

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜÇ BOYUTLU GALİLE UZAYINDA ÖTELEME VE FACTORABLE  
YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Gürkan ŞASI**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Güler Gürpınar ARSAN**

**ARALIK 2018**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜÇ BOYUTLU GALİLE UZAYINDA ÖTELEME VE FACTORABLE  
YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Gürkan ŞAŞI  
(509161205)**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Güler Gürpınar ARSAN**

**ARALIK 2018**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509161205 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Gürkan ŞAŞI, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**ÜÇ BOYUTLU GALİLE UZAYINDA ÖTELEME VE FACTORABLE YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Doç. Dr. Güler Gürpınar ARSAN** .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**      **Prof. Dr. Gülçin Çivi BİLİR** .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Uğur DURSUN** .....

Işık Üniversitesi

**Teslim Tarihi**      : **16.11.2018**

**Savunma Tarihi**    : **13.12.2018**



## **ÖNSÖZ**

Bu çalışmanın hazırlanmasının her aşamasında her türlü yardım, öneri ve desteklerini esirgmeden beni yönlendiren ve sabırla yardımcı olan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Güler Gürpınar ARSAN'a teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

**Kasım 2018**

**Gürkan ŞAŞI**





## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ .....	v
İÇİNDEKİLER .....	vii
SEMBOLLER .....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET .....	xiii
SUMMARY .....	xv
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR.....</b>	<b>3</b>
2.1 Galile Uzayının Tanımı.....	3
2.2 Üç Boyutlu Galile Uzayında Öteleme Yüzeyleri .....	9
2.3 Üç Boyutlu Galile Uzayında 1.Tip Öteleme Yüzeylerinin Sınıflandırılması ..	11
2.4 $G_3$ Galile Uzayında Sabit Gauss Eğrilikli 1.Tip Öteleme Yüzeyleri.....	17
2.5 $G_3$ Galile Uzayında Sabit Ortalama Eğrilikli 1.Tip Öteleme Yüzeyleri.....	20
2.6 $G_3$ Galile Uzayında Sabit Gauss Eğrilikli 2.Tip Öteleme Yüzeyleri.....	22
2.7 $G_3$ Galile Uzayında Sabit Ortalama Eğrilikli 2.Tip Öteleme Yüzeyleri.....	25
<b>3. ÜÇ BOYUTLU GALİLE UZAYINDA KOORDİNATLARI SONLU TIPTEN OLAN ÖTELEME YÜZEYLERİNİN SINIFLANDIRILMASI .....</b>	<b>29</b>
3.1 Sonlu Tipten Koordinatlara Sahip Olan Yüzeyler .....	29
3.2 3-boyutlu Galile Uzayında Laplace Operatörü .....	30
3.3 $G_3$ Galile Uzayında Koordinatları Sonlu Tipten Olan Öteleme Yüzeyleri ..	31
3.4 $G_3$ Galile Uzayında Koordinatları $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ Koşulunu Sağlayan Öteleme Yüzeyleri.....	33
<b>4. ÜÇ BOYUTLU GALİLE UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER.....</b>	<b>37</b>
4.1 Factorable Yüzeylerin Tanımı.....	37
4.2 $G_3$ Galile Uzayında Factorable Yüzeylerin Gauss ve Ortalama Eğrilikleri .....	37
4.3 $G_3$ Galile Uzayında Factorable Yüzeylerin Laplasyeni .....	42
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>47</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>49</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>51</b>



## SEMBOLLER

$G_3$	: 3-boyutlu Galile uzayı
$\omega$	: Mutlak (ideal) düzlem
$f$	: Mutlak (ideal) düzlemde mutlak doğru
$I$	: Eliptik involüsyonu
$\langle, \rangle$	: Skaler çarpım
$\ , \ $	: Norm (büyüklük)
$d$	: Uzaklık fonksiyonu
$\wedge$	: Cross (Vektörel) çarpım
$\kappa$	: Eğrilik
$\tau$	: Burulma
$N$	: Birim normal vektörü
$M$	: Yüzey
$II$	: 2. Esas form
$K$	: Gauss eğriliği
$H$	: Ortalama eğrilik
$L_{ij}$	: 2. Esas formun katsayıları
$g_{ij}$	: Metrik tensörün bileşenleri
$\Delta$	: Laplace operatorü



## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.3.1 : Yumurta kutusu yüzeyi. ....	14
Şekil 2.3.2 : Öteleme yüzeyi.....	17
Şekil 2.4.1 : Sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli 1. tip öteleme yüzeyi.....	19
Şekil 2.4.2 : Bir izotropik düzlemde bulunan bir izotropik olmayan silindirik yüzey.....	19
Şekil 2.4.3 : Bir Öklidyen düzlemde bulunan bir izotropik silindirik yüzey.....	20
Şekil 2.5.1 : $f(u) = \sin u$ olduğunda elde edilen sabit ortalama eğrilikli öteleme yüzeyi.....	21
Şekil 2.7.1 : Sabit ortalama eğrilikli 2. tip bir öteleme yüzeyi.....	28



# ÜÇ BOYUTLU GALİLE UZAYINDA ÖTELEME VE FACTORABLE YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

## ÖZET

Öklid uzayında, eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi hakkındaki çalışmalar, Öklid dışı uzaydaki çalışmalar kadar eski bir tarihe sahiptir. Öklid uzayının klasik içeriği diğer bazı geometrilere aktarılabilir olan sonuçların bir kaynağıdır. Yeni geometrileri tanımlamanın bir yolu Cayley-Klein uzaylarından geçer. Bu uzaylar, kuadratik yüzeyleri ve düzlemleri içeren projektif uzayın bir alt kümesi olan mutlak şekilli projektif uzaylar olarak tanımlanır. Projektif uzayın mutlak şekil altında değişmez kalan izdüşümleri, Cayley-Klein uzayının grup hareketleri olarak adlandırılan izdüşümlerinin bir alt grubunu tanımlar. Mutlak şekil vasıtasıyla, metrik bağıntılar tanımlanır ve bunlar grup hareketleri altında değişmez kalırlar.

Üç boyutlu Galile uzayı,  $(0, 0, +, +)$  işaretli projektif metrikle oluşturulmuş Cayley-Klein uzayıdır.  $(w, f, I)$  sıralı üçlüsü Galile geometrisinin ideal (mutlak) şeklini oluşturur. Burada  $w$  ideal düzlemi;  $f$ ,  $w$  düzleminde bulunan ideal doğruyu;  $I$  ise  $f$ 'nin noktalarının sabit eliptik involüsyonunu gösterir.

Galile uzayı Öklid geometrisinden özel görecelik kavramına bir köprü oluşturur.

Galile uzayı Röschel tarafından geliştirilmiştir ve daha sonra Kamenerovic ve Sipus Galile uzaylarında çalışmalar yapmışlardır. Bununla beraber, Galile ve pseudo-Galile uzaylarında bir çok çalışma yapılmıştır.

Galile geometrisi Öklid dışı geometridir ve Galileo ile Einstein'ın görecelik kuramıyla bağlantılı olduğundan Galile ve pseudo-Galile uzaylarının fizikte önemi vardır.

Cayley-Klein geometrileri soliton teorisi gibi bir çok alanda önemli olduğundan ilginç hale gelmiştir.

Bu tez çalışmasında üç boyutlu Galile uzayında öteleme ve factorable yüzeyler çalışılmıştır.

Tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, üç boyutlu Galile uzayının tahricesi ve gelişimi ile ilgili bilgi verilerek, tezin içeriği ve kapsamı ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, önce üç boyutlu Galile uzayında eğrilerin izotropik olma ve izotropik olmama durumları ifade edilmiş ve daha sonra iki vektörün skaler ve vektörel çarpımı tanımlanmıştır. Eğrilerle ilgili tanımlar verilerek, üç boyutlu Galile uzayında ikinci esas formun katsayıları, yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği formüle edilmiştir. Daha sonra, bu uzayda öteleme yüzeyleri ele alınarak, sabit Gauss ve sabit ortalama eğrilikli 1. tip ve 2. tip öteleme yüzeyleri çalışılmış ve bu yüzeylerle ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk önce, koordinatları sonlu tipten olan alt manifold tanımı verilmiş ve daha sonra üç boyutlu Galile uzaylarında koordinatları sonlu tip olan öteleme yüzeyleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, üç boyutlu Galile uzayında sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip olan birinci tip factorable yüzeyler incelenmiştir. Bu yüzeyin denklemleri elde edilmiştir ve daha sonra koordinat fonksiyonları yüzeyin Laplasyeninin özfonksiyonu olan birinci tip factorable yüzeyler ele alınmıştır. Koordinatları sonlu tip olan harmonik factorable yüzeyler için bir teorem verilmiştir.





# CLASSIFICATIONS OF TRANSLATION AND FACTORABLE SURFACES IN THE 3-DIMENSIONAL GALILEAN SPACE

## SUMMARY

Study of differential geometry of curves and surfaces in Euclidean, as well as in other non-Euclidean ambient spaces, has a long history. Classical context of the Euclidean space is a source of results which could be transferred to some other geometries. One way of defining new geometries is through Cayley-Klein spaces. They are defined as projective spaces with an absolute figure, a subset of consisting of a sequence of quadrics and planes. Projectivities of the projective space which leave invariant the absolute figure define the subgroup of projectivities called the group of motions of a Cayley-Klein space. By means of the absolute figure, metric relations are also defined and they are invariant under the group of motions.

The 3-dimensional Galilean space  $G_3$  is the Cayley-Klein space equipped with the projective metric of signature  $(0, 0, +, +)$ . The absolute figure of the Galilean geometry consists of an ordered triple  $(w, f, I)$ , where  $w$  is the absolute (ideal) plane,  $f$  is the absolute line in  $w$  and  $I$  is the fixed elliptic involution of points of  $f$ .

The geometry of Galilean Relativity acts like a “bridge” from Euclidean geometry to special Relativity.

Galilean space is the space of Galilean Relativity. Galilean space has been largely developed by Röschel. Furthermore, Kamenerovic and Sipus studied about Galilean space. Many works were done about the Galilean and pseudo-Galilean spaces.

Galilean and pseudo-Galilean spaces has a crucial role in physics. Galilean space-time are very important in non-relativistic physics.

Galilean geometry is a non-Euclidean geometry and associated with Galileo’s principle of relativity.

Cayley-Klein geometries recently have become interesting again because of their importance for other fields, like soliton theory.

In the Galilean space, for given points  $x = (x_1, x_2, x_3)$  and  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , the Galilean distance is introduced by the absolute figure, namely

$$d(x, y) = \begin{cases} |y_1 - x_1|, & \text{if } x_1 \neq 0 \text{ or } y_1 \neq 0, \\ \sqrt{(y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}, & \text{if } x_1 = 0 \text{ and } y_1 = 0. \end{cases}$$

The lines and planes are categorized up to the absolute figure. Explicitly, a line is said to be non-isotropic (resp. isotropic) if its intersection with the absolute line  $I$  is empty (resp. non-empty). Contrary to this, a plane is said to be isotropic if it does not involve  $I$ , otherwise it is said to be Euclidean. In other words, an isotropic plane does not involve any isotropic direction. In the affine model of  $G_3$ , the Euclidean planes are determined by the equation  $x = \text{const}$ . Accordingly, a vector is called isotropic if it is involved in the Euclidean plane  $x = 0$ .

A curve given in parametric form  $x = x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$  is said to be non-isotropic (or admissible) if nowhere its tangent vector is isotropic, namely  $x'_1(s) = \frac{dx}{ds} \neq 0$ . Otherwise the curve  $x$  is said to be isotropic.

In the Galilean 3-space, the vector  $x = (x_1, x_2, x_3)$  is isotropic if  $x_1 = 0$  and non-isotropic otherwise. Hence, for standard coordinates  $(x_1, x_2, x_3)$ , the  $x_1$ -axis is non-isotropic while the  $x_2$ -axis and the  $x_3$ -axis are isotropic. The  $x_2x_3$ -plane,  $x_1 = 0$ , is Euclidean and the  $x_1x_2$ -plane and  $x_1x_3$ -plane are isotropic. The Galilean scalar product of two vectors  $x = (x_1, x_2, x_3)$  and  $y = (y_1, y_2, y_3)$  is defined by

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} x_1y_1, & \text{if } x_1 \neq 0 \text{ or } y_1 \neq 0, \\ x_2y_2 + x_3y_3, & \text{if } x_1 = 0 \text{ and } y_1 = 0. \end{cases}$$

The Galilean cross product of two vectors  $x = (x_1, x_2, x_3)$  and  $y = (y_1, y_2, y_3)$  is defined as

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (0, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

A translation surface in  $G_3$  is locally parametrized by

$$\varphi: I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow G_3, \quad \varphi(u, v) = \alpha(u) + \beta(v),$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  denote translating curves. Under the condition that  $\alpha$  and  $\beta$  are planar curves, translating surfaces categorized such a surface up to the absolute figure:

**Type 1:**  $\alpha$  is planar non- isotropic curve and  $\beta$  isotropic curve,

**Type 2:**  $\alpha$  and  $\beta$  are planar non- isotropic curves.

Translation surfaces of the Type 1 in the Galilean space can be locally represented by

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)).$$

where  $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$  is a non-isotropic curve and  $\beta(v) = (0, v, g(v))$  is an isotropic curve.

Surface of Type 2, i.e., a surface having both translated curves non-isotropic

$$\varphi(u, v) = (u + v, g(v), f(u))$$

where  $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$  and  $\beta(v) = (v, g(v), 0)$  are a non-isotropic curves.

A surface  $M$  is a factorable surface if it can be parametrized by

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u)g(v)).$$

In this thesis, translation and factorable surfaces in a 3-dimensional Galilean space  $G_3$  are studied.

This thesis consists of four chapters:

In the first chapter, firstly, a brief literature review of Galilean spaces is given. Then, the subject and contents of thesis are given.

In the second chapter, translation surfaces with constant Gauss curvature and constant mean curvature in  $G_3$  are studied. Some theorems concerning translation in the Galilean space are given.

In the third chapter, first, the definition of coordinate finite type submanifold is given. Then the classification of coordinate finite type translation surfaces in a 3-dimensional Galilean space  $G_3$  are studied.

In the fourth chapter, the factorable surfaces of first kind in a 3-dimensional Galilean space having non-zero constant mean curvature are examined. Equations of this surface are determined. The following theorem is proved.

**Theorem:** If  $M$  is a factorable surface of Type 1 of constant mean curvature  $H \neq 0$  in 3-dimensional Galilean space, then  $M$  is congruent to a surface

$$z = \pm \frac{1}{2H} \sqrt{1 - 4H^2(v + c)^2}, \quad c = \text{const.}$$

Then, it is considered factorable surface of  $G_3$  whose coordinate functions are eigenfunctions of the Laplacian of this surface. It is given a theorem concerning coordinate finite type harmonic factorable surface. The following theorem is proved.

**Theorem:** Let  $M$  is a factorable surface of Type 1 in a 3-dimesional Galilean space. If  $M$  is harmonic, then it is an open part of a plane.



## 1.GİRİŞ

M.Ö. 300 yıllarında Öklid (Euclid) tarafından yazılan onüç ciltlik ‘Öğeler’ adlı eserde yer alan tanım ve postulatlarla Öklid geometrisinin temelleri atılmıştır. Öklid geometrisi uzun bir süre tek geometrik sistem olarak kalmış, daha sonra Gauss (1816), Lobachevsky (1829) ve Bolyai (1832) tarafından, hiperbolik geometri ortaya atılmıştır. Hiperbolik geometri Öklid-dışı geometridir. Öklid-dışı bir çok geometri vardır. Öklid olmayan geometri olarak genellikle hiperbolik geometri ve eliptik geometri düşünülmektedir. Cayley ve Klein bu geometrileri genişletmişlerdir. 1854 yılında Riemann Öklidyen geometri, hiperbolik geometri ve eliptik geometrilerinin birbiri ile bağlantılı olduğunu, fakat farklılık gösterdiğini belirtmiştir. Öklid-dışı geometrilerden biri olan Galile geometrisi, Galile ile Einstein’in görelilik kuramıyla bağlantılıdır. Galile geometrisi, Klein geometrilerinden biridir.

Galile geometrisi ile ilgili fiziksel temellerin atıldığı ilk kitap Yaglom [1] tarafından 1979 yılında yazılmıştır. Galile uzayı, 1984 de Rösche [4] tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra Pavkovic-Kamenarovic [3] (1987), Divjak [12] (2003), Divjak-Sipus [13] (2003) ve Sipus [14] (2008) Galile uzaylarında çalışmışlardır. Daha sonra, üç boyutlu Galile uzayında yüzeyler ve eğrilerle ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Öklid olmayan geometriler içinde Galile geometrisi güncel bir çalışma alanıdır.

Bu tez çalışmasında, üç boyutlu Galile uzayında öteleme yüzeyleri ile ilgili makaleler çalışılmış ve ilgili teoremler ispatlanmıştır. Sabit Gauss ve ortalama eğriliğine sahip olan birinci ve ikinci tip öteleme yüzeylerinin sınıflandırılması yapılmıştır. Daha sonra, üç boyutlu Galile uzayında koordinatları sonlu tipten olan birinci tip öteleme yüzeyleri ile ilgili makale incelenerek, teoremleri ispat edilmiştir. Son bölümde ise, sabit ortalama eğrilikli factorable yüzeylerin sınıflandırılması yapılmış ve bu tip yüzeylerin denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca, koordinatları sonlu tipten olan factorable yüzeyler incelenerek, yüzeyin harmonik olması durumunda yüzeyin denklemleri elde edilmiştir.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1 Galile Uzayının Tanım

Bu bölümde; Galile uzayının tanımı, vektörlerin izotropik olması ve olmaması hali, Galile uzayında skaler çarpım, norm (büyüklük), vektörel çarpım tanımları ifade edilecek, ayrıca bir eğrinin eğriliği, burulması ve Frenet formülleri verilecektir.

**Tanım 2.1.1:** Üç boyutlu Galile uzayı  $G_3$  işaretleri  $(0,0,+,+)$  olan bir projektif metrikle eşlenmiş bir Cayley-Klein uzayıdır. Galile uzayı sıralı bir üçlüyü  $(\omega, f, I)$  içerir. Bunlar:

$\omega$ : mutlak (ideal) düzlem.

$f$ : mutlak (ideal) düzlemde mutlak doğru.

$I$ : mutlak (ideal) doğrunun sabit eliptik involüsyonu.

**Tanım 2.1.2:** Üç boyutlu Galile uzayında doğrular ve düzlemler şu şekilde sınıflandırılabilir. Eğer bir doğrunun,  $I$  mutlak doğrusu ile kesişimi boş ise bu doğruya izotropik olmayan denir. Aynı şekilde eğer bu doğrunun,  $I$  mutlak doğrusu ile keşimi boş değilse bu doğruya izotropik denir. Bunun tersine, eğer bir düzlem mutlak ideal doğruyu içermezse bu düzlem izotropik olarak, aksi takdirde Öklidyen olarak adlandırılır. Öklidyen düzlemler  $x_1 = \text{sabit}$  olması ile belirlenir. Buna göre eğer bir vektör Öklidyen düzlemde  $x_1 = 0$  olarak ifade edilmiş ise bu vektöre izotropik denir.

Üç boyutlu Galile uzayında  $x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$  eğrisini düşünelim. Eğer bu eğrinin teğet vektörleri hiçbir yerde izotropik olmuyorsa yani  $x'_1(s) = \frac{dx}{ds} \neq 0$  olursa bu eğriye izotropik olmayan denir. Aksi takdirde, bu eğriye izotropik denir.  $G_3$  Galile uzayında herhangi bir  $x = (x_1, x_2, x_3)$  vektörü için:

$x_1 \neq 0$  ise  $x$  vektörüne izotropik olmayan,

$x_1 = 0$  ise  $x$  vektörüne izotropik,

$x_1 = 1$  ise  $x$  vektörüne birim izotropik

denir [1].

**Tanım 2.1.3:**  $G_3$  Galile uzayına ait iki vektör  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3)$  olsun. Bu iki vektörün skaler çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} x_1 y_1, & x_1 \neq 0 \text{ ya da } y_1 \neq 0 \text{ ise,} \\ x_2 y_2 + x_3 y_3, & x_1 = 0 \text{ ve } y_1 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak ifade edilir [1].

**Tanım 2.1.4:**  $x = (x_1, x_2, x_3)$  vektörü  $G_3$  Galile uzayına ait bir vektör olsun. Galile uzayında bir vektörün normu (büyüklüğü)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \begin{cases} x_1, & x_1 \neq 0 \text{ ise,} \\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2}, & x_1 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır. Eğer  $\|x\| = 1$  ise  $x$  birim vektör olarak adlandırılır [1].

İki izotropik vektör  $x = (0, x_2, x_3)$  ve  $y = (0, y_2, y_3)$  olmak üzere bu vektörlerin skaler çarpımı

$$\langle x, y \rangle = x_2 y_2 + x_3 y_3$$

dır. İki izotropik vektör dik ise  $\langle x, y \rangle = 0$  olur. Bir izotropik vektörün büyüklüğü

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle (0, x_2, x_3), (0, x_2, x_3) \rangle} = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

olarak hesaplanır.

**Tanım 2.1.5:** Galile uzayında  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3)$  olmak üzere herhangi iki vektör verilsin. İki vektör arasındaki uzaklık

$$d(x, y) = \begin{cases} |y_1 - x_1|, & x_1 \neq 0 \text{ ya da } y_1 \neq 0 \text{ ise,} \\ \sqrt{(y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}, & x_1 = 0 \text{ ve } y_1 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

formülü ile verilir [2].

**Tanım 2.1.6:**  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3)$   $G_3$  Galile uzayında herhangi iki vektör olsun. İki vektörün vektörel çarpımı

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (0, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

olarak tanımlanır [1].

**Tanım 2.1.7:** Üç boyutlu Galile uzayında  $C^r$  sınıftan izotropik olmayan bir

$$r(u) = (u, f(u), g(u)) \quad (2.1)$$



eğrisi göz önüne alalım. Bu eğrinin  $\kappa(u)$  eğriliği ve  $\tau(u)$  burulması

$$\kappa = \frac{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|}{(\vec{r}'^2)^{3/2}},$$

$$\tau = \frac{\det(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{(\vec{r}' \wedge \vec{r}'')^2} \quad (2.2)$$

formülleri kullanılarak şu şekilde hesaplanır [3].

Sırasıyla (2.1)'de verilen eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınır

$$\vec{r}' = (1, f'(u), g'(v)),$$

$$\vec{r}'' = (0, f''(u), g''(v)),$$

$$\vec{r}''' = (0, f'''(u), g'''(v))$$

elde edilir. Daha sonra eğrinin birinci türevinin karesi alınır yani Galile uzayında kendisiyle skaler çarpımı yapılırsa, Tanım 2.1.3'e göre

$$\vec{r}'^2 = \langle \vec{r}', \vec{r}' \rangle = \langle (1, f'(u), g'(v)), (1, f'(u), g'(v)) \rangle = 1 \quad (2.3)$$

olarak bulunur. Eğrinin birinci ve ikinci türevinin Tanım 2.1.6'ya göre vektörel çarpımı hesaplandığında

$$\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & f' & g' \\ 0 & f'' & g'' \end{vmatrix} = (0, -g'', f'') \quad (2.4)$$

olarak bulunur. (2.4)'de bulunan ifadenin Tanım 2.1.4'e göre normu

$$|\vec{r}' \wedge \vec{r}''| = \sqrt{\langle \vec{r}' \wedge \vec{r}'', \vec{r}' \wedge \vec{r}'' \rangle} \quad (2.5)$$

$$= \sqrt{\langle (0, -g'', f''), (0, -g'', f'') \rangle}$$

$$= \sqrt{g''^2 + f''^2}$$

şeklinde bulunur. (2.3) ve (2.5)'de bulunan eşitlikler eğrilik formülünde yerine yazılırsa, verilen eğrinin eğriliği

$$\kappa = \frac{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|}{(\vec{r}'^2)^{3/2}} = \sqrt{f''^2(u) + g''^2(u)}$$

olarak bulunur.

Eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü türevinin determinanı

$$\det(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \begin{vmatrix} 1 & f' & g' \\ 0 & f'' & g'' \\ 0 & f''' & g''' \end{vmatrix} = f''g''' - g''f''' \quad (2.6)$$

olarak hesaplanır. Daha sonra, (2.4)'de bulunan eşitliğin karesi yani kendisiyle skaler çarpımı

$$(\vec{r}' \wedge \vec{r}'')^2 = \langle (\vec{r}' \wedge \vec{r}''), (\vec{r}' \wedge \vec{r}'') \rangle = g''^2 + f''^2 = \kappa^2(u) \quad (2.7)$$

olarak bulunur. (2.6) ve (2.7) denklemlerinde bulunan eşitlikler (2.2) denkleminde yerine yazılırsa  $\tau$  burulması

$$\tau = \frac{\det(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{(\vec{r}' \wedge \vec{r}'')^2} = \frac{\det(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{\kappa^2(u)} = \frac{f''g''' - g''f'''}{g''^2 + f''^2}$$

olarak hesaplanır.

O halde, üç boyutlu Galile uzayında  $C^r$  sınıfından izotropik olmayan bir

$$r(u) = (u, f(u), g(u))$$

eğrisinin  $\kappa(u)$  eğriliği ve  $\tau(u)$  burulması sırasıyla,

$$\kappa = \sqrt{f''^2(u) + g''^2(u)},$$

$$\tau = \frac{f''g''' - g''f'''}{g''^2 + f''^2}$$

dır.

**Tanım 2.1.8:** Galile uzayında Frenet formülleri:

Üç boyutlu Galile uzayında bir  $r(u) = (u, f(u), g(u))$  eğrisi verilsin. Sırasıyla bu eğrinin teğet birim, asal birim ve binormal vektörleri

$$\vec{t}' = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} \quad \text{teğet birim vektör,}$$

$$\vec{n}' = \vec{b}' \wedge \vec{t}' \quad \text{asal birim vektör,}$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|} \quad \text{binormal vektör}$$

şeklinde verilir [3].

(2.1)'de verilen eğrinin birinci türevinin normu

$$|\vec{r}'| = \sqrt{\langle \vec{r}' \wedge \vec{r}'' \rangle} = \sqrt{\langle (1, f', g'), (1, f', g') \rangle} = 1$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,  $r(u) = (u, f(u), g(u))$  eğrisinin teğet birim vektörü, binormal vektörü ve asal birim vektörü, sırasıyla,

$$\vec{t}' = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = (1, f'(u), g'(u)),$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|} = \frac{(0, -g'', f'')}{\sqrt{g''^2 + f''^2}} = \frac{1}{\kappa(u)} (0, -g''(u), f''(u)),$$

$$\vec{n}' = \vec{b}' \wedge \vec{t}' = \begin{bmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & \frac{-g''}{\kappa} & \frac{f''}{\kappa} \\ 1 & f'(u) & g'(u) \end{bmatrix} = \left( 0, \frac{f''(u)}{\kappa(u)}, \frac{g''(u)}{\kappa(u)} \right)$$

olarak hesaplanır.

Dolayısıyla bir  $r(u) = (u, f(u), g(u))$  eğrisinin üç boyutlu Galile uzayında  $\kappa$  eğriliği ve  $\tau$  burulması teğet birim vektör ( $t$ ), asal birim vektörü ( $n$ ) ve binormal vektör ( $b$ ) cinsinden

$$\frac{d}{du} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir.

**Tanım 2.1.9:** Üç boyutlu Galile uzayında  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) sınıfından bir yüzey

$$\begin{aligned} \varphi: U \rightarrow M, \quad U \subset \mathbb{R}^2, \\ \varphi(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

olarak parametrelendirilmiş olsun [4].

$$x_{,i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} = x_{u_i} \quad \text{ve} \quad x_{,ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

olmak üzere  $x_{,i} \neq 0$  olduğunu, yani yüzeyin 'uygun' olduğunu kabul edelim.

Yüzeyin birinci esas formu

$$ds^2 = (g_1 du_1 + g_2 du_2)^2 + \varepsilon (h_{11} du_1^2 + 2h_{12} du_1 du_2 + h_{22} du_2^2)$$

ile verilir. Burada  $g_i = x_{,i}$ ,  $h_{ij} = y_{,i}y_{,j} + z_{,i}z_{,j}$  ( $i = 1, 2$ ) dir.

Ayrıca,

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & du_1 : du_2 \text{ izotropik değil} \\ 1, & du_1 : du_2 \text{ izotropik} \end{cases}$$

dır. Galile uzayında yüzeyin  $N$  birim normal vektörü

$$N = \frac{\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}}{W}$$

ile tanımlanır. Burada  $W = \|\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}\|$ ,  $\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$  ve  $\varphi_{,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$  dır.

İkinci esas form ise

$II = L_{11} du_1^2 + 2L_{12} du_1 du_2 + L_{22} du_2^2$  olarak ifade edilir. Burada

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \left\langle \frac{\varphi_{,ij} x_{,1} - x_{,ij} \varphi_{,1}}{x_{,1}}, N \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\varphi_{,ij} x_{,2} - x_{,ij} \varphi_{,2}}{x_{,2}}, N \right\rangle \end{aligned}$$

dır.

Yüzeyin Gauss eğriliği ( $K$ ) ve ortalama eğriliği ( $H$ ), Öklid uzayına benzer olarak

$$\begin{aligned} K &= \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2} \\ H &= \frac{g_2^2 L_{11} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}}{2W^2} \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

$G_3$  uzayında yüzeyin  $N$  birim normal vektörünü bulalım. (2.8)'de verilen yüzeyin  $\varphi_{,1}$  ve  $\varphi_{,2}$  türevleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \varphi_{,1} &= (x_{u_1}, y_{u_1}, z_{u_1}), \\ \varphi_{,2} &= (x_{u_2}, y_{u_2}, z_{u_2}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

olmak üzere bu vektörlerin  $G_3$  uzayında vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2} &= (x_{u_1}, y_{u_1}, z_{u_1}) \wedge (x_{u_2}, y_{u_2}, z_{u_2}) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_{u_1} & y_{u_1} & z_{u_1} \\ x_{u_2} & y_{u_2} & z_{u_2} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2} = \left( 0, -(x_{u_1}z_{u_2} - x_{u_2}z_{u_1}), (x_{u_1}y_{u_2} - x_{u_2}y_{u_1}) \right)$$

ve dolayısıyla  $\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}$ 'nin normu (büyüklüğü)

$$\begin{aligned} W = \|\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}\| &= \sqrt{(x_{u_1}z_{u_2} - x_{u_2}z_{u_1})^2 + (x_{u_1}y_{u_2} - x_{u_2}y_{u_1})^2} \\ &= \sqrt{(x_{u_1}z_{u_2} - x_{u_2}z_{u_1})^2 + (x_{u_1}z_{u_2} - x_{u_2}z_{u_1})^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

O halde, yüzeyin  $N$  birim normal vektörü

$$N = \frac{\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}}{W} = \frac{\left( 0, -(x_{u_1}z_{u_2} - x_{u_2}z_{u_1}), (x_{u_1}y_{u_2} - x_{u_2}y_{u_1}) \right)}{\sqrt{(x_{u_1}z_{u_2} - x_{u_2}z_{u_1})^2 + (x_{u_1}z_{u_2} - x_{u_2}z_{u_1})^2}}$$

olarak elde edilir.

## 2.2 Üç Boyutlu Galile Uzayında Öteleme Yüzeyleri

Bu kısımda, Galile uzayında öteleme yüzeyleri ele alınmıştır. Öteleme yüzeyleri iki eğri tarafından üretilen yüzeylerdir. Öteleme yüzeyleri ilk olarak 1835 yılında H.Scherk tarafından ele alınmıştır ve düz olmayan tek minimal öteleme yüzeyinin kendi adıyla adıyla anılan Scherk yüzeyi olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra öteleme yüzeyleri bir çok geometrici tarafından çeşitli bakış açılarıyla değerlendirilip araştırılmıştır. L. Verstraelen, J. Walrave ve S. Yaprak [5], n-boyutlu Öklid uzayında minimal öteleme yüzeylerini ele almışlardır. H. Liu [6], 3-boyutlu Öklid uzayında ve 3-boyutlu Minkowski uzayında sabit ortalama eğrilikli ve sabit Gauss eğrilikli öteleme yüzeylerini sınıflandırmıştır.

Bu çalışmada, üç boyutlu Galile  $G_3$  uzayında sabit Gauss eğrilikli ve sabit ortalama eğrilikli 1. tip ve 2. tip öteleme yüzeyleri ele alınmış ve öteleme yüzeylerinin sınıflandırılması yapılmıştır.

**Tanım 2.2.1:** Bir öteleme yüzeyi lokal olarak iki tane eğrinin toplamı olarak ifade edilir. Buna göre öteleme yüzeyleri

$$\varphi: I_1 \times I_2 \subset R^2 \rightarrow G_3,$$

$\alpha$  ve  $\beta$  öteleme eğrileri olmak üzere bir öteleme yüzeyi

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$$

ile ifade edilir [6].

Öteleme yüzeyleri,  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin düzlemsel eğri olmasına göre şu şekilde sınıflandırılır.

**1. Tip:**  $\alpha$  izotropik olmayan düzlemsel eğri ve  $\beta$  izotropik eğridir.

**2. Tip:**  $\alpha$  ve  $\beta$  ikisi de izotropik olmayan eğrilerdir.

Öteleme yüzeyleri iki düzlem eğrisinin ötelenmesi ile elde edilen yüzeylerdir. Değişik tiplerde düzlemler olduğu için eğrilerin bulunduğu duruma göre farklı öteleme yüzeyleri vardır.

1) Eğrilerden biri  $y = 0$  düzleminde bulunan izotropik olmayan eğri, diğeri ise  $x = 0$  düzleminde bulunan izotropik eğridir.

2) Eğrilerden biri  $z = 0$  düzleminde, diğeri ise  $y = 0$  düzleminde bulunan izotropik olmayan eğrilerdir. Dolayısıyla diyebiliriz ki:

1)  $\alpha$  düzlemsel izotropik olmayan eğri ve  $\beta$  düzlemsel izotropik eğri.

2)  $\alpha$  ve  $\beta$  ikisi de düzlemsel izotropik olmayan eğrilerdir.

Bu yüzden, öteleme yüzeyleri şu şekilde parametrelendirilir:

**Tanım 2.2.2:** (1. Tip Öteleme Yüzeyleri)

1. tip öteleme yüzeyleri bir izotropik olmayan ve bir izotropik olan eğriler tarafından üretilen yüzeylerdir.

$$\alpha(u) = (u, 0, f(u)) \text{ izotropik olmayan eğri,}$$

$$\beta(v) = (0, v, g(v)) \text{ izotropik eğri}$$

olmak üzere 1. tip öteleme yüzeyi,

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$$

şeklinde parametrelendirilir [7].

**Tanım 2.2.3:** (2. Tip Öteleme Yüzeyleri)

2. tip öteleme yüzeyleri izotropik olmayan eğriler tarafından üretilen eğrilerdir.

$$\alpha(u) = (u, 0, f(u)) \text{ izotropik olmayan eğri,}$$

$$\beta(v) = (v, g(v), 0) \text{ izotropik olmayan eğri}$$

olmak üzere 2. tip öteleme yüzeyi,

$$\varphi(u, v) = (u + v, g(v), f(u))$$

şeklinde parametrelendirilir [7].

### 2.3 Üç Boyutlu Galile Uzayında 1. Tip Öteleme Yüzeylerinin Sınıflandırılması

3-boyutlu Galile uzayında 1. tip öteleme yüzeyi

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)) \quad (2.11)$$

şeklinde parametrelendirilmiş olsun.

Gauss eğriliği şu şekilde yazılır;

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2}.$$

(2.11)'de verilen yüzeyin  $u$  ve  $v$ 'ye göre birinci ve ikinci türevleri

$$\varphi_u = (1, 0, f'(u)),$$

$$\varphi_v = (0, 1, g'(v)),$$

$$\varphi_{uu} = (0, 0, f''(u)),$$

$$\varphi_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$\varphi_{vv} = (0, 0, g''(v))$$

olarak bulunur. Bununla beraber,

$x = x(u, v) = u$ ,  $y = y(u, v) = v$ ,  $z = z(u, v) = f(u) + g(v)$  olduğundan

$$g_1 = \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad g_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

olarak bulunur.

(2.11)'de verilen yüzeyin  $u$  ve  $v$ 'ye göre alınmış birinci türevlerinin vektörel çarpımı

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'(u) \\ 0 & 1 & g'(v) \end{vmatrix} = (0, -g'(v), 1) \quad (2.12)$$

şeklinde bulunur. (2.12)'de verilen vektörel çarpımın normu

$$W = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{1 + g'^2(v)}$$

olur. Yüzeyin  $N$  birim normal vektörü

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{W} = \frac{1}{\sqrt{1 + g'^2(v)}} (0, -g'(v), 1)$$

olarak hesaplanır.

Yüzeyin ikinci esas formun katsayıları

$$\begin{aligned} L_{11} &= \left\langle \frac{\varphi_{uu}x_u - x_{uu}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle, \quad (x_u = 1, x_{uu} = 0) \\ &= \left\langle (0, 0, f''(u)), \frac{(0, -g'(v), 1)}{\sqrt{1 + g'^2}} \right\rangle = \frac{f''}{\sqrt{1 + g'^2}}, \end{aligned}$$

$\varphi_{uv} = (0, 0, 0)$  ve  $x_{uv} = 0$  olduğundan

$$L_{12} = \left\langle \frac{\varphi_{uv}x_u - x_{uv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle = 0,$$

ve

$$\begin{aligned} L_{22} &= \left\langle \frac{\varphi_{vv}x_u - x_{vv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle, \quad (x_u = 1, x_{vv} = 0) \\ &= \left\langle (0, 0, g''), \frac{(0, -g', 1)}{\sqrt{1 + g'^2}} \right\rangle \\ &= \frac{g''}{\sqrt{1 + g'^2}} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K &= \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2}, \\ &= \frac{\frac{f''}{\sqrt{1 + g'^2}} \frac{g''}{\sqrt{1 + g'^2}}}{W^2} \\ &= \frac{f''(u)g''(v)}{W^4} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada  $W = \sqrt{1 + g'^2(v)}$  dir.

Galile uzayında 1. tip öteleme yüzeylerinin  $H$  ortalama eğriliği ise

$$H = \frac{g_2^2 L_{11} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}}{2W^2},$$

$$g_1 = \frac{\partial x}{\partial u} = x_u = 1, \quad g_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = x_v = 0 \quad \text{ve} \quad L_{22} = \frac{g''}{\sqrt{1 + g'^2}},$$

olduğundan

$$H = \frac{g''(v)}{2W^3} = \frac{g''(v)}{2(1 + g'^2(v))^{3/2}}$$

olarak bulunur.

**Örnek 1:** 3-boyutlu Galile uzayında

$$\varphi(u, v) = (u, v, \sin(3u) + \cos(3v)) \quad (2.13)$$



şeklinde parametrelendirilmiş 1. tip öteleme yüzeyini göz önüne alalım. Bu tür yüzeyler Şekil 2.3.1’de verilen yumurta kutusuna benzeyen yüzeylerdir. Bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliğini hesaplayalım.

Öncelikle (2.13)’de verilen yüzeyin  $u$  ve  $v$  parametrelerine göre türevleri

$$\varphi_u = (1, 0, 3\cos(3u)),$$

$$\varphi_v = (0, 1, -3\sin(3v)),$$

$$\varphi_{uu} = (0, 0, -9\sin(3u)),$$

$$\varphi_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$\varphi_{vv} = (0, 0, -9\cos(3v))$$

$x = x(u, v) = u$ ,  $y = y(u, v) = v$ ,  $z = z(u, v) = \sin(3u) + \cos(3v)$  olduğundan

$$g_1 = \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad g_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

olarak bulunur. (2.13)’de verilen yüzeyin  $u$  ve  $v$  parametresine göre birinci türevlerinin vektörel çarpımı

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 3\cos(3u) \\ 0 & 1 & -3\sin(3v) \end{vmatrix} = (0, 3\sin(3v), 1) \quad (2.14)$$

olarak hesaplanır. (2.14)’de bulunan vektörel çarpımın normu

$$W = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{1 + 9\sin^2(3v)}$$

olur.

Yüzeyin  $N$  birim normal vektörü,

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{W} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9\sin^2(3v)}} (0, 3\sin(3v), 1)$$

olarak bulunur.

Yüzeyin ikinci esas formun katsayıları,

$$\begin{aligned} L_{11} &= \left\langle \frac{\varphi_{uu}x_u - x_{uu}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle, \quad (x_u = 1, \quad x_{uu} = 0) \\ &= \left\langle (0, 0, -9\sin(3u)), \frac{(0, 3\sin(3v), 1)}{\sqrt{1 + 9\sin^2(3v)}} \right\rangle \\ &= \frac{-9\sin(3u)}{\sqrt{1 + 9\sin^2(3v)}}, \end{aligned}$$

$\varphi_{uv} = (0, 0, 0)$  ve  $x_{uv} = 0$  olduğundan

$$L_{12} = \left\langle \frac{\varphi_{uv}x_u - x_{uv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle = 0,$$

$x_u = 1, x_{vv} = 0$  olduğundan

$$\begin{aligned} L_{22} &= \left\langle \frac{\varphi_{vv}x_u - x_{vv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle \\ &= \left\langle (0, 0, -9\cos(3v)), \frac{(0, 3\sin(3v), 1)}{\sqrt{1 + 9\sin^2(3v)}} \right\rangle \\ &= \frac{-9\cos(3v)}{\sqrt{1 + 9\sin^2(3v)}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

O halde, yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K &= \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2} \\ &= \frac{-9\sin(3u)}{\sqrt{1 + 9\sin^2(3v)}} \frac{-9\cos(3v)}{\sqrt{1 + 9\sin^2(3v)}} \\ &= \frac{81\sin(3u)\cos(3v)}{(1 + 9\sin^2(3v))^2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$H$  ortalama eğriliği,

$$H = \frac{g_2^2 L_{11} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}}{2W^2}$$

formülü kullanılarak

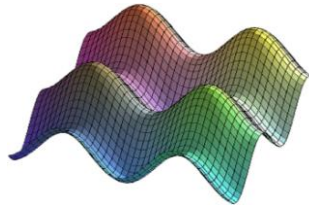
$$g_1 = \frac{\partial x}{\partial u} = x_u = 1, \quad g_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = x_v = 0 \text{ ve } L_{22} = \frac{-9\cos(3v)}{\sqrt{1 + 9\sin^2(3v)}}$$

olduğundan

$$H = \frac{\frac{-9\cos(3v)}{W}}{2W^2} = \frac{-9\cos(3v)}{2(1 + 9\sin^2(3v))^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur.

(2.13) denklemi ile verilen yüzey  $E_3$  uzayında aşağıdaki şekli gösterir.



Şekil 2.3.1: Yumurta kutusu yüzeyi.

**Örnek 2:** 3-boyutlu Galile uzayında

$$\varphi(u, v) = \left( u, v, \cosh\left(\frac{u}{3}\right) + \sin\left(\frac{v}{3}\right) \right) \quad (2.15)$$

yüzeyinin Gauss eğriliğini ve ortalama eğriliğini hesaplayalım. Bu tür yüzeyler Şekil 2.3.2’de verilen 1. tip öteleme yüzeylerdir.

(2.15)’de verilen yüzeyin  $u$  ve  $v$  parametlerine göre türevleri

$$\varphi_u = \left( 0, 1, \frac{1}{3} \sinh\left(\frac{u}{3}\right) \right),$$

$$\varphi_v = \left( 0, 1, \frac{1}{3} \cos\left(\frac{v}{3}\right) \right),$$

$$\varphi_{uu} = \left( 0, 0, \frac{1}{9} \cosh\left(\frac{u}{3}\right) \right),$$

$$\varphi_{uv} = (0, 0, 0),$$

$$\varphi_{vv} = \left( 0, 0, -\frac{1}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right) \right)$$

olarak hesaplanır.

$x = x(u, v) = u$ ,  $y = y(u, v) = v$ ,  $z = z(u, v) = \cosh\left(\frac{u}{3}\right) + \sin\left(\frac{v}{3}\right)$  olduğundan

$$g_1 = \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad g_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

olarak elde edilir.

(2.15) ile verilen yüzeyin  $u$  ve  $v$  parametresine göre birinci türevlerinin vektörel çarpımı

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \sinh\left(\frac{u}{3}\right) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \cos\left(\frac{v}{3}\right) \end{vmatrix} = \left( 0, -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{v}{3}\right), 1 \right) \quad (2.16)$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla, (2.16)’da bulunan vektörel çarpımın normu

$$W = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}$$

şeklinde bulunur. O halde, yüzeyin  $N$  birim normal vektörü

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{W} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}} \left( 0, -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{v}{3}\right), 1 \right)$$

olarak elde edilir.

Yüzeyin ikinci esas formun katsayıları

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \left\langle \frac{\varphi_{uu}x_u - x_{uu}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle, \quad (x_u = 1, \quad x_{uu} = 0) \\
 &= \left\langle \left(0, 0, \frac{1}{9} \cosh\left(\frac{u}{3}\right)\right), \frac{\left(0, -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{v}{3}\right), 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}} \right\rangle \\
 &= \frac{\frac{1}{9} \cosh\left(\frac{u}{3}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}},
 \end{aligned}$$

$\varphi_{uv} = (0, 0, 0)$  ve  $x_{uv} = 0$  olduğundan

$$L_{12} = \left\langle \frac{\varphi_{uv}x_u - x_{uv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
 L_{22} &= \left\langle \frac{\varphi_{vv}x_u - x_{vv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle, \quad (x_{vv} = 0, \quad x_u = 1) \\
 &= \left\langle \left(0, 0, -\frac{1}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right)\right), \frac{\left(0, -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{v}{3}\right), 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}} \right\rangle \\
 &= \frac{-\frac{1}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

O halde, yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği,

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2}, \\
 &= \frac{\frac{\frac{1}{9} \cosh\left(\frac{u}{3}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}} \frac{-\frac{1}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}}}{W^2} \\
 &= \frac{-\frac{1}{81} \cosh\left(\frac{u}{3}\right) \sin\left(\frac{v}{3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)\right)^2}
 \end{aligned}$$

bulunur.

$H$  ortalama eğriliği ise

$$H = \frac{g_2^2 L_{11} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}}{2W^2},$$

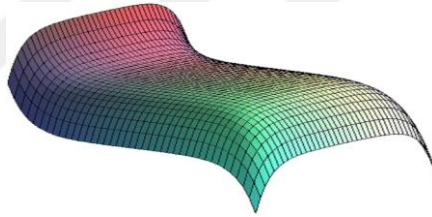
$$g_1 = \frac{\partial x}{\partial u} = x_u = 1, \quad g_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = x_v = 0, \quad L_{22} = \frac{-\frac{1}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} H &= \frac{-\frac{1}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)}} \\ &= \frac{-\frac{1}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right)}{2W^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right)}{2W^3} \\ &= \frac{-\sin\left(\frac{v}{3}\right)}{18 \left(1 + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(2.15) denklemi ile verilen yüzey,  $E_3$  uzayında aşağıdaki şekli gösterir.



Şekil 2.3.2: Öteleme yüzeyi.

#### 2.4 $G_3$ Uzayında Sabit Gauss Eğrilikli 1. Tip Öteleme Yüzeyleri

$K = \frac{f''(u)g''(v)}{(1 + g'^2(v))^2}$  Gauss eğriliğinin sabit olması ancak ve ancak:

- 1)  $f''(u) = \text{sabit} \neq 0$  ve  $\frac{g''(v)}{(1 + g'^2(v))^2} = \text{sabit} \neq 0$  olması,
- 2)  $f''(u) = 0$  veya  $\frac{g''(v)}{(1 + g'^2(v))^2} = 0$  ile mümkündür.

### 1. Durum:

$f''(u) = \text{sabit} \neq 0$  ve  $\frac{g''(v)}{(1+g'^2(v))^2} = \text{sabit} \neq 0$  olsun. O halde,

$$f''(u) = \text{sabit} = a \neq 0,$$

$$f'(u) = au + b,$$

$$\boxed{f(u) = au^2 + bu + c} \quad a, b, c \in R \quad (2.17)$$

ve  $\frac{g''(v)}{(1+g'^2(v))^2} = c_1 = \text{sabit} \neq 0$  olur. Bu hali inceleyelim:

$g'(v) = p = \frac{dg}{dv}$  ve  $g''(v) = \frac{dp}{dv}$  olmak üzere,

$$\frac{g''(v)}{(1+g'^2(v))^2} = \frac{\frac{dp}{dv}}{(1+p^2)^2} = c_1,$$

$$\int \frac{dp}{(1+p^2)^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} p + \frac{p}{2(1+p^2)}$$

olduğundan

$$\boxed{\frac{g'(v)}{1+g'^2(v)} + \tan^{-1} g'(v) = Av + B, \quad A, B \in R} \quad (2.18)$$

elde edilir.

Dolayısıyla, 1. durumda yüzeyin denklemi (2.17) ve (2.18) denklemlerinde elde edilen  $f(u)$  ve  $g(v)$  ile belirlenir.

Öteleme yüzeyleri için  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrileri  $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$  ve  $\beta(v) = (0, v, g(v))$  olarak alınmıştır.  $\beta$  eğrisini  $s$  yay uzunluğu parametresine göre yeniden parametrize edersek,  $h'^2(s) + k'^2(s) = 1$  olmak üzere  $\beta(s) = (0, h(s), k(s))$  olarak elde edilir. O halde,  $g(v) = k(s)$  olarak bulunur ve dolayısıyla  $g''(v) = k''(s)$  olur. Bu yüzden Gauss eğriliği  $K = f''(u)k''(s)$  olarak elde edilir.

Gauss eğriliği ve  $f''(u)$  sıfırdan farklı sabit olduğundan  $K = f''(u)k''(s) = \text{sabit}$  olur. Dolayısıyla  $k''(s) = A = \text{sabit}$  olarak bulunur. Bu yüzden

$$k(s) = \frac{1}{2}As^2 + Bs + C, \quad A, B, C \in R \quad (2.19)$$

olarak bulunur.  $h'^2(s) + k'^2(s) = 1$  olduğundan  $h(s) = \int \sqrt{1 - (As + B)^2}$  olur.

$As + B = \text{sint}$  dönüşümü yapılırsa

$$h(s) = \frac{As + B}{2A} \sqrt{1 - (As + B)^2} + \frac{1}{2A} \arcsin(As + B) + C_1 \quad (2.20)$$

elde edilir. Burada  $A, B, C, C_1$  reel sabitlerdir.

O halde, elde edilen yüzey Galile uzayında parabolik çemberlere sahip özel bir öteleme yüzeyidir.

## 2. Durum:

$$f''(u) = 0 \text{ veya } \frac{g''(v)}{(1 + g'^2(v))^2} = 0 \text{ olsun.}$$

O halde,

$$f(u) = au + b$$

veya

$$g(v) = cv + d, \quad (c, d \in R)$$

olur. Dolayısıyla yüzey

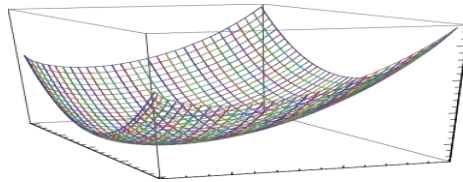
$$z(u, v) = f(u) + cv + d$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu yüzey silindirik bir yüzeydir.

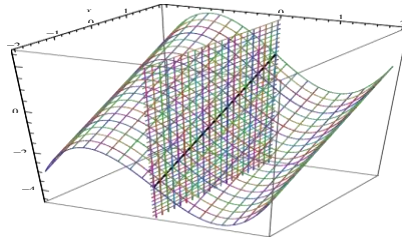
O halde aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 2.4.1:** Gauss eğrilikli 1.tip öteleme yüzeyi ise bu  $S$  yüzeyi  $f(u) = au^2 + bu + c$ ;  $a, b, c \in R$  ve sırasıyla (2.19), (2.20)'de  $k$  ve  $h$  ile verilen özel bir yüzeye kongruent olur ya da bu  $S$  yüzeyi izotropik veya izotropik olmayan doğrultmanlara sahip sıfır Gauss eğrilikli bir silindirik yüzeydir [7].

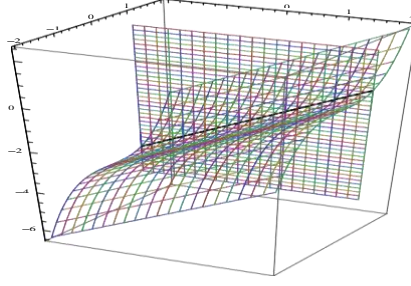
Teorem 2.4.1 ile verilen yüzeyle ilgili şekiller:



**Şekil 2.4.1:** Sıfırdan farklı sabit Gauss eğrilikli 1. tip öteleme yüzeyi.



**Şekil 2.4.2 :** Bir izotropik düzlemde bulunan izotropik olmayan bir silindirik yüzey.



**Şekil 2.4.3:** Bir Öklidyen düzlemde bulunan izotropik bir silindirik yüzey.

## 2.5 $G_3$ Galile Uzayında Sabit Ortalama Eğrilikli 1. Tip Öteleme Yüzeyleri

Galile uzayında 1. tip öteleme yüzeyinin ortalama eğriligi

$$H = \frac{g''(v)}{2(1 + g'^2(v))^{\frac{3}{2}}}$$

dır.

**Teorem 2.5.1:** Eğer  $S$  yüzeyi Galile uzayında sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli 1. tip öteleme yüzeyi ise o zaman  $S$  yüzeyi

$$z = f(u) + \frac{1}{2H} \sqrt{1 - (2Hv + c_1)^2} + c_2, \quad (c_1, c_2 = \text{sabit.})$$

şeklindedir [7].

**İspat:**

$$H = \frac{g''(v)}{2(1+g'^2(v))^{\frac{3}{2}}} = c = \text{sabit} \neq 0 \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow g'(v) = p(v) \quad \text{ve} \quad g''(v) = p'(v) = \frac{dp}{dv} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\frac{p dp}{(1 + p^2(v))^{\frac{3}{2}}} = 2c dv \quad (2.21)$$

elde edilir.

(2.21) denkleminde  $\left[ \begin{array}{l} 1 + p^2 = t \\ 2p dp = dt \end{array} \right]$  dönüşümü yapılır ve her iki tarafın integrali alınırsa

$$-\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = 2cv + c_1, \quad (c_1 = \text{sabit})$$

ve buradan



$$p^2 = \frac{1}{(2cg + c_1)^2} - 1$$

bulunur. O halde,

$$\frac{dg}{dv} = \sqrt{\frac{1 - (2cg + c_1)^2}{(2cg + c_1)^2}}$$

denkleminde

$$\int \frac{2cg + c_1}{\sqrt{1 - (2cg + c_1)^2}} dg = \int dv \quad (2.22)$$

elde edilir. (2.22) integralinde  $\left[ \begin{array}{l} 2cg + c_1 = t \\ 2c dg = dt \end{array} \right]$  dönüşümü yapılırsa

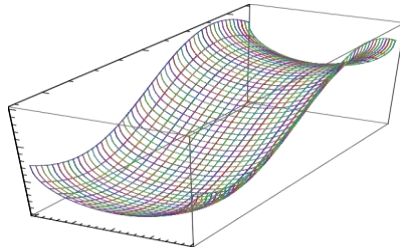
$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \int \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt &= \int dv \\ \Rightarrow -\sqrt{1 - t^2} &= 2cv + c_2, \quad (c_2 = \text{sabit}) \\ \Rightarrow 1 - t^2 &= (2cv + c_2)^2 \\ \Rightarrow t = 2cg + c_1 &= \sqrt{1 - (2cv + c_2)^2} \\ \Rightarrow g(v) &= -\frac{c_1}{2c} + \frac{\sqrt{1 - (2cv + c_2)^2}}{2c} \end{aligned}$$

bulunur. O halde,  $S$  yüzeyi

$$\begin{aligned} z &= f(u) + g(v) \\ &= f(u) + \frac{\sqrt{1 - (2Hv + c_2)^2}}{2H} - \frac{c_1}{2c} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Aşağıdaki şekil sabit ortalama eğrilikli bir yüzeye aittir.



**Şekil 2.5.1:**  $f(u) = \sin u$  olduğunda elde edilen sabit ortalama eğrilikli yüzeyin öteleme yüzeyi.

**Teorem 2.5.2:** Eğer  $S$  yüzeyi Galile uzayında sıfır ortalama eğrilikli 1. tip öteleme yüzeyi ise  $S$  yüzeyi

$$z = f(u) + av + b, \quad (a, b \in R)$$

izotropik doğrultmanlara sahip bir silindirik yüzeye kongruenttir (ve bu nedenle  $K = 0$ ) [7].

**İspat:**

1. tip öteleme yüzeylerinde ortalama eğrilik

$$H = \frac{g''(v)}{2(1+g'^2(v))^{\frac{3}{2}}}$$

olduğundan ortalama eğrilik sıfırken yani  $H = 0$  iken  $g''(v) = 0$  olur ve dolayısıyla  $g(v) = av + b$ ,  $a, b \in R$  olarak bulunur.

O halde, Galile uzayında sıfır ortalama eğrilikli 1. tip öteleme yüzeyi

$$z = f(u) + av + b, \quad (a, b \in R)$$

olarak ifade edilir.

## 2.6 $G_3$ Galile Uzayında Sabit Gauss Eğrilikli 2. Tip Öteleme Yüzeyleri

3-boyutlu Galile uzayında 2. tip öteleme yüzeyi

$$\varphi(u, v) = (u + v, g(v), f(u)) \quad (2.23)$$

şeklinde parametrelendirilmiş olsun.

(2.23)'de verilen yüzeyin  $u$  ve  $v$  bağımsız değişkenlerine göre türevleri

$$\varphi_u = (1, 0, f'(u)),$$

$$\varphi_v = (1, g'(v), 0),$$

$$\varphi_{uu} = (0, 0, f''(u)),$$

$$\varphi_{uv} = (0, 0, 0) = \varphi_{vu},$$

$$\varphi_{vv} = (0, g''(v), 0)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$x = x(u, v) = u + v, \quad y = y(u, v) = g(v), \quad z = z(u, v) = f(u)$$

olduğundan

$$g_1 = \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad g_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = 1$$

olarak bulunur.

(2.23) ile verilen yüzeyin  $u$  ve  $v$  bağımsız değişkenlerine göre birinci türevlerinin vektörel çarpımı

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'(u) \\ 1 & g'(v) & 0 \end{vmatrix} = (0, f'(u), g'(v)) \quad (2.24)$$

dır. (2.24)'de bulunan vektörel çarpımın normu

$$W = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{f'^2(u) + g'^2(v)}$$

olur. Yüzeyin  $N$  birim normal vektörü

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{W} = \frac{1}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} (0, f', g')$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin ikinci esas formunun katsayıları;

$$\begin{aligned} L_{11} &= \left\langle \frac{\varphi_{uu}x_u - x_{uu}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle, \quad (x_u = 1, \quad x_{uu} = 0) \\ &= \left\langle (0, 0, f''), \frac{(0, f', g')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} \right\rangle \\ &= \frac{f''(u)g'(v)}{\sqrt{f'^2(u) + g'^2(v)}} = \frac{f''(u)g'(v)}{W}, \end{aligned}$$

$\varphi_{uv} = (0, 0, 0)$ ,  $x_{uv} = 0$  olduğundan

$$L_{12} = \left\langle \frac{\varphi_{uv}x_u - x_{uv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle = 0,$$

$\varphi_{vv} = (0, g'', 0)$ ,  $x_u = 1$ ,  $x_{vv} = 0$  olduğundan

$$\begin{aligned} L_{22} &= \left\langle \frac{\varphi_{vv}x_u - x_{vv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle \\ &= \left\langle (0, g'', 0), \frac{(0, f', g')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} \right\rangle = \frac{f'(u)g''(v)}{W} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

O halde 2. tip öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2}$$
$$= \frac{f'(u)f''(u)g'(v)g''(v)}{W^4}$$

olarak bulunur.

$H$  ortalama eğriliği ise

$$H = \frac{g_2^2 L_{11} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}}{2W^2}$$

formülü kullanılarak

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 1, \quad L_{12} = 0$$

olduğundan

$$H = \frac{L_{11} + L_{22}}{2W^2}$$

olarak bulunur. O halde, ortalama eğrilik

$$H = \frac{f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v)}{2W^3}$$

olarak elde edilir.

Dolayısıyla, 2. tip bir öteleme yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla,

$$K = \frac{f'(u)f''(u)g'(v)g''(v)}{W^4},$$
$$H = \frac{f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v)}{2W^3}$$

olarak bulunur. Burada,  $W^2 = f'^2(u) + g'^2(v)$  dir.

**1. Durum:** Gauss eğriliği sıfır olsun. Yani,

$$K = \frac{f'(u)f''(u)g'(v)g''(v)}{W^4} = 0$$

olsun. Gauss eğriliğinin sıfıra eşit olması ancak ve ancak  $f''(u) = 0$  ya da  $g''(v) = 0$  durumlarıyla gerçekleşir .

Bu yüzden  $f(u) = au + b$  ya da  $g(v) = cv + d$ ,  $a, b, c, d \in R$  olur. Dolayısıyla elde edilen yüzey izotropik olmayan doğrultmanlara sahip bir silindirik yüzeydir.

**2. Durum:** Gauss eğriliği sıfırdan farklı sabit olsun.

Eğer  $K = \frac{1}{W^4} f'(u)f''(u)g'(v)g''(v)$  denkleminde  $f'(u)f''(u)$  yerine  $e(u)$ ,  $g'(v)g''(v)$  yerine  $h(v)$  ve  $W^2$  yerine  $f'^2(u) + g'^2(v)$  yazılırsa

$$K = \frac{e(u)h(v)}{(f'^2(u) + g'^2(v))^2} \quad (2.25)$$

olarak bulunur. (2.25) denkleminin sırasıyla  $u$  ve  $v$ 'ye göre türevi

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial u} &= h(v) \left[ \frac{e'(u)w^4}{w^8} - \frac{4e^2(u)w^2}{w^8} \right] = 0 \\ \Rightarrow h(v) \frac{W^2 e'(u) - 4e^2(u)}{W^6} &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial v} &= e(u) \left[ \frac{h'(v)e'w^4 - 2w^2 2g'(v)g''(v)h(v)}{w^8} \right] = 0 \\ \Rightarrow e(u) \frac{W^2 h'(v) + 4h^2(v)}{W^6} &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

olarak bulunur.

(2.26) ve (2.27)'de bulunan denklemlerin aynı anda sıfır olması ancak ve ancak  $e(u) = 0$  ya da  $h(v) = 0$  olmasıyla gerçekleşir. Bu yüzden

$$f(u) = au + b, \quad (a, b \in R) \quad \text{ya da} \quad g(v) = cv + d, \quad (c, d \in R)$$

olur.

O halde, her iki durumda da öteleme eğrileri izotropik olmayan doğrular olarak bulunur ve böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 2.6.1:** Eğer  $S$  yüzeyi Galile uzayında sabit Gauss eğrilikli 2. tip bir öteleme yüzeyi ise  $S$  yüzeyi izotropik olmayan doğrultmanlara sahip bir silindirik yüzeye kongruent olur (ve nedenle  $K = 0$ ) [7].

## 2.7 $G_3$ Galile Uzayında Sabit Ortalama Eğrilikli 2. Tip Öteleme Yüzeyleri

Üç boyutlu Galile uzayında  $H$  ortalama eğriliği

$$H = \frac{g_2^2 L_{11} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}}{2W^2}$$

formülünden hesaplanır.

$G_3$  Galile uzayında

$$\varphi(u, v) = (u + v, g(v), f(u))$$

şeklinde parametrelendirilen 2. tip öteleme yüzeyi için ortalama eğrilik,

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 1, \quad L_{12} = 0,$$

$$L_{11} = \frac{f''(u)g'(v)}{W},$$

$$L_{22} = \frac{f'(u)g''(v)}{W}$$

olduğundan

$$H = \frac{L_{11} + L_{22}}{2W^2}$$

bulunur. Buradan

$$H = \frac{f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v)}{2W^3}$$

elde edilir. Burada  $W^2 = f'^2(u) + g'^2(v)$  dır.

Yüzeyin  $H$  ortalama eğriliği sıfır ise

$$f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v) = 0$$

bulunur.  $f'(u) \neq 0$  ve  $g'(v) \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{g''(v)}{g'(v)}$$

elde edilir. O halde, bu denklem ancak sabit bir  $c \in \mathbb{R}$  için

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{g''(v)}{g'(v)} = c$$

sağlanır.

Eğer  $c = 0$  ise o zaman  $f''(u) = 0$ ,  $g''(v) = 0$  olur ve izotropik bir düzlem oluşturur.

Eğer  $c \neq 0$  ise o zaman

$$f(u) = \frac{1}{c}e^{cu} + c_1 \quad \text{ve} \quad g(v) = \frac{1}{c}e^{-cv} + c_2, \quad (c, c_1, c_2 \text{ sabitler})$$

olarak bulunur. O halde, yüzey

$$x(u, v) = \left(u + v, \frac{1}{c}e^{-cv} + c_2, \frac{1}{c}e^{cu} + c_1\right)$$

şeklinde ifade edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 2.7.1:** Eğer  $S$  yüzeyi Galile uzayında sıfır ortalama eğriliikli 2. tip öteleme yüzeyi ise o zaman  $S$  yüzeyi izotropik doğrultmanlara sahip bir regle yüzeye kongruenttir, yani silindirik yüzey değildir [7].

2. tip öteleme yüzeylerinde ortalama eğrilik şu şekilde verilir:

$$H = \frac{1}{2W^3}(f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v)) \quad (2.28)$$

Şimdi, sıfırdan farklı sabit bir ortalama eğriliğe sahip olan 2. tip Galile uzaylarını inceleyelim.

Yüzeyin  $H$  ortalama eğriliğinin sıfırdan farklı sabit olduğunu varsayalım. Bu durumda (2.28) denkleminde

$$f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v) = 2W^3 H \quad (2.29)$$

elde edilir.

(2.29) denklemi  $u$ 'ya göre türetilirse

$$f'''g' + f''g'' = 6Wf'f''H \quad (2.30)$$

elde edilir. (2.30) denkleminin her iki tarafı  $v$ 'ye göre türetilirse

$$(f'''g'' + f''g''')W = 6Hf'f''g'g''$$

bulunur.  $f''(u) \neq 0$  ve  $g''(v) \neq 0$  olduğundan

$$6H = \left(\frac{f'''}{f''} + \frac{g'''}{g''}\right) \sqrt{\frac{1}{f'^2} + \frac{1}{g'^2}} \quad (2.31)$$

elde edilir. (2.31) denkleminin her iki tarafının  $u$ 'ya göre türevi alınır

$$\left(\frac{f'''}{f''}\right)' \sqrt{\frac{1}{f'^2} + \frac{1}{g'^2}} - \left(\frac{f'''}{f''}\right) \frac{f''}{f'^3 \sqrt{\frac{1}{f'^2} + \frac{1}{g'^2}}} = 0$$

ya da;

$$\left(\frac{f'''}{f''}\right)' \sqrt{\left(\frac{1}{f'^2} + \frac{1}{g'^2}\right)^3} = 6H \frac{f''}{f'^3} \quad (2.32)$$

olarak bulunur. (2.32) denkleminin her iki tarafının  $v$ 'ye göre türevi alınır,

$f''(u) \neq 0$  ile  $g''(v) \neq 0$  olduğundan  $\left(\frac{f'''}{f''}\right)' = 0$  olur ve dolayısıyla  $H = 0$  olur.

Bu durumda  $H \neq 0$  olmasıyla çelişir. Bu yüzden  $f''(u) = 0$  ya da  $g''(v) = 0$  dır.

Varsayalım ki  $f''(u) = 0$  olsun. Dolayısıyla  $f'(u) = a$ ,  $a \in R$  olur.

O halde,  $g(v)$  fonksiyonu

$$ag''(v) = 2H(a^2 + g'^2(v))^{3/2}$$

diferansiyel denklemini sağlar.  $g'(v)$  yerine  $h(v)$  yazılırsa

$$h(v) = \frac{2\alpha H v + c}{\sqrt{(1 - (2\alpha H v + c))^2}}, \quad c \in R$$

ve dolayısıyla

$$g(v) = -\frac{1}{2aH} \sqrt{(1 - (2\alpha H v + c))^2} + c_1, \quad (c, c_1 \in R)$$

elde edilir.

O halde, elde edilen yüzey ötelenmiş bir  $\beta(v) = (v, g(v), 0)$  eğrisi üzerinde bulunan silindirik yüzeylerin izotropik olmayan doğrultmanlara sahip özel bir formudur.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

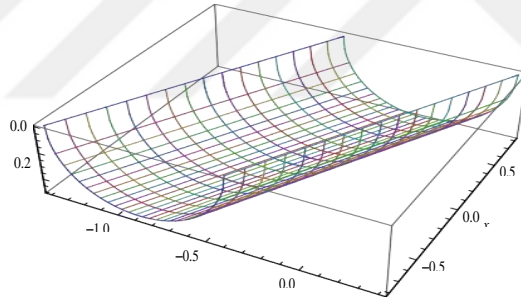
**Teorem 2.7.2:** Eğer  $S$  yüzeyi Galile uzayında sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli

2. tip bir öteleme yüzeyi ise o zaman bu  $S$  yüzeyi

$$x(u, v) = \left( u + v, -\frac{1}{2aH} \sqrt{1 - (2aHv + c)^2} + d, au + b \right), \quad (a, b, c, d \in R)$$

bir silindirik yüzeye kongruenttir [7].

Aşağıda verilen şekil sıfırdan farklı ortalama eğrilige sahip 2. tip bir öteleme yüzeyidir.



**2.7.1:** Sabit ortalama eğrilikli 2. tip bir öteleme yüzeyi.



### 3. ÜÇ BOYUTLU GALİLE UZAYINDA KOORDİNATLARI SONLU TIPTEN OLAN ÖTELEME YÜZEYLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde, 3-boyutlu  $G_3$  Galile uzayında koordinatları sonlu tipten olan yani  $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ ,  $\lambda_i \in R$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) koşulunu sağlayan öteleme yüzeyleri ele alınmış ve bu tip yüzeylerin sınıflandırılması yapılmıştır.

#### 3.1 Sonlu Tipten Koordinatlara Sahip Olan Yüzeyler

$M$ ,  $E^m$  uzayının  $n$ -boyutlu bir alt manifoldu olsun.  $M$  alt manifoldunun  $E^m$  Öklid uzayındaki  $x$  yer vektörü,  $\Delta x_{i_j} = \lambda_{i_j} x_{i_j}$ ,  $\lambda_{i_j} \in R$ ,  $\lambda_{i_1} < \dots < \lambda_{i_k}$ ,  $x_{i_j}$  ( $j=1, \dots, k$ ), olmak üzere

$$x = x_0 + x_{i_1} + \dots + x_{i_k}$$

şeklinde ayrıştırılabilirse  $M$  alt manifolduna sonlu tipten alt manifold denir [8]. Burada  $x_0$  sabit bir vektör,  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  sabit olmayan tasvirler ve  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$  reel değerli sabitlerdir. Eğer  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$  özdeğerlerinin hepsi birbirinden farklı ise  $M$  alt manifolduna  $k$ -tipinden alt manifold denir. Eğer  $k$  sonsuz ise  $M$  sonsuz tipten alt manifold olur. Bununla beraber  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$  özdeğerlerinin biri sıfır ise  $M$  manifolduna, sıfırlı  $k$ -tipinden alt manifold denir.

Takahashi [9],  $E^m$  uzayının  $n$ -boyutlu bir alt manifoldunun 1-tip olması için yeterli ve şart koşulun ya  $E^m$  uzayının minimal bir alt manifoldu ya da bazı hiperkürelerin minimal bir alt manifoldu olmasını gerektiğini ifade etmiştir. Başka bir deyişle,

$$\Delta x = \lambda x$$

denkleminin çözümleri,  $E^m$  uzayının ya minimal alt manifoldları ya da bazı hiperkürelerin minimal alt manifoldlarıdır.

Takahashi'nin teoreminin genelleştirilmiş olarak,  $M$  alt manifoldunun koordinat fonksiyonları  $M$ 'nin laplasyenin özfonksiyonları olarak düşünülebilir. Yani  $M$  alt manifoldunun koordinat fonksiyonları  $x_i$  ( $i=1, \dots, m$ )  $\Delta$ 'nın özfonksiyonlarıdır.

Başka bir ifadeyle,  $\Delta x_i = \lambda_i x_i$  koşulunu sağlayan manifoldlara sonlu tipten koordinatları olan alt manifoldlar denir [10].

### 3.2 3-Boyutlu Galile Uzayında Laplace Operatörü

3-boyutlu Galile uzayında şu şekilde parametrize edilmiş bir  $M$  yüzeyi

$$x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \quad (3.1)$$

göz önüne alalım.

Laplace operatörü  $\Delta$ ,  $M$  yüzeyi üzerinde

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \right)$$

ile tanımlanır. Burada  $G = \det(g_{ij})$ ,  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$  ve  $g_{ij}$   $M$  metrik tensörün bileşenleridir.

$g_{ij}$  ve  $g^{ij}$  matris şeklinde

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \frac{1}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir.

Ayrıca  $g_{ij}$  ve  $g^{ij}$  arasında ilişki

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$$

ile verilir.

(3.1) ile verilen  $M$  yüzeyi için 1. esas form  $I$ ;

$$g_{11} = \langle x_u, x_u \rangle, \quad g_{12} = \langle x_u, x_v \rangle, \quad g_{21} = \langle x_v, x_u \rangle, \quad g_{22} = \langle x_v, x_v \rangle \quad \text{ve}$$

$$x_u = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} \quad \text{olmak üzere}$$

$$I = g_{11} du^2 + 2g_{12} dudv + g_{22} dv^2$$

olarak tanımlanır.

### 3.3 $G_3$ Galile Uzayında Koordinatları Sonlu Tipten Olan Öteleme Yüzeyler

Varsayalım ki bir  $M$  yüzeyi bir izotropik olmayan  $a(u) = (u, 0, f(u))$  eğrisi ve bir izotropik olan  $\beta(v) = (0, v, g(v))$  eğrisi tarafından üç boyutlu Galile uzayında üretilmiş bir öteleme yüzeyi olsun. O zaman bu yüzey

$$x(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)) \quad (3.2)$$

olarak parametrelendirilir.

Bu yüzeyin  $g_{ij}$  bileşenleri, sırasıyla,

$$g_{11} = \langle (1, 0, f'(u)), (1, 0, f'(u)) \rangle = 1,$$

$$g_{12} = \langle (1, 0, f'(u)), (0, 1, g'(v)) \rangle = 0 = g_{21},$$

$$g_{22} = \langle (0, 1, g'(v)), (0, 1, g'(v)) \rangle = 1 + g'^2(v)$$

olarak bulunur. Galile uzayında (3.1) denklemi ile verilen yüzey üzerinde Laplesyenin formülünün açık ifadesi

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \\ \Delta &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \sqrt{G} g^{1j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \sqrt{G} g^{2j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} g_{22} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} (-g_{12}) \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} (-g_{21}) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} g_{11} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklindedir.

$$G = \det g_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + g'^2(v) \end{vmatrix} = 1 + g'^2(v) = w, \quad \sqrt{G} = \sqrt{w}$$

$g_{22} = 1 + g'^2(v)$ ,  $g_{12} = 0 = g_{21}$  ve  $g_{11} = 1$  olduğundan (3.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{w}} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} w \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \quad (3.4)$$

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{w}} \left( \sqrt{w} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \right) \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{\sqrt{w}} \left( -\frac{2g'g''}{2g^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{w} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \quad (3.6)$$

bulunur. Dolayısıyla  $M$  yüzeyinin Laplasyeni

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{g'g''}{w^2} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{w} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \quad (3.7)$$

olarak bulunur.

(3.2) ve (3.7)'yi kullanarak,

$$\Delta x_1 = \Delta u = -\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{g'g''}{w^2} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{w} \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 0, \quad (3.8)$$

$$\Delta x_2 = \Delta v = -\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} + \frac{g'g''}{w^2} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{g'g''}{w^2}, \quad (3.9)$$

$$\Delta x_3 = \Delta(f(u) + g(v)) = -f'' + \frac{g'^2 g''}{w^2} - \frac{1}{w} g'' \quad (3.10)$$

denklemleri elde edilir.

İlk olarak  $M$  yüzeyinin  $\Delta x = 0$  koşulunu sağladığını varsayalım. Bu koşulu sağlayan yüzeyler harmonik yüzey olarak adlandırılır.

(3.9) ve (3.10)'da elde edilen denklemler kullanılarak

$$\frac{g'g''}{w^2} = 0, \quad -f'' + \frac{g'^2 g''}{w^2} - \frac{1}{w} g'' = 0$$

bulunur. Bu denklemlerden yararlanarak,  $g' = 0$  ve  $f'' = 0$  olduğu açıkça görülebilir.

Bu yüzden  $M$  yüzeyi.

$$x(u, v) = (u, v, au + b), \quad a, b \in R$$

şeklinde parametrize edilebilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 3.1:**  $M$ , 3-boyutlu Galile uzayında  $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ ,  $\lambda_i \in R$  koşulunu sağlayan bir öteleme yüzeyi olsun. Eğer  $M$  yüzeyi harmonik bir yüzey ise,  $M$  yüzeyi bir düzlemin açık bir parçasıdır [11].

### 3.4 $G_3$ Galile Uzayında Koordinatları $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ Koşulunu Sağlayan Öteleme Yüzeyler

(3.2) ile tanımlanan  $M$  yüzeyi için

$$\Delta x_i = \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in R$$

koşulunu sağladığını kabul edelim. (3.8), (3.9) ve (3.10)'da elde edilen denklemler kullanılarak,

$$\Delta x_1 = \Delta u = 0,$$

$$\Delta x_2 = \Delta v = \frac{g'g''}{w^2},$$

$$\Delta x_3 = \Delta(f(u) + g(v))$$

denklemleri bulunur. Yukarıda bulunan denklemlerden yararlanarak

$$\Delta u = 0,$$

$$\frac{g'g''}{w^2} = \lambda_2 v,$$

$$-f'' + \frac{g'^2 g''}{w^2} - \frac{1}{w} g'' = \lambda_3 (f + g)$$

elde edilir. O halde,

$$g'g'' = \lambda_2 w^2 v, \quad (3.11)$$

$$f''w^2 - g'^2 g'' + g''w = -\lambda_3 w^2 (f + g) \quad (3.12)$$

bulunur. (3.12) denklemi  $u$ 'ya göre türetilirse

$$f'''w^2 = -\lambda_3 w^2 f',$$

$$f''' + \lambda_3 f = 0$$

elde edilir.

1)  $\lambda_3 = 0$  ise  $f''' = 0$  olur ve bunun çözümü

$$f(u) = a_1 u^2 + a_2 u + a_3, \quad a_1, a_2, a_3 \in R \quad (3.13)$$

olarak bulunur.

2)  $\lambda_3 = c^2 > 0$  ise;

$$f''' + c^2 f' = 0,$$

$$\begin{aligned}
f(u) &= e^{mu}, \\
f' &= me^{mu}, \\
f'' &= m^2 e^{mu}, \\
f''' &= m^3 e^{mu}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla,

$$(m^3 + c^2 m) e^{mu} = 0,$$

$$m(m^2 + c^2) = 0,$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = ic, \quad m_3 = -ic$$

olarak elde edilir.

Bu yüzden genel çözüm,

$$f(u) = b_1 + b_2 \cos(cu) + b_3 \sin(cu)$$

veya

$$f(u) = -\frac{b_1}{c} \cos(cu + b_2) \quad (3.14)$$

elde edilir.

3)  $\lambda_3 = -c^2 < 0$  ise;

$$f''' - c^2 f' = 0,$$

$$f(u) = e^{mu},$$

$$f' = me^{mu},$$

$$f'' = m^2 e^{mu},$$

$$f''' = m^3 e^{mu}$$

olur. O halde,

$$(m^3 - c^2 m) e^{mu} = 0,$$

$$m(m^2 - c^2) = 0$$

ve buradan

$$m_1 = 0, \quad m_2 = c, \quad m_3 = -c$$

bulunur. O halde, genel çözüm

$$f(u) = c_1 + c_2 e^{cu} + c_3 e^{-cu} \quad (3.15)$$

olarak bulunur.

$$\cosh(cu) = \frac{e^{cu} + e^{-cu}}{2} \quad \text{ve} \quad \sinh(cu) = \frac{e^{cu} - e^{-cu}}{2}$$

olduğundan

$$e^{cu} = \cosh(cu) + \sinh(cu), \quad (3.16)$$

$$e^{-cu} = \cosh(cu) - \sinh(cu)$$

elde edilir.

(3.16) ile verilen denklemler (3.15)'de yerine yazılırsa

$$f(u) = c_1 + (c_2 + c_3) \cosh(cu) + (c_2 - c_3) \sinh(cu)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla  $f(u)$ 'nin genel çözümü

$$f(u) = \frac{b_3}{c} \cosh(cu + b_4) \quad (3.17)$$

olur. Burada  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ )  $\in R$  ve  $c$  sıfırdan farklı sabitlerdir.

Şimdi  $g(v)$  denkleminin genel çözümünü bulalım. (3.11) ile verilen denklemde  $w = 1 + g'^2$  yerine konursa

$$g' g'' = \lambda_2 (1 + g'^2)^2 v$$

elde edilir. Bu denkleminde  $g' = p = \frac{dg}{dv}$  alınır ve  $g'' = \frac{dp}{dv}$  yerine konursa

$$p dp = \lambda_2 v (1 + p^2)^2 dv$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınır

$$\int \frac{p}{(1+p^2)^2} dp = \int \lambda_2 v dv$$

$$-\frac{1}{2(1+p^2)} = \lambda_2 \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2} d_1,$$

$$1 + p^2 = \frac{1}{d_1 - \lambda_2 v^2},$$

$$p^2 = \frac{1 - d_1 + \lambda_2 v^2}{d_1 - \lambda_2 v^2} \quad (3.18)$$

olarak bulunur. Buradan

$$p = \sqrt{\frac{1 - d_1 + \lambda_2 v^2}{d_1 - \lambda_2 v^2}}$$

olarak elde edilir.  $g' = p = \frac{dg}{dv}$  olduğundan

$$\frac{dg}{dv} = \sqrt{\frac{1 - d_1 + \lambda_2 v^2}{d_1 - \lambda_2 v^2}} \quad (3.19)$$

olur. O halde,

$$g(v) = \int \sqrt{\frac{1 - d_1 + \lambda_2 v^2}{d_1 - \lambda_2 v^2}} dv + d_2, \quad d_1, d_2 \in R \quad (3.20)$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla, aşağıdaki teorem ifade edilir:

**Teorem 3.2:**  $M$  yüzeyi Galile uzayında (3.2) ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun ve  $\Delta x_i = \lambda_i x_i$  koşulunu sağlasın. O zaman  $M$  yüzeyi, (3.13), (3.14), (3.17) denklemleri ile verilen  $f(u)$  ve (3.20) denklemi ile verilen  $g(v)$  ile üretilen bir düzleme ya da özel bir yüzeye kongruenttir [11].



## 4. ÜÇ BOYUTLU GALİLE UZAYINDA FACTORABLE YÜZEYLER

Bu bölümde, önce üç boyutlu Galile uzayında sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip olan factorable yüzeyleri daha sonra ise  $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ ,  $\lambda_i \in R$  koşulunu sağlayan harmonik factorable yüzeyleri inceledik.

### 4.1 Factorable Yüzeylerin Tanımı

3-boyutlu Galile uzayında  $M$  yüzeyi

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

olmak üzere, eğer

$$z = f(x)g(y) \text{ veya } y = f(x)g(z) \text{ veya } x = f(y)g(z)$$

ise  $M$  yüzeyine factorable yüzey denir. Bu yüzeyler sırasıyla; birinci, ikinci ve üçüncü tip factorable yüzeyler olarak adlandırılır.

### 4.2 $G_3$ Galile Uzayında Factorable Yüzeylerin Gauss ve Ortalama Eğrilikleri

$G_3$  Galile uzayında birinci tip bir factorable yüzey

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u)g(v)) \quad (4.1)$$

olarak parametrelendirilmiş olsun.

Bu yüzeyin sırasıyla  $u$  ve  $v$  değişkenlerine göre türevleri

$$\varphi_u = (1, 0, f'(u)g(v)),$$

$$\varphi_v = (0, 1, f(u)g'(v)),$$

$$\varphi_{uu} = (0, 0, f''(u)g(v)),$$

$$\varphi_{vv} = (0, 0, f(u)g''(v)),$$

$$\varphi_{uv} = (1, 0, f'(u)g'(v))$$

olarak bulunur.

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v \text{ ve } z(u, v) = f(u)g(v)$$

olarak alındığında  $g_i = x_{,i}$  formülünden  $g_1 = 1, \quad g_2 = 0$  olur.

(4.1)'de verilen yüzeyin  $u$  ve  $v$ 'ye göre alınmış birinci türevlerinin vektörel çarpımı

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'g \\ 0 & 1 & fg' \end{vmatrix} = (0, -fg', 1) \quad (4.2)$$

olarak bulunur. O halde, (4.2)'de bulunan vektörel çarpımın normu,

$$W = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{1 + f^2 g'^2}$$

şeklinde elde edilir. Yüzeyin  $N$  birim normal vektörü,

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{W} = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2 g'^2}} (0, -fg', 1)$$

olarak hesaplanır.

Yüzeyin ikinci esas formunun katsayıları

$$L_{11} = \left\langle \frac{\varphi_{uu}x_u - x_{uu}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle, \quad (x_u = 1, \quad x_{uu} = 0)$$

$$= \langle (0, 0, f''g), \frac{1}{\sqrt{1 + f^2 g'^2}} (0, -fg', 1) \rangle$$

$$= \frac{f''g}{\sqrt{1 + f^2 g'^2}} = \frac{f''g}{W},$$

$$L_{12} = \left\langle \frac{\varphi_{uv}x_u - x_{uv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle, \quad (x_u = 1, \quad x_{uv} = 0)$$

$$= \langle (1, 0, f'g'), \frac{1}{\sqrt{1 + f^2 g'^2}} (0, -fg', 1) \rangle$$

$$= \frac{f'g'}{\sqrt{1 + f^2 g'^2}} = \frac{f'g'}{W},$$

$$L_{22} = \left\langle \frac{\varphi_{vv}x_u - x_{vv}\varphi_u}{x_u}, N \right\rangle,$$

$$\begin{aligned}
L_{22} &= \langle (0,0, fg''), \frac{1}{\sqrt{1+f^2g'^2}} (0, -fg', 1) \rangle \\
&= \frac{fg''}{\sqrt{1+f^2g'^2}} = \frac{fg''}{W}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. O halde Gauss eğriliği,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2} \\
&= \frac{\left(\frac{f''g}{W}\right)\left(\frac{fg''}{W}\right) - \left(\frac{f'g'}{W}\right)^2}{W^2} \\
&= \frac{fgf''g'' - f'^2g'^2}{W^4}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada  $W = \sqrt{1+f^2g'^2}$  dır.

Ortalama eğrilik,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{g_2^2L_{11} - 2g_1g_2L_{12} + g_1^2L_{22}}{2W^2}, \quad g_1 = 1 \text{ ve } g_2 = 0, \\
&= \frac{fg''}{2W^3}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

1)  $H = 0$  ise  $g'' = 0$  olur. (Yayınlanmamış olmakla birlikte Ayla Erdur'un yüksek lisans tez çalışmasında minimal durum incelenmiştir.)

O halde,

$$g'(v) = c_1 = \text{sabit},$$

$$g(v) = c_1v + c_2$$

bulunur. Dolayısıyla yüzey

$$z = f(u)(c_1v + c_2)$$

şeklinde ifade edilir.

2)  $H = c = \text{sabit} \neq 0$  ise

$$\frac{fg''}{2w^3} = H \neq 0$$

$$fg'' = 2HW^3$$

$$fg'' = 2H(1 + f^2g'^2)^{3/2} \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) denkleminin her iki tarafı  $u$ 'ya göre türetilirse

$$f'g'' = 2H \frac{3}{2} (1 + f^2g'^2)^{1/2} (2ff'g'^2)$$

$$f' [g'' - 6Hfg'^2(1 + f^2g'^2)^{1/2}] = 0 \quad (4.4)$$

bulunur.

(4.4) denkleminde şu durumlar elde edilir:

**1. Durum:**  $f' = 0$  ise  $f(u) = c_1 = \text{sabit} \neq 0$  bulunur.

Bu durumda,  $fg'' = 2HW^3$  denkleminde

$$g'' = 2H(1 + c_1^2g'^2)^{3/2}$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{g''}{(1 + c_1^2g'^2)^{3/2}} = \frac{2H}{c_1} = \text{sabit} \neq 0 \quad (4.5)$$

bulunur. (4.5) denkleminde,

$$g' = p = \frac{dg}{dv} \quad \text{dönüşümü yapılırsa}$$

$$g'' = \frac{dp}{dv} = \frac{dp}{dg} \frac{dg}{dv}$$

olur. Buradan,

$$\frac{p \frac{dp}{dg}}{(1 + c_1^2p^2)^{3/2}} = \frac{2H}{c_1}$$

bulunur. Gerekli işlemlerden sonra

$$1 + c_1^2p^2 = \frac{1}{4H^2c_1^2g^2}$$

ve buradan da

$$p^2 = \frac{1}{c_1^2} \left( \frac{1}{4H^2 c_1^2 g^2} - 1 \right)$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dv} &= \frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{1 - 4H^2 c_1^2 g^2}{4H^2 c_1^2 g^2}}, \\ \frac{2Hc_1 g}{\sqrt{1 - 4H^2 c_1^2 g^2}} dg &= \frac{1}{c_1} dv \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. O halde,  $g$  fonksiyonu

$$\begin{aligned} g^2 &= \frac{1}{4H^2 c_1^2} [1 - 4H^2 (v + c_2)^2], \\ g(v) &= \pm \frac{1}{2Hc_1} \sqrt{1 - 4H^2 (v + c_2)^2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Dolayısıyla  $H = \text{sabit} \neq 0$  durumunda,

$$\begin{aligned} f(u) &= c_1, \\ g(v) &= \pm \frac{1}{2Hc_1} \sqrt{1 - 4H^2 (v + c_2)^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde yüzey,

$$z = f(u)g(v) = \pm \frac{1}{2H} \sqrt{1 - 4H^2 (v + c_2)^2}$$

olarak parametrelendirilir.

**2. Durum:**  $f' \neq 0$  ve  $g'' - 6Hfg'^2(1 + f^2g'^2)^{\frac{1}{2}} = 0$  ise,

$$\frac{g''}{g'^2} = 6Hf(1 + f^2g'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (g' \neq 0) \quad (4.7)$$

bulunur. (4.7) denkleminin her iki tarafının  $u$ 'ya göre türevi alınırsa,

$$0 = 6Hf'(1 + f^2g'^2)^{\frac{1}{2}} + 6Hf \frac{1}{2} (1 + f^2g'^2)^{-\frac{1}{2}} 2ff'g'^2$$

elde edilir. Buradan,

$$f' \left( \sqrt{1 + f^2 g'^2} + f^2 g'^2 \frac{1}{\sqrt{1 + f^2 g'^2}} \right) = 0,$$

bulunur.  $f' \neq 0$  olduğundan

$$\sqrt{1 + f^2 g'^2} + f^2 g'^2 \frac{1}{\sqrt{1 + f^2 g'^2}} = 0$$

bulunur. Buradan

$$1 + 2f^2 g'^2 = 0$$

$$\Rightarrow g'^2(v) = -\frac{1}{2f^2(u)}$$

olur ki bu ancak ve ancak  $g'(v) = \text{sabit}$  ve  $f(u) = \text{sabit}$  olması ile mümkündür.

Bu durumda,  $f'(u) = 0$  bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Yani 2. durum gerçekleşmez.

O halde aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 4.2.1 :**  $M$ , 3-boyutlu Galile uzayında sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip olan birinci tip bir factorable yüzey olsun. Bu durumda,  $M$  yüzeyi

$$f(u) = c_1 \neq 0,$$

$$g(v) = \pm \frac{1}{2Hc_1} \sqrt{1 - 4H^2(v + c_2)^2}$$

denklemleri ile parametrelendirilir. Burada  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerdir. O halde yüzey,

$$z = \pm \frac{1}{2H} \sqrt{1 - 4H^2(v + c_2)^2}$$

olarak elde edilir.

### 4.3 $G_3$ Galile Uzayında Factorable Yüzeylerin Laplasyeni

Galile uzayında Laplace operatörü  $\Delta$ , bir yüzey üzerinde,

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_i} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j})$$

ile tanımlanır. Burada  $G = \det(g_{ij})$ ,  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$  ve  $g_{ij}$  yüzeyin metrik tensörünün bileşenleridir.

$G_3$  Galile uzayında birinci tip bir factorable yüzey

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u)g(v)) \quad (4.8)$$

olarak parametrelendirilmiş olsun.

(4.8)'deki factorable yüzeyin Laplasyenini hesaplayalım.

Sırasıyla  $u$  ve  $v$ 'ye göre birinci türevler

$$\varphi_u = (1, 0, f'(u)g(v)),$$

$$\varphi_v = (0, 1, f(u)g'(v))$$

olarak elde edilir. Yüzeyin  $g_{ij}$  ve  $g^{ij}$  bileşenleri,

$$g_{11} = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle (1, 0, f'(u)g(v)), (1, 0, f'(u)g(v)) \rangle = 1,$$

$$g_{12} = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = g_{21} = \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle$$

$$= \langle (1, 0, f'(u)g(v)), (0, 1, f(u)g'(v)) \rangle = 0,$$

$$g_{22} = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle (0, 1, f(u)g'(v)), (0, 1, f(u)g'(v)) \rangle$$

$$= 1 + f^2 g'^2,$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 g'^2 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow G = \det(g_{ij}) = 1 + f^2 g'^2,$$

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + f^2 g'^2} \begin{bmatrix} 1 + f^2 g'^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + f^2 g'^2} \end{bmatrix},$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{1 + f^2 g'^2}$$

olarak bulunur. (4.8) ile verilen factorable yüzeyinin Laplasyeni

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \sqrt{G} g^{1j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \sqrt{G} g^{2j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \right)$$

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \sqrt{G} g^{11} \frac{\partial}{\partial u_1} + \sqrt{G} g^{12} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \sqrt{G} g^{21} \frac{\partial}{\partial u_1} + \sqrt{G} g^{22} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{1+f^2g'^2}} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \sqrt{1+f^2g'^2} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \sqrt{1+f^2g'^2} \frac{1}{1+f^2g'^2} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1+f^2g'^2}} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \sqrt{1+f^2g'^2} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( (1+f^2g'^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \\
\Delta &= -\frac{ff'g'^2}{(1+f^2g'^2)} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{f^2g'g''}{(1+f^2g'^2)^2} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{(1+f^2g'^2)} \frac{\partial^2}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

O halde,  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u)g(v))$  birinci tip factorable yüzeyinin Laplasyeni

$$\Delta = -\frac{ff'g'^2}{(1+f^2g'^2)} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{f^2g'g''}{(1+f^2g'^2)^2} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{(1+f^2g'^2)} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \quad (4.9)$$

olarak elde edilir. (4.8) ve (4.9) denklemlerini kullanarak

$$\Delta\varphi_1 = \Delta u = -\frac{ff'g'^2}{(1+f^2g'^2)}, \quad (4.10)$$

$$\Delta\varphi_2 = \Delta v = \frac{g'g''f^2}{(1+f^2g'^2)^2}, \quad (4.11)$$

$$\Delta\varphi_3 = \Delta(f(u)g(v)) \quad (4.12)$$

$$= -\frac{ff'g'^2}{(1+f^2g'^2)} f'g - f''g + \frac{g'g''f^2}{(1+f^2g'^2)^2} fg' - \frac{1}{(1+f^2g'^2)} fg''$$

denklemleri elde edilir.

$M$  factorable yüzeyin  $\Delta\varphi = 0$  koşulunu sağladığını yani harmonik yüzey olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.10), (4.11) ve (4.12) denklemlerini kullanarak

$$\Delta\varphi_1 = 0 \Rightarrow -\frac{ff'g'^2}{(1+f^2g'^2)} = 0, \quad (4.13)$$

$$\Delta\varphi_2 = 0 \Rightarrow \frac{g'g''f^2}{(1+f^2g'^2)^2} = 0, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi_3 = 0 \\
\Rightarrow &-\frac{ff'g'^2}{(1+f^2g'^2)} f'g - f''g + \frac{g'g''f^2}{(1+f^2g'^2)^2} fg' - \frac{1}{(1+f^2g'^2)} fg'' = 0 \quad (4.15)
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.



$f \neq 0$  olduğundan (4.13), (4.14) ve (4.15) denklemlerinden sırasıyla,

(i)  $f'g'^2 = 0$ ,

(ii)  $g'g'' = 0$ ,

(iii)  $f''g + \frac{fg''}{1+f^2g'^2} = 0$

elde edilir.

Eğer  $g' = 0$  ise,  $g = a = \text{sabit}$  olur. Bu durumda, (iii) koşulundan  $f''g = 0$  olur ki  $g \neq 0$  olduğundan  $f'' = 0$  ve buradan da  $f(u) = bu + c$  bulunur. Bu durumda  $M$  yüzeyi

$$\varphi(u, v) = (u, v, c_1u + c_2)$$

olarak parametrelendirilir. Burada  $c_1, c_2 \in R$ .

Benzer şekilde, eğer  $f' = 0$  ise  $f = d = \text{sabit}$  olur. Bu durumda (iii) koşulundan  $fg'' = 0$  olur ki  $f \neq 0$  olduğundan  $g'' = 0$  ve buradan da  $g(v) = ev + f$  olarak bulunur. Burada  $e, f \in R$ . Bu durumda  $M$  yüzeyi,

$$\varphi(u, v) = (u, v, c_3v + c_4)$$

olarak parametrelendirilir. Burada  $c_3, c_4 \in R$ .

Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 4.3.1:**  $M$ , 3-boyutlu Galile uzayında  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u)g(v))$  denklemi ile verilen factorable yüzey olsun. Eğer  $M$  harmonik ise, o zaman yüzey bir düzlemin açık parçasıdır.



## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, üç boyutlu Galile uzayında öteleme (translation) yüzeyleri ve factorable yüzeyler incelenmiştir. İlk olarak, [7] referans numaralı çalışmada verilen sabit Gauss ve sabit ortalama eğrilikli öteleme yüzeyler için verilen tanımlar ve elde edilen teoremler detaylı bir şekilde çözülerek incelenmiştir. Daha sonra [11] referans numaralı çalışmada verilen koordinatları sonlu tipten olan öteleme yüzeylerinin sınıflandırılması üzerine incelemeler yapılmıştır.

Son bölümde, üç boyutlu Galile uzayında birinci tipten factorable yüzeyler ele alınmıştır. Ortalama eğriliği sıfırdan farklı bir sabite eşit olan factorable yüzeylerin denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca koordinatları sonlu tipten olan factorable yüzeylerin Laplasyeni hesaplanarak harmonik factorable yüzeyler için bir sınıflandırma yapılmıştır. Bu konuyla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bundan sonra, üç boyutlu Galile uzayında translation-factorable (TF) yüzeyleri için benzer sınıflandırmalar yapılabilir.



## KAYNAKLAR

- [1] **I. M. Yaglom**, A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis, Springer Verlag, New York- Heidelberg (1979).
- [2] **B. Divjak and Z. M. Sipus**, Some special surface in the pseudo- Galilean space, Acta Math. Hungar., 118 (2008), 209-226
- [3] **B. J. Pavkovic, I. Kamenarovic**, The equiform differential geometry of curves in the Galilean space  $G_3$ , Glas. Mat., 22 (1987) 449-457.2
- [4] **O. Röschel**, Die geometrie des Galileischen raumes, (Habilitation, Loeben, 1984)
- [5] **L. Verstraelen, J. Walrave, S. Yaprak**, The minimal translation surfaces in Euclidean space, Soochow J. Math., 20 (1994), 77–82.
- [6] **H. Liu**, Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces, J. Geom. 64 (1999) 141–149
- [7] **Z. M. Sipus and B. Divjak**, Translation surfaces in the Galilean Space, Glasnik Mat. Vol 46(66)(2011), 457- 471
- [8] **B. Y. Chen**, A report on submanifold of finite type, Soochow J.Math 22 (1996), 117-337.
- [9] **T. Takahashi**, Minimal immersions of Riemannian manifolds, J . Math. Soc. Japan 18 (1966), 380-385.
- [10] **O. J. Garay**, An extension of Takahashi’s theorem, Gem. Dedicata 34 (1990), 105-112.
- [11] **D. W. Yoon**, Some Classification of Translation Surfaces in Galilean 3-Space. Int Journal of Math . Analysis, Vol. 6, (2012), no. 28, 1355 -1361.
- [12] **B. Divjak**, Special curves on ruled surfaces in Galilean and pseudo-Galilean Space, Acta Math. Hungar., 98 (3) (2003), 203-215.
- [13] **B. Divjak, and Z. M. Sipus**, 2003, Minding’s isometries of ruled surface in Galilean and pseudo-Galilean space, J. Geom., 77, 35-47.
- [14] **Z. M. Sipus**, Ruled Weingarten surfaces in the Galilean space, Periodica Mathematica Hungarica, Vol. 56(2) (2008), 213-225.



## ÖZGEÇMİŞ

**Ad-Soyad** : Gürkan Şasi  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 1 Ocak 1991 - İstanbul  
**E-posta** : sasi16@itu.edu.tr

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik(İngilizce).
- **Lisansüstü** : İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği.

### MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2016-2017 döneminde bir lisede matematik öğretmenliği görevinde bulundum.
- 2017-2018 döneminde özel bir öğretim kurumunda matematik ve ingilizce öğretmenliği yapmaktayım.