

1.3.1 Teorik literatür

Hedonik koalisyon oluşturma oyunları ilk kez Dreze ve Greenberg tarafından ortaya atılmıştır [1]. Ancak hedonik oyunların tam anlamıyla modellenmesi Banerjee ve diğerleri [7] ile Bogomolnaia ve Jackson [8] tarafından yapılmıştır. Banerjee ve diğerleri çekirdek kararlılık kavramı üzerinde çalışmışlardır. Çekirdek kararlı koalisyon yapılarının her hedonik oyun için mevcut olamayacağını, hatta $\mathscr{G}$ kümesinin bazı öz alt kümelerinde bile çekirdek kararlılığın var olmamaya devam ettiğini göstermişlerdir. Daha sonra **üst koalisyon özelliği** (top coalition property) ve **zayıf üst koalisyon özelliği** (weak top coalition) adıyla $\mathscr{G}$'nin iki tane özel alt kümesini tanımlamışlardır. Zayıs üst koalisyon özelliğini sağlayan tüm hedonik oyunlarda çekirdek kararlı koalisyon yapısının her zaman var olduğunu, üst koalisyon özelliğini sağlayan tüm hedonik oyunlarda çekirdek kararlı koalisyon yapısının her zaman var ve tek olduğunu göstermişlerdir.

Bogomolnaia ve Jackson [8]'de hem bireysel hareketlere dayalı kararlılık kavramlarını (Nash kararlılık, bireysel kararlılık ve sözleşmeli bireysel kararlılık) hem de çekirdek kararlılık kavramını çalışmışlardır. **Sıralı dengelilik** (ordinal balancedness) ve **zayıf ardışıklık** (weak consecutiveness) adıyla $\mathscr{G}$'nin yeni iki öz alt kümesini tanımlamışlardır. Sıralı dengelilik özelliğini sağlayan tüm hedonik oyunlarda ve zayıf ardışıklık özelliğini sağlayan tüm hedonik oyunlarda çekirdek kararlı koalisyon yapılarının her zaman var olduğunu göstermişlerdir. Bogomolnaia ve Jackson'ın sıralı dengelilik ve zayıf ardışıklık kavramları ile Banerjee ve diğerleri'nin zayıf üst koalisyon özelliği kavramları birbirinden bağımsız kavramlardır. Bogomolnaia ve Jackson daha sonra **toplanır ayrılabilirlik** (additive separability) kavramını tanıtmışlardır. Toplanır ayrılabilirlik ve simetri kavramlarının beraber bir şekilde Nash kararlı koalisyon yapılarının var olması için yeter koşul olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca sıkı tercihler altında her hedonik oyun için Pareto optimal, bireysel rasyonel ve sözleşmeli bireysel kararlı en az bir koalisyon yapısının olduğunu ispatlamışlardır.

Burani ve Zwicker, hedonik oyunlarda **ayrılabilir** (separable) tercihler kavramı üzerinde ayrıntılı olarak çalışmışlardır [9]. Simetrik ve toplanır ayrılabilir tercihlerin kardinal bileşen ve alternatif bileşen olarak ayrıştırılabildiğini göstermişlerdir. Tüm bireylerin tercihlerinin sadece kardinal bileşenden oluştuğu hedonik oyunlarda çekirdek kararlı ve Nash kararlı koalisyon yapılarının her zaman var olduğunu ispatlamışlardır.

Alcalde ve Revilla, [10]'da **üst duyarlılık** (top responsiveness) kavramını tanıtmışlar, tüm bireylerin tercihlerinin üst duyarlı olduğu hedonik oyunlarda her zaman çekirdek kararlı çözüm olduğunu göstermişlerdir. Dimitrov ve Sung ise [11]'de üst duyarlılığın aynı zamanda sıkı çekirdek kararlılık için yeter koşul olduğunu, [12]'de üst duyarlılık ve simetrik tercihlerin beraber Nash kararlılık için yeter koşul olduğunu ispatlamışlardır.

Dimitrov ve diğerleri [13]'de toplanır ayrılabilir tercihlerin iki özel alt sınıfını tanıtmışlardır. Bunlar sırasıyla şunlardır: **arkadaşların sempatikli**ğine dayanan tercihler (appreciation of friends) ve **düşmanların antipatikliği**ne dayanan tercihler (aversion to enemies). Daha sonra şu iki şonucu göstermişlerdir: Bir hedonik oyunda bireysel tercihler arkadaşların sempatikliğine dayanıyor ise o oyunda her zaman sıkı çekirdek kararlı koalisyon yapıları vardır ve bir hedonik oyunda bireysel tercihler düşmanların antipatikliğine dayanıyor ise o oyunda her zaman çekirdek kararlı koalisyon yapıları vardır.

Alcalde ve Romero-Medina [14]'da bireysel tercihler üzerine uygulanan dört tane birbirinden bağımsız tercih kısıtlaması tanıtmışlardır. Bunlar sırasıyla **bileşim duyarlılık** (union responsiveness), **kesişim duyarlılık** (intersection responsiveness), **tekillik** (singularity) ve **esaslılık**tır (essentiality). Alcalde ve Romero-Medina tüm bu dört koşulun çekirdek kararlı koalisyon yapılarının varlığı için yeter koşul olduğunu ispatlamışlardır.

Iehle [15]'de **eksensel dengelilik** (pivotal balancedness) kavramını tanıtmış, eksensel dengeliliğin çekirdek kararlı çözümlerin varlığı içim hem gerek hem de yeter koşul olduğunu ispat etmiştir. Bu sonuç ile Iehle aslında çekirdek kararlı koalisyon yapılarının var olduğu hedonik oyunlar kümesini karakterize etmiştir.

Literatürde yer alan diğer çalışmalar için Hadjukova'nın ayrıntılı literatür araştır makalesi [16]'e ve kitap ünitesi [17]'e bakılabilir.

1.3.2 Hesaplama karmaşıklığı literatürü

Hedonik oyunlar ile alakalı teorik çalışmaların yanısıra hesaplama karmaşıklığı çalışmalarının sayısı da azımsanmayacak derecede çoktur. Hesaplama karmaşıklığı çalışmalarının hepsi algoritmalar ile alakalıdır. Hesaplama karmaşıklığı çalışmalarında iki tür algoritmanın varlığı aranmaktadır:

1- Bir $(N,\succsim)$ hedonik oyunu için kararlı koalisyon yapısı veren etkin bir algoritma,

2- Bir $(N,\succsim)$ hedonik oyunundaki π koalisyon yapısının kararlı olup olmadığını kontrol eden bir algoritma.

Algoritmaların değerlendirilmesi ve karşılaştırılması yapılırken **hesaplama zamanı** kriteri kullanılmaktadır. Her A algoritması $f_A(n)$ gibi bir fonksiyon ile ilişkilendirilmektedir [18]. $f_A(n)$'in anlamı şudur: *A algoritmasına n birim kadar girdi konulduğunda istenen işlemi en çok $f_A(n)$ zaman biriminde (saniye, adom, tekrarlama, vs.) yapar.* $f_A(n)$ fonksiyonuna A algoritmasının **hesaplama karmaşıklığı** adı verilir.

Karmaşıklık fonksiyonları genel olarak $logn, n, n^k, 2^n$ şeklindedir. Dolayısıyla bir algoritmanın karmaşıklığı logaritma zamanlı, lineer zamanlı, polinom zamanlı veya üssel zamanlı diye adlandırılmaktadır. Logaritma zamanlı algoritmalar polinom zamanlılardan, polinom zamanlılar da üssel zamanlılardan daha hızlıdırlar. Örneğin elimizde 50 birim girdi var iken hesaplama karmaşıklığı n^2 (polinom zamanlı) olan algoritma ile sonuç (50^2 adımda) bir saniyeden daha az zamanda bulunabiliyor iken hesaplama karmaşıklığı 2^n (üssel zamanlı) olan bir algoritma ile sonuç (2^{50} adımda) 30 yıldan daha fazla bir zamanda bulunabilmektedir. Aralarındaki kapanamayan bu farktan dolayı polinom zamanlı ve üssel zamanlı algoritmalar birbirinden kolaylıkla ayırt edilebilmektedir.

Eğer bir problemin çözümü için polinom zamanlı bir algoritma mevcut ise bu probleme **çözülebilir** denmektedir. Eğer bir problemin çözümünü yapan üssel zamanlı bir algoritma var ise bu probleme **çetin**, **inatçı**, **çözülemez** gibi isimler verilmektedir. Çözülebilen problemler sınıfına P, çözülemeyen problemler sınıfına da NP denmektedir.

Hedonik oyunlar ile alakalı ilk hesaplama karmaşıklığı Ballester [18] tarafından yapılmıştır. Ballester, en geniş tanım kümesinde herhangi bir hedonik oyun için çekirdek kararlı, Nash kararlı veya biraysel kararlı koalisyon yapılarını bulmanın hesaplama karmaşıklığının NP olduğunu göstermiştir. Sonrasında Sung ve Dimitrov [19], [20]'de, Cechlarova ve Hadjukova [21], [22] ve [23]'te kısıtlı alt kümelerde de hesaplama karmaşıklığı analizi yapmışlardır. Tanım kümesinin kısıtlı alt kümelerinde çalışmalarına rağmen bu yazarlar da Ballester ile paralel sonuçlar elde etmişlerdir.

Hedonik oyunlarda yapılan diğer hesaplama karmaşıklığı çalışmaları için [16]'a ve [17]'a bakılabilir.

2. İÇSEL KARARLILIK

Bu ünitede yeni bir kararlılık kavramı olan içsel kararlılık önerilecek ve analiz edilecektir. İlk önce içsel kararlılık kavramı tanıtılacaktır. Sonrasında içsel kararlılık ile literatürde üzerinde çokça çalışma yapılmış diğer kararlılık kavramları karşılaştırılacaktır. Daha sonra verilen bir hedonik oyunda sıradan olmayan koalisyon yapılarını veren içsel algoritma tanıtılacak ve içsel algoritmanın ürettiği tüm sıradan olmayan koalisyon yapılarının içsel kararlı olduğu ispat edilecektir. En son, içsel algoritmanın hesaplama karmaşıklığından bahsedilecektir.

2.1 İçsel Kararlılık

Tanım 2.1: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $\pi = \{S_1, ..., S_K\} \in \prod^N$ bir koalisyon yapısı olsun. Eğer bazı S_l koalisyonları için $B \subset S_l$ öyle ki $\forall i \in B$, $B \succ_i S_l$ ise B alt koalisyonu π'yi **içsel bloke ediyor** denir. Eğer π koalisyon yapısını içsel bloke eden herhangi bir alt koalisyon yok ise π'ye **içsel kararlı** denir.
π **içsel kararlı** (İK) $\iff \nexists S_l \in \pi$, $\nexists B \subset S_l$ öyle ki $\forall i \in B$, $B \succ_i S_l$.

YORUM: Tüm bireylerin tek başına bulundukları $\Im = \{(1), (2), ..., (n)\}$ koalisyon yapısı tanım gereği doğrudan içsel kararlıdır. Ancak bu ünitede $\prod_0^N = \prod^N \setminus \{\Im, \aleph\}$ sıradan olmayan koalisyon yapıları için içsel kararlılık sorgulanacaktır. Bunun temel sebebi, koalisyon oluşturma oyunlarının ortaya çıkışına dayanmaktadır, [24]. Tüm bireylerin tek başına olduğu koalisyon yapılarında işbirliği kavramından söz edilemez. Tüm bireylerin hepsinin büyük koalisyonu oluşturduğu durumlar da her zaman geçerli değildir, çünkü koalisyon büyüklüğü arttıkça parçalanmalar başlamaktadır. Dolayısıyla kararlılık kavramlarının sıradan olmayan koalisyon yapıları üzerinde çalışılması daha verimli olmaktadır.

Örnek 2.1: $N = \{1,2,3\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_1, \succsim_2, \succsim_3\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olsun.

$\succsim_1$	$\succsim_2$	$\succsim_3$
12	23	13
13	12	23
123	123	3
1	2	123

Bu hedonik oyunun toplam 5 tane çözümü bulunmaktadır. Bunlar sırasıyla $\pi^1 = \{(1,2),(3)\}$, $\pi^2 = \{(1),(2,3)\}$, $\pi^3 = \{(1,3),(2)\}$, $\pi^4 = \{(1,2,3)\}$ ve $\pi^5 = \{(1),(2),(3)\}$ koalisyon yapılarıdır. Bu koalisyon yapılarından hiçbiri çekirdek kararlı, Nash kararlı ve bireysel kararlı değildir. Ancak, $\pi^* = \{(i,j),(k)\}$ şeklindeki tüm sıradan olmayan koalisyon yapıları içsel kararlıdır.

2.2 İçsel Kararlılık ve Diğer Kararlılık Kavramları

Teorem 2.1: $(N,\succsim)$ bir hedonik oyun, $\pi = \{S_1,...,S_K\} \in \prod_0^N$ bir koalisyon yapısı olsun. Eğer π içsel kararlı ise aynı zamanda bireysel rasyoneldir.

İspat: $\pi = \{S_1,...,S_K\} \in \prod_0^N$ içsel kararlı bir koalisyon yapısı olsun. Aksine, π bireysel rasyonel olmasın. O zaman, $\exists i \in N$ öyle ki $\{i\} \succ_i \pi(i)$ olur. Ancak $\pi(i) := S_l$ ve $B := \{i\}$ şeklinde yeniden yazarsak, tanım gereği $B = \{i\}$ alt koalisyonu π'yi içsel bloke eder. Bu durum, π'nin içsel kararlı olmasıyla **çelişki**dir. Sonuç olarak her içsel kararlı koalisyon yapısı aynı zamanda bireysel rasyoneldir. ■

Teorem 2.2: $(N,\succsim)$ bir hedonik oyun, $\pi = \{S_1,...,S_K\} \in \prod_0^N$ bir koalisyon yapısı olsun. Eğer π çekirdek kararlı ise aynı zamanda içsel kararlıdır. Ancak içsel kararlı koalisyon yapıları çekirdek kararlı olmayabilir.

İspat: $\pi = \{S_1,...,S_K\} \in \prod_0^N$ çekirdek kararlı bir koalisyon yapısı olsun. Aksine, π içsel kararlı olmasın. O zaman, $\exists S_l \in \pi$, $\exists B \subset S_l$ öyle ki $\forall i \in B$, $B \succ_i S_l$ olur. Ancak B koalisyonu bu durumda π'yi bloke etmektedir. Bu durum, π'nin çekirdek kararlı olmasıyla **çelişki**dir. Sonuç olarak her çekirdek kararlı koalisyon yapısı aynı zamanda içsel kararlıdır. ■

İçsel kararlı koalisyon yapıları çekirdek kararlı olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği düşünelim.

Örnek 2.2: $N = \{1,2,3,4\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_1, \succsim_2, \succsim_3, \succsim_4\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olsun.

$\succsim_1$	$\succsim_2$	$\succsim_3$	$\succsim_1$
123	12	23	14
12	23	123	24
14	123	13	34
13	24	34	234
...	234	234	...
1	...	3	4
	2	...	1234

$\pi^1 = \{(1,4),(2,3)\}$ koalisyon yapısı içsel kararlıdır, ancak çekirdek kararlı değildir. Çünkü $S = (1,2)$ koalisyonu bir araya gelerek π^1 koalisyon yapısını bloke eder.

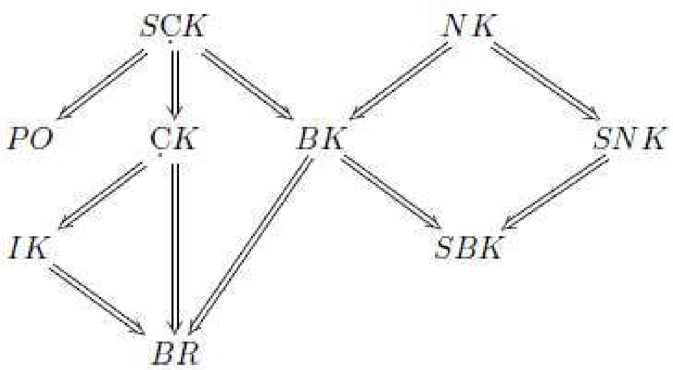
Teorem 2.3: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. İçsel kararlılık kavramı ile Nash kararlılık kavramları birbirinden bağımsız kavramlardır. Bir diğer deyişle, İK $\nRightarrow$ NK $\nRightarrow$ İK.

İspat: Örnek 2.2'yi düşünelim. Bu hedonik oyunda $\pi^2 = \{(1,2,3),(4)\}$ koalisyon yapısı Nash kararlıdır ancak içsel kararlı değildir. Çünkü $(2,3)$ koalisyonu bir araya gelerek π^2'yi içsel bloke eder. $\pi^3 = \{(1,2),(3,4)\}$ koalisyon yapısı içsel kararlıdır, ancak Nash kararlı değildir. 3 numaralı birey var olan $(1,2)$ koalisyonuna katılarak tercih sırasında daha yukarı çıkabilmektedir. $\pi^5 = \{(1),(2,3,4)\}$ koalisyon yapısı ne içsel kararlı ne de Nash kararlıdır. Örnek 1.2'deki koalisyon yapısı $\pi^4 = \{(1,2,3)\}$ ise hem Nash kararlı hem de içsel kararlıdır. Sonuç olarak İK $\nRightarrow$ NK $\nRightarrow$ İK olur. ■

Teorem 2.4: $(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. İçsel kararlılık kavramı ile Pareto optimallik kavramları birbirinden bağımsız kavramlardır. Bir diğer deyişle, İK $\nRightarrow$ PO $\nRightarrow$ İK.

İspat: Örnek 2.2'yi düşünelim. Bu hedonik oyunda $\pi^1 = \{(1,4),(2,3)\}$ koalisyon yapısı hem Pareto optimal hem de içsel kararlıdır. $\pi^2 = \{(1,2,3),(4)\}$ koalisyon yapısı Pareto optimaldir ancak içsel kararlı değildir. Bunun sebebi $(2,3)$ koalisyonunun π^2'yi içsel bloke etmesidir. $\pi^4 = \{(1,3),(2,4)\}$ koalisyon yapısı içsel kararlıdır, ancak Pareto optimal değildir. $\pi^3 = \{(1,4),(2,3)\}$ koalisyon yapısı π^4'e Pareto baskındır. $\pi^5 = \{(1),(2,3,4)\}$ koalisyon yapısı ne içsel kararlı ne de Pareto optimaldir. Sonuç olarak İK $\nRightarrow$ PO $\nRightarrow$ İK olur. ■

İçsel kararlılık kavramı ile literatürde yer alan diğer popüler kararlılık kavramları arasındaki ilişki Şekil 2.1'de açıklanmaktadır. Tek taraflı gerektirme okunun anlamı şu şekildedir: yukarıdaki kararlılık kavramı aşağıdaki kararlılık kavramını gerektirmektedir. Aralarında doğrudan ya da dolaylı bir şekilde gerektirme oku (okları) bulunmayan kararlılık kavramları birbirinden bağımsızdır.



Şekil 2.1 : Kararlılık kavramları arasındaki ilişki.

2.3 İçsel Algoritma

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $\forall i \in N$, $ArgMax_{\succsim_i}\{.\}$ operatörünü ve $\mathscr{A}_i$ kümesini şu şekilde tanımlayalım:

- $ArgMax_{\succsim_i}\{.\}$ operatörü, $\{.\}$ kümesi içerisinde yer alan **özel tanımlı** koalisyonlar arasından, i bireyinin tercih listesinde en üstte yer alan koalisyonu seçer.

- $\mathscr{A}_i = \{S \subseteq (\mathscr{C}_i^N \cap P_\alpha) \mid \forall j \in S, S \succsim_j \{j\}\}$

2.3.1 İçsel algoritma

1. Kısım:

- N birey kümesini düşünelim.

- $P_0 := N$ birey kümesiyle başlayalım. En küçük indisli birey $i_1 = 1$ ile başlayalım.

- $S_1 := \begin{cases} ArgMax_{\succsim_1}\mathscr{A}_1 & \text{eğer } \mathscr{A}_1 \neq \emptyset \\ \{1\} & \text{eğer } \mathscr{A}_1 = \emptyset \end{cases}$

koalisyonunu seçelim.

- $P_1 := N \backslash S_1$ birey kümesini düşünelim. En küçük indisli birey i_2 ile başlayalım.

- $S_2 := \begin{cases} ArgMax_{\succsim_{i_2}}\mathscr{A}_{i_2} & \text{eğer } \mathscr{A}_{i_2} \neq \emptyset \\ \{i_2\} & \text{eğer } \mathscr{A}_{i_2} = \emptyset \end{cases}$

koalisyonunu seçelim.

- ...

- $P_k := N \backslash (\bigcup_{i=1}^{k} S_i)$ birey kümesini düşünelim. En küçük indisli birey i_k ile başlayalım.
- $S_k := \begin{cases} ArgMax_{\succsim_{i_k}} \mathscr{A}_{i_k} & \text{eğer } \mathscr{A}_{i_k} \neq \emptyset \\ \{i_k\} & \text{eğer } \mathscr{A}_{i_k} = \emptyset \end{cases}$

koalisyonunu seçelim.

- $\mid N \mid < \infty$ ve $\forall i \in N, \mid \mathscr{C}_i^N \mid < \infty$ olduğu için $\exists K_1 < \mid N \mid$ öyle ki $N \backslash (\bigcup_{i=1}^{K} S_i) = \emptyset$ ve S_{K_1} son seçilen koalisyon olur.

2. Kısım:

- $\forall k \in \{1, 2, ..., K_1\}$ eğer $\exists B_k \subset S_k$ öyle ki $\forall j \in B_k, B_k \succ_k S_k$ var ise $C_k^1 := B_k$, yok ise $C_k^1 := S_k$ tanımlayalım.

(Bu adımda $C_k^1 := B_k$ seçilirken şu kriter dikkate alınmalıdır: $\nexists B_k^{'} \subset B_k \subset S_k$ öyle ki $\forall i \in B_k^{'}, B_k^{'} \succ_i B_k \succ_i S_k$. Eğer böyle bir $B_k^{'}$ var ise $C_k^1 := B_k^{'}$ seçilmelidir. Eğer $B_k^{'}$ içindeki tüm bireyler ya da bir kısmı B_k içinde yer alma durumu ile kayıtsız kalıyorlar ise bu durumda $C_k^1 := B_k$ seçilmelidir.)

- $\bigcup_{k=1}^{K_1} (S_k \backslash B_k)$ birey kümesini oluşturalım.
- $\bigcup_{k=1}^{K_1} (S_k \backslash B_k)$ kümesini, $P_0 := \bigcup_{k=1}^{K_1} (S_k \backslash B_k)$ girdisi şeklinde tanımlayarak 1. Kısım'a sokalım.
- Aynı süreci tekrar edelim.
- 1. Kısım'ı her çalıştırdığımızda üst indisleri bir arttıralım.

3. Kısım: **Sonuç**

- $\mid N \mid < \infty$ ve $\forall i \in N, \mid \mathscr{C}_i^N \mid < \infty$ olduğu için İçsel Algoritma sonlu sayıda adım sonra (var sayalım ki L. adımda) duracaktır.
- $\pi = \{C_1^1, ..., C_{K_1}^1, ..., C_1^L, ..., C_{K_L}^L\}$ koalisyon yapısını oluşturalım.

Teorem 2.5: Her $(N, \succsim)$ hedonik oyunu için İçsel Algoritma'nın ürettiği her $\pi \in \prod_0^N$ koalisyon yapısı içsel kararlıdır.

İspat: $(N, \succsim)$ hedonik oyununa içsel algoritmayı uygulayalım. İçsel algoritmanın L. tekrarlama sonrası durduğunu farz edelim. $\pi \in \prod_0^N$ içsel algoritma tarafından üretilen koalisyon yapısı olsun. $\pi = \{C_1^1, ..., C_{K_1}^1, ..., C_1^L, ..., C_{K_L}^L\}$ şeklinde olduğunu varsayalım. $\forall C_m^l$ $(l \leq L \wedge m \leq K_l)$, $\forall B_m \subset C_m^l$, $C_m^l \succsim_j B_m$ $\forall j \in B_m$. Bu sonuç algoritmanın 2. kısmı tarafından garanti edilmektedir. Var sayalım ki böyle birşey olmasın. Yani, $\exists B_m \subset C_m^l$ öyle ki $\forall j \in B_m$, $B_m \succ_j C_m^l$ olsun. O zaman algoritmanın 2. kısmında $C_m^l = B_m$ seçilmiş olması gerekiyordu. Ancak bu algoritmanın seçimi ile **çelişki** yaratmaktadır. Bu bütün

$l \leq L$ ve $m \leq K_l$ için doğrudur. Sonuç olarak $\pi = \{C_1^1, ..., C_{K_1}^1, ..., C_1^L, ..., C_{K_L}^L\}$ içsel kararlıdır. ■

2.4 Hesaplama Karmaşıklığı

İçsel algoritma en geniş tanım kümesi olan tüm hedonik oyunlar kümesinde sıradan olmayan içsel kararlı koalisyon yapılarını saptamak için tasarlanmıştır. Algoritmanın ilk kısmında bulma ve sağlama işlemleri yapılmaktadır. Algoritmanın ikinci kısmınada ise sağlama işlemi yapılmaktadır. Son kısım ise inşaa kısmıdır.

- Herhangi bir $(N, \succsim)$ hedonik oyununu alalım. $| N |= n$ olsun.

- Algoritmanın ilk kısmında en kötü şartlar altında bütün bireyler için $\mathscr{C}_i^N$ kümesi taranmaktadır.

- Bu durum göz önünde bulundurulduğunda 1. birey için en çok $| \mathscr{C}_1^N |= 2^{n-1} - 1$ sayıda tarama yapılacaktır. Sonra gelen bireyler için tarama sayısı $2^{n-1} - 1$'den daha az olacaktır.

- Algoritmanın ilk kısmı ilk tekrarını K_1 taramada bitirmiş olduğunu var sayalım. Yani ikinci kısma giren girdi $\{S_1, ..., S_{K_1}\}$ olsun. Bu durumda algoritmanın ikinci kısmında K_1 tane sağlama işemi yapılacaktır. Bu kısımda her bir koalisyonu içsel bloke eden alt koalisyonun olup olmadığı aranacaktır. Dolayısıyla her bir S_i koalisyonu için $2^{|S_i|} - 2$ tane tarama sonucu sağlama yapılacaktır.

- Algoritma 3. kısma geçene kadar yukarıda belirtilen işleme devam edilecektir.

Yukarıdaki süreç göz önünde bulundurulduğunda İçsel algoritmaya girdi olarak giren yeterince fazla verinin var olduğu görülmektedir. Ballester [18]'de, Sung ve Dimitrov [19]'da, Hadjukova [16]'da ve [17]'de belirtildiği üzere, en geniş tanım kümesinde yapılan sağlama işlemleri NP karmaşıklığına sahiptir. Yine burada belirtildiği gibi, yeterince fazla girdi olduğu durumda en geniş tanım kümesinde çalışan algoritmaların bulma işlemi de NP karmaşıklığına sahiptir.

Tüm bunlar göz önünde bulundurulduğunda, içsel algoritma iki tane NP karmaşıklığı içeren süreci aynı anda bünyesinde bulundurduğu için **NP hesaplama karmaşıklığına sahiptir**.

3. SONUÇLAR

Bu tezde yeni bir kararlılık kavramı olan içsel kararlılık çalışılmıştır. İlk önce içsel kararlılık kavramı tanıtılmıştır. Sonrasında içsel kararlılık kavramı ile diğer kararlılık kavramları arasındaki ilişki açıklanmıştır. Devamında içsel kararlı koalisyon yapılarının her zaman bireysel rasyonel olduğu ispat edilmiştir. Çekirdek kararlı koalisyon yapıların her zaman içsel kararlı olduğu, ancak bu önermenin tersinin doğru olmadığı gösterilmiştir. Nash kararlılık kavramı ile içsel kararlılık kavramlarının birbirinden bağımsız olduğu ispatlanmıştır. Bunun altında yatan neden, Nash kararlılık kavramının bireysel yer değiştirmelere, içsel kararlılık kavramının ise grup halinde yer değiştirmelere bağlı olmasıdır. Bunların yanısıra, Pareto optimallik ile içsel kararlılık kavramlarının da birbirinden bağımsız olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra, içsel algoritma tanıtılmıştır. İçsel algoritmanın en geniş tanım kümesinde ürettiği tüm koalisyon yapılarının içsel kararlı olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca içsel algoritmanın hesaplama karmaşıklığı tartışılmıştır. Ekler kısmında literatürde çalışılmış özel altkümeler tanıtılmış ve hedonik oyunlar ile alakalı gerçek dünyadan üç örnek uygulama sunulmuştur.

Yukarıda açıklanan sonuçlar arasında en dikkat edilmesi gereken ilişki Pareto optimallik ile içsel kararlılık arasındaki ilişkidir. Bunun sebebi içsel kararlı koalisyon yapıları gibi Pareto optimal koalisyon yapılarının da en geniş tanım kümesinde her zaman mevcut olmasıdır. Bu durum akla şu soruları getirmektedir: **En geniş tanım kümesinde hem içsel kararlı hem de Pareto optimal bir koalisyon yapısı bulabilen algoritma var mıdır ? Her iki kararlılık kavramının da aynı anda var olduğu bir alt küme var mıdır ? Var ise bu alt kümenin özelikleri nelerdir ?** Bu sorular henüz hedonik oyunlar literatüründe çalışılmamıştır ve cevapları bilinmemektedir. Bu sorular ileriye yönelik açık araştırma konularıdır.

KAYNAKLAR

[1] **Dreze, J. ve Greenberg, J.** (1980). Hedonic coalitions: Optimality and stability, *Econometrica*, *48*, 987 – 1003.

[2] **Roth, A.E. ve Sotomayor, Sotomayor, M.** (1990). *Two sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modelling and Analysis*, Cambridge University Press, New York.

[3] **Gale, D. ve Shapley, L.S.** (1962). College admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly*, *69*, 9 – 15.

[4] **Sung, S.C. ve Dimitrov, D.** (2007). On myopic stability concepts for hedonic games, *Theory and Decision*, *62*, 31 – 45.

[5] **Sertel, M.R.** (1992). Membership property rights, efficiency and stability, *Bogazici University Research Papers*.

[6] **Koray, S. ve Sertel, M.R.** (2003). *Advances in Economic Design*, Springer-Verlag, Heidelberg.

[7] **Banerjee, S.**, **Konishi, H. ve Sönmez, T.** (2001). Core in simple coalition formation game, *Social Choice and Welfare*, *18*, 135 – 153.

[8] **Bogomolnaia, A. ve o. Jackson, M.** (2002). The stability of hedonic coalition structures, *Games and Economic Behavior*, *38*(2), 201 – 230.

[9] **Burani, N. ve Zwicker, W.S.** (2003). Coalition formation with seperable preferences, *Mathematical Social Sciences*, *45*, 27 – 52.

[10] **Alcalde, J. ve Revilla, P.** (2004). Researching with whom? Stability and manipulation, *Journal of Mathematical Economics*, *40*, 869 – 887.

[11] **Dimitrov, D. ve Sung, S.C.** (2007). On top responsiveness and strict core stability, *Journal of Mathematical Economics*, *43*(2), 130 – 134.

[12] **Dimitrov, D. ve Sung, S.C.** (2006). Top responsiveness and Nash stability in coalition formation games, *Kybernetica*, *42*(4), 453 – 560.

[13] **Dimitrov, D.**, **Borm, P.**, **Hendrickx, R. ve Sung, S.C.** (2006). Simple priorities and core stability in hedonic games, *Social Choice and Welfare*, *26*(2), 421 – 433.

[14] **Alcalde, J. ve Romero-Medina, A.** (2006). Coalition formation and stability, *Social Choice and Welfare*, *27*, 365 – 375.

[15] **Iehle, V.** (2007). The core-partition of a hedonic game, *Mathematical Social Sciences*, 54, 176 - 185.

[16] **Hadjukova, J.** (2006). Coalition formation games: A survey, *International Game Theory Review*, 8(4), 613 - 641.

[17] **Brandt, F., Conitzer, V., Endriss, U., Lang, J. ve Procaccia, A.D.** (2016). *Handbook in Computational Social Choice*, Cambridge University Press, New York.

[18] **Ballester, C.** (2004). NP-completeness in hedonic games, *Games and Economic Behavior*, 49, 1 - 30.

[19] **Sung, S. C. ve Dimitrov, D.** (2007b). On core membership testing for hedonic coalition formation games, *Operations Research Letters*, 35, 155 - 158.

[20] **Sung, S. C. ve Dimitrov, D.** (2010). Computational complexity in additive hedonic games, *European Journal of Operational Research*, 35, 635 - 639.

[21] **Cechlarova, K. ve Hadjukova, J.** (2002). Computational complexity of stable partitions with β-preferences, *International Journal of Game Theory*, 31, 353 - 364.

[22] **Cechlarova, K. ve Hadjukova, J.** (2004a). Stable partitions with ω-preferences, *Discrete Applied Mathematics*, 138, 333 - 347.

[23] **Cechlarova, K. ve Hadjukova, J.** (2004b). Stability of partitions under $\omega\beta$-preferences and $\beta\omega$-preferences, *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 3(4), 605 - 614.

[24] **Aumann, R. J. ve Dreze, J.** (1974). Cooperative games with coalition structures, *International Journal of Game Theory*, 3(4), 217 - 237.

EKLER

EK A: Bazı Özel Tanım Kümeleri
EK B: Uygulamalar

EK A

Tanım A.1: **Üst Koalisyon Özelliği** (Top coalition property, [7])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $S \subseteq N \wedge S \neq \emptyset$ ve $T \subseteq S \wedge T \neq \emptyset$ olsun.
Eğer $\forall i \in T$, $T \succ_i$ öyle ki $U \subseteq S \wedge i \in U$ ise T'ye S'nin **üst koalisyonu** denir. Eğer her $S \subseteq N \wedge S \neq \emptyset$ için S'nin üst koalisyonu var ise, $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **üst koalisyon özelliğini sağlıyor** denir.

T boş olmayan alt koalisyonunun S'nin üst koalisyonu olması demek, T'deki tüm bireylerin T'yi S'nin tüm alt kümelerine tercih etmesi demektir. T'deki tüm bireyler T'yi tercihlerinin en üstüne koyarlar.

Tanım A.2: **Zayıf Üst Koalisyon Özelliği** (Weak top coalition property, [7])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $S \subseteq N \wedge S \neq \emptyset$ ve $T \subseteq S \wedge T \neq \emptyset$ olsun.
T'ye S'nin **zayıf üst koalisyonu** denir ancak ve ancak T'nin $\{T^1, T^2, ..., T^l\}$ şeklinde sıralı bir partisyonu vardır öyle ki:

- $\forall i \in T^1$, $\forall U \subseteq S$ öyle ki $i \in U$, $T \succ_i U$ ve
- $\forall k > 1$, $\forall i \in T^k$, $\forall U \subseteq S$ öyle ki $i \in U$, $U \succ_i T \Rightarrow T \cap (\cup_{m<k} S^m) \neq \emptyset$.

Eğer her $S \subseteq N \wedge S \neq \emptyset$ için S'nin zayıf üst koalisyonu var ise, $(N, \succsim)$ hedonik oyunu **zayıf üst koalisyon özelliğini sağlıyor** denir.

T boş olmayan alt koalisyonunun S'nin zayıf üst koalisyonu olması demek T'nin $\{T^1, T^2, ..., T^l\}$ şeklinde sıralı bir partisyonu olması ve
- T^1'deki tüm bireylerin T'yi S'nin tüm alt kümelerine tercih etmesi
- T^2'deki tüm bireylerin T'den daha iyi bir koalisyonun içinde yer alabilmesi için T^1'den en az bir elemanın iş birliğine ihtiyaçları olması
- T^3'deki tüm bireylerin T'den daha iyi bir koalisyonun içinde yer alabilmesi için $T^1 \cup T^2$'den en az bir elemanın iş birliğine ihtiyaçları olması
- ... demektir.

Tanım A.3: **Sıralı Dengelilik Özelliği** (Ordinal balancedness, [8])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ bir koalisyonlar topluluğu olsun.
Eğer $\forall i \in N$, $\sum_{S \in \mathscr{B}, i \in S} d_S = 1$ şartını sağlayan bir d_S pozitif oranlar vektörü var ise $\mathscr{B}$ topluluğuna **dengeli** denir. Her dengeli koalisyon topluluğu $\mathscr{B}$ için $\forall i \in N$ $\exists S \in \mathscr{B}$ birlikte $i \in S$ olan $\pi(i) \succsim_i S$ özelliğini sağlayan bir π koalisyon yapısı var ise $(N, \succsim)$ oyununa **sıralı dengeli hedonik oyun** denir.

Tanım A.4: **Zayıf Ardışıklık Özelliği** (Weak consecutiveness, [8])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun ve $f : N \to N$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun.
Eğer $f(i) < f(j) < f(k)$ iken $i \in S \wedge k \in S \Longrightarrow j \in S$ ise $S \subset N$ koalisyonuna f'e göre

ardışık denir. Eğer biebir ve örten bir f fonksiyonu var iken, ne zaman ki $\pi \in \prod^N$ koalisyon yapısı bir T koalisyonu tarafından bloke edildiğinde, π'yi bloke eden f'e göre ardışık bir T' koalisyonu var ise $(N, \succsim)$ hedonik oyununa **zayıf ardışık hedonik oyun** denir.

Tanım A.5: **Toplanır Ayrılabilirlik Özelliği** (Additive separability, [8] ve [9])

$i \in N$ bireyini düşünelim. Eğer $\forall S_1, S_2 \in \mathscr{C}_i^N$ için $S_1 \succsim_i S_2 \Leftrightarrow \sum_{j \in S_1} v_i(j) \geq \sum_{j \in S_2} v_i(j)$ özelliğini sağlayan bir $v_i : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var ise i bireyinin tercihlerine **toplanır ayrılabilir** denir.

$\succsim \in \mathscr{R}^N$ toplanır ayrılabilir bir tercih profili olsun. Eğer $\forall i, j \in N$, $v_i(j) = v_j(i)$ ise $\succsim$'e **simetrik** denir. Eğer $\forall i, j \in N$, $v_i(j) \geq 0 \Leftrightarrow v_j(i) \geq 0$ ise $\succsim$'e **karşılıklı** denir.

Tanım A.6: **Üst Duyarlılık Özelliği** (Top responsiveness, [10])

$S \in \mathscr{C}$ koalisyonunu düşünelim. $CH(i,S) = \{S' \subseteq S \mid (i \in S) \wedge (S' \succsim S'', \forall S'' \subseteq S)\}$ kümesine S'nin **üst seçimler kümesi** denir. Eğer $\mid CH(i,S) \mid = 1$ ise bu kümenin tek elemanı $ch(i,S)$ ile gösterilir.

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $i \in N$ bireyini düşünelim. Eğer

- $\forall S \in \mathscr{C}_i^N$, $\mid CH(i,S) \mid = 1$,
- $\forall S, T \in \mathscr{C}_i^N$, $ch(i,S) \succ_i ch(i,T) \Rightarrow S \succ_i T$ ve
- $\forall S, T \in \mathscr{C}_i^N$, $ch(i,S) = ch(i,T) \wedge S \subset T \Rightarrow S \succ_i T$

şartları sağlanıyor ise i bireyinin tercihlerine **üst duyarlı** denir.

Tanım A.7: **Birleşim Duyarlılık Özelliği** (Union responsiveness, [14])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $i \in N$ bireyini düşünelim.
Eğer $\forall S, T \in \mathscr{C}_i^N$, $T \subset S \wedge T \neq ch(i,S) \Rightarrow S \succ_i T$ şartı sağlanıyor ise i bireyinin tercihlerine **birleşim duyarlı** denir.

Tanım A.8: **Kesişim Duyarlılık Özelliği** (Intersection responsiveness, [14])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $i \in N$ bireyini düşünelim.
Eğer $\forall S, T \in \mathscr{C}_i^N$, $S \succ_i T \Rightarrow (S \cap T) \succsim_i T$ şartı sağlanıyor ise i bireyinin tercihlerine **kesişim duyarlı** denir.

Tanım A.9: **Tekillik Özelliği** (Singularity, [14])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $i \in N$ bireyini düşünelim.
Eğer $\forall S \in \mathscr{C}_i^N$, $S \succ_i \{i\} \Rightarrow S = ch(i,S)T$ şartı sağlanıyor ise i bireyinin tercihlerine **tekil** denir.

Tanım A.10: **Esaslılık Özelliği** (Essentiality, [14])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $i \in N$ bireyini düşünelim.

- $\varepsilon_i = \{i\} \Rightarrow \{i\} \succ_i S, \forall S \neq \{i\} \in \mathscr{C}_i^N$
- $\varepsilon_i = \{i\} \Rightarrow$
  - $\{i\} \succ_i S \Leftrightarrow \varepsilon_i \backslash S \neq \emptyset$ ve
  - $\forall S, T \in \mathscr{C}_i^N$, $\varepsilon_i \subseteq S \subset T \Rightarrow S \succ_i T$

şartını sağlayan bir $\varepsilon_i \in \mathscr{C}_i^N$ koalisyonu var ise i bireyinin tercihlerine **esaslı** denir.

Tanım A.11: **Arkadaşların Sempatikliği Özelliği** (Appreciation of friends, [13])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun. $\forall i \in N$, $F_i := F(\succsim_i) = \{j \in N \mid \{i, j\} \succsim_i \{i\}\}$ kümesine *i*'**nin arkadaşları kümesi**, bu kümenin tümleyeni $E_i = N \backslash F_i$ kümesine de *i*'**nin düşmanları kümesi** denir.

$$\forall i \in N, \forall S, T \in \mathscr{C}_i^N, S \succsim_i T \Leftrightarrow \begin{cases} \mid S \cap F_i \mid > \mid T \cap F_i \mid \text{ veya} \\ \mid S \cap F_i \mid = \mid T \cap F_i \mid \wedge \mid S \cap E_i \mid \leq \mid T \cap E_i \mid \end{cases}$$

ise, $\succsim$ tercih profili **arkadaşların sempatikliği özelliği**ni sağlıyor denir.

Tanım A.12: **Düşmanların Antipatikliği Özelliği** (Aversion to enemies, [13])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun.

$$\forall i \in N, \forall S, T \in \mathscr{C}_i^N, S \succsim_i T \Leftrightarrow \begin{cases} \mid S \cap E_i \mid < \mid T \cap E_i \mid \text{ veya} \\ \mid S \cap E_i \mid = \mid T \cap E_i \mid \wedge \mid S \cap F_i \mid \geq \mid T \cap F_i \mid \end{cases}$$

ise, $\succsim$ tercih profili **düşmanların antipatikliği özelliği**ni sağlıyor denir.

Tanım A.13: **Eksensel Dengelilik Özelliği** (Pivotal balancedness, [15])

$(N, \succsim)$ bir hedonik oyun olsun.
$S \in \mathscr{C}$, $\mathrm{I}(S) \subseteq S$ ve $\mathrm{I}(S) \neq \emptyset$ olsun. $\mathrm{I} = (\mathrm{I}(S))_{S \in \mathscr{C}}$ ailesine **eksensel dağılım** denir. Eğer $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ için $(\mathrm{I}(S))_{S \in \mathscr{B}}$ dengeli ise $\mathscr{B}$ ailesine **I-dengeli** denir.

I-dengeli $\mathscr{B}$ ailesi için $(\forall j \in N, \exists S \in \mathscr{B}$ öyle ki $\pi(j) \succsim_j S)$ şartını sağlan $\pi \in \prod^N$ koalisyon yapısının var olduğu bir I eksensel dağılımı var ise $(N, \succsim)$ hedonik oyununa **eksensel dengeli** denir.

EK B

Örnek B.1: Beklenmeyen Misafir

Anıl ile Berk çok yakın arkadaşlardır. Tüm aktivitelerde her zaman eküri olarak yer almakta, bunun dışında bir seçenek düşünmemektedirler. Cem ise Anıl ve Berk'i çok sevmekte, onlarla yakın arkadaşlık kurmak istemektedir. Eğer bu mümkün değil ise, Anıl veya Berk ile ayrı ayrı da aktiviteler içerisinde yer alabileceğini belirtmektedir.

Bu durum aşağıdaki gibi bir hedonik oyuna çevrilebilmektedir. $N = \{A, B, C\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_A, \succsim_B, \succsim_C\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olacaktır.

$\succsim_A$	$\succsim_B$	$\succsim_C$
AB	AB	ABC
A	B	AC $\sim$ BC
ABC	ABC	C
AC	BC	

Bu oyunda $\pi = \{(A,B),(C)\}$ koalisyon yapısı çoğunluk tarafından tercih edilen çözümdür. $\pi = \{(A,B),(C)\}$ çekirdek kararlı, içsel kararlı ve Pareto optimaldir. Beklenmeyen misafir C bireyi yüzünden bu koalisyon yapısı Nash kararlı değildir.

Örnek B.2: 2 Ortaklık 3 Kalabalık

Aslı, Buse ve Ceren, Erasmus Değişim Programı ile yurt dışında dönemlik olarak eğitime gitmişlerdir. Yurt dışında bulundukları süre boyunca yurtta kalmak istemektedirler. Yurt odasında tek başına kalmak maliyetli olduğu için hepsi yanına bir oda arkadaşı istemektedir. Bir odada üç kişi kalmak da odanın etkin kullanımını azalttığı için hepsi tarafından daha az istenmektedir.

Bu durum aşağıdaki gibi bir hedonik oyuna çevrilebilmektedir. $N = \{A, B, C\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_A, \succsim_B, \succsim_C\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olacaktır.

$\succsim_A$	$\succsim_B$	$\succsim_C$
AB	BC	AC
AC	AB	BC
ABC	ABC	ABC
C	B	C

Bu oyunda hiçbir koalisyon yapısı çekirdek kararlı değildir. $\pi^* = \{(i,j),(k)\}$ şeklindeki üç koalisyon yapısı, üçü de içsel kararlı ve Pareto optimaldir. Ancak $\pi^* = \{(i,j),(k)\}$ koalisyon yapıları Nash kararlı değildir. Bu tür oyunların hepsinde genel olarak çoğunluk tarafından tercih edilen çözüm $\pi = \{(i,j),(k)\}$ şeklindedir.

Örnek B.3: **Koalisyon Hükümeti**

Dört siyasi partinin yer aldığı bir parlemento seçiminde X partisi birinci, Y partisi ikinci, Z partisi üçüncü ve W partisi dördüncü olup parlementoya girmişlerdir. Hiçbir parti çoğunluğu sağlayamadığı için tek başına hükümet kurma hakkına sahip olamamıştır. Partiler koalisyon kurma görüşmeleri başlamadan önce ya da koalisyon kurma görüşmeleri devam ederken şu açıklamaları yapmışlardır. Z partisi, X partisinin W partisi ile o da olmaz ise Y ve W ile beraber koalisyon hükümeti kurmasını, bu şartlar altında Z partisinin seve seve ana muhalefet partisi görevini üstleneceğini belirtmiştir. Ancak koalisyon görüşmeleri devam ederken, X partisinin kendilerine Z siyasi görüşü zemininde uzlaşma teklifinde bulunması halinde X ile koalisyon hükümeti kurabileceğini belirtmiştir. Y partisi en başından beri uzlaşmaya açık olduğunu belirtmiştir. Koalisyon görüşmeleri devam ederken, X partisinin kendilerine ortaklık teklif etmediğini, sadece X'in azınlık ya da seçim hükümetini desteklemelerini önerdiğini belirtmiştir. W partisi en başta X'in içinde olacağı hiçbir koalisyona katılmayacağını söylemiştir. Bunun dışında her teklifi görüşmeye hazır olduklarını belirtmiştir.

Bu durum aşağıdaki gibi bir hedonik oyuna çevrilebilmektedir. $N = \{X, Y, Z, W\}$ birey kümesi ve $\succsim = \{\succsim_X, \succsim_Y, \succsim_Z, \succsim_W\}$ tablodaki gibi bir tercih profili olacaktır.

$\succsim_X$	$\succsim_Y$	$\succsim_Z$	$\succsim_W$
X	YZW	Z $\sim$ XZ	YZW
XZ	YZ	...	YW
XY	XY		W
XYZ	XYZ		...
...	...		
	Y		
	YW		
	...		

Bu oyunun ortaya çıkan çözümü $\pi = \{(X), (Y), (Z), (W)\}$ koalisyon yapısı olmuştur. Hiçbir parti koalisyon hükümeti için birbiri ile anlaşamamış ve hükümet kurulamamıştır. Tercih profiline baktığımızda da $\pi = \{(X), (Y), (Z), (W)\}$ koalisyon yapısının tek çekirdek kararlı, içsel kararlı, Nash kararlı ve Pareto optimal çözüm olduğu görülmektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Seçkin Özbilen

Doğum Tarihi ve Yeri: 1986 - Keşan

Medeni Durumu: Evli

E-Posta: ozbilens@itu.edu.tr & seckin.ozbilen@bilgi.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2010, Boğaziçi Üniversitesi, Matematik
- **Y. Lisans:** 2018, İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği
- **Doktora:** 2018, İstanbul Bilgi Üniversitesi, Ekonomi

DENEYİMLER:

- Eylül 2012 - Halen , Araştırma Görevlisi, İstanbul Bilgi Üniversitesi Ekonomi Bölümü
- Haziran 2010 - Ağustos 2012, Araştırma Görevlisi, Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü