





**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TABAKALI BAZI ORTAMLARDA NONLİNEER DALGA YAYILMASI  
PROBLEMİNİN ASİMPOTİK ANALİZİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Ekin DELİKTAŞ**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR**

**ARALIK 2018**



**TABAKALI BAZI ORTAMLARDA NONLİNEER DALGA YAYILMASI  
PROBLEMİNİN ASİMPOTİK ANALİZİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Ekin DELİKTAŞ  
(509112072)**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR**

**ARALIK 2018**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509112072 numaralı Doktora Öğrencisi Ekin DELİKTAŞ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "TABAKALI BAZI ORTAMLARDA NONLİNEER DALGA YAYILMASI PROBLEMİNİN ASİMPTOTİK ANALİZİ" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU** .....  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Doç. Dr. Semra AHMETOLAN** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Dr. Öğr. Üyesi Halil İbrahim VAR** .....  
Marmara Üniversitesi

**Teslim Tarihi :**      **17 Eylül 2018**

**Savunma Tarihi :**    **5 Aralık 2018**







*Kardeşim Ergin'e,*



## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanma sürecinde, karşılaştığım her sorunda bir çıkış yolu göstererek yükümü hafifleten, bir an olsun motivasyonumuzu düşürmeyen, tüm zorluklara rağmen desteğini benden esirgemeyen, tez danışman hocam Prof. Dr. Mevlüt Teymür'e özverisi, sabrı ve değerli emekleri için en içten teşekkürlerimi sunarım. Paylaşmayı esirgemediği akademik tecrübeleri sayesinde yoluma ışık tutan tez izleme komitesi üyelerimden Doç. Dr. Semra Ahmetolan'a yapıcı eleştirileri, her konuştuğumuzda beni her şeyi yapabilecek güçte hissettiren motivasyonu için sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yaptığı akademik çalışmaları ile bu tez çalışmasına da yol gösteren tez izleme komitesi üyelerimden Dr. Öğr. Üyesi Halil İbrahim Var'a emekleri ve bu süreçte gösterdiği özverisi için teşekkür ederim. Kapısını her çaldığımda kaynak ve yöntem konusundaki yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, bu sayede bu tez çalışmasının bilimsel temeller ışığında ilerleyebilmesine katkıda bulunan Öğr. Gör. Dr. Ali Demirci'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kararsızlığa düştüğüm her an yaptığı yorumlarla yolumu aydınlatan, verdiği fikirler sayesinde hayatımdaki "iyi ki"lerin çoğalmasına vesile olan, varlığıyla şanslı hissettiğim biricik kardeşim Ergin Deliktaş'a, her koşulda arkamda olup hayatımı kolaylaştıran, maddi ve manevi destekleriyle sıkıntısız bir doktora süreci geçirmeme yardımcı olan annem Ayten Deliktaş ve babam Doğan Deliktaş'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İstanbul Teknik Üniversitesi'ndeki doktora sürecim bana güzel dostlar kazandırdı. Can dostlarım, destek ekibim Yonca Alkan Göksu ve Gökhan Göksu'ya, Amerika'da oldukları dönemde bile dostluğunu ve desteğini esirgemeyen sevgili arkadaşlarım Mahmut Bağcı ve İzzet Göksel'e, yardımı sayesinde kayıpları kazanca çevirdiğim değerli arkadaşım Ekin Küçüksönmez'e, iyi niyetini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen sevgili arkadaşlarım Göksu Oruç, Özlem Orhan ve Alperen Karan'a canı gönülden teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, literatür araştırması sırasında erişemediğim yayınları, İngiltere'deki imkanlarıyla bulup göndererek katkıda bulunan çok değerli çocukluk arkadaşım Onur Düzgöl'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez çalışması, "TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt içi Doktora Burs Programı" kapsamında TÜBİTAK ve "Lisansüstü Tezleri Destekleme Projesi" kapsamında İstanbul Teknik Üniversitesi tarafından desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a ve İstanbul Teknik Üniversitesi'ne teşekkür ederim.

Aralık 2018

Ekin DELİKTAŞ  
(Yüksek Matematikçi)



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ .....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
KISALTMALAR.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET .....	xv
SUMMARY .....	xix
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. İKİ TABAKALI LİNEER OLMAYAN ELASTİK BİR YARIM UZAYDA YÜZEY SH DALGA YAYILIMINA YAVAŞ ARA TABAKANIN ETKİSİ.....</b>	<b>11</b>
2.1 Problemin Formülasyonu .....	12
2.2 Lineer Dalgalar ve Dispersiyon.....	16
2.2.1 $c_2 < c < c_1 < c_3$ hali .....	17
2.2.2 $c_2 < c_1 < c < c_3$ hali .....	20
2.2.3 $c < c_2 < c_1 < c_3$ hali .....	20
2.2.4 Dispersiyon bağıntıları .....	21
2.3 Lineer Olmayan Yüzey SH Dalgalarının Asimptotik Analizi.....	27
2.3.1 $c_2 < c < c_1 < c_3$ için analiz.....	30
2.3.2 $c_2 < c_1 < c < c_3$ için analiz.....	43
2.3.3 NLS denkleminin bazı çözümleri.....	47
2.4 Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar .....	50
<b>3. DEĞİŞKEN SINIR YÜZEYLERE SAHİP BİR TABAKA İLE KAPLI ELASTİK BİR YARIM UZAYDA LİNEER OLMAYAN YÜZEY SH DALGALARI .....</b>	<b>59</b>
3.1 Problemin Formülasyonu .....	60
3.2 Lineer Dalgalar ve Dispersiyon.....	64
3.2.1 Lineer Love dalgalarının asimptotik analizi .....	67
3.3 Lineer Olmayan Yüzey SH (Love) Dalgalarının Asimptotik Analizi .....	76
3.4 GNLS Denkleminin Çözümleri.....	91
3.4.1 Analitik çözümler .....	91
3.4.2 Nümerik çözümler .....	92
3.4.3 Enerji analizi.....	94
3.5 Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar .....	94
3.5.1 Düzlem sınır yüzeylere sahip sabit kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzay .....	95
3.5.2 Periyodik sınır yüzeylere sahip sabit kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzay .....	97

3.5.3 Periyodik sınır yüzeylere sahip değişken kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzay .....	101
<b>4. SONUÇ .....</b>	<b>111</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>115</b>
<b>EKLER .....</b>	<b>121</b>
EK A.....	123
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>128</b>



## **KISALTMALAR**

<b>SH</b>	: Yatay Polarize Olmuş Kayma
<b>NLS</b>	: Lineer Olmayan Schrödinger
<b>GNLS</b>	: Genelleştirilmiş Lineer Olmayan Schrödinger







## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : Problemin geometrisi.....	12
Şekil 2.2 : Çeşitli $h_2/h_1$ değerleri için boyutsuz faz hızı $C$ 'nin boyutsuz dalga sayısı $K$ 'ya göre değişimi. ....	26
Şekil 2.3 : Dispersiyon bağıntılarının birinci dalları.....	26
Şekil 2.4 : $h_2/h_1 = 1$ , $h_2 = 0$ ve $h_1 = 0$ için $\Gamma$ 'nın $K$ 'ya göre değişimi. ....	54
Şekil 2.5 : $\beta_1 = \beta_3 = 2$ için sertleşen üst tabaka ve sertleşen yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli $\beta_2$ değerleri için $\Delta$ 'nın $K$ 'ya göre değişimi.....	54
Şekil 2.6 : $\beta_1 = \beta_3 = 2$ için sertleşen üst tabaka ve sertleşen yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli $\beta_2$ değerleri için $\Gamma\Delta$ 'nın $K$ 'ya göre değişimi.....	55
Şekil 2.7 : $\beta_1 = \beta_3 = -2$ için yumuşayan üst tabaka ve yumuşayan yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli $\beta_2$ değerleri için $\Delta$ 'nın $K$ 'ya göre değişimi.....	55
Şekil 2.8 : $\beta_1 = \beta_3 = -2$ için yumuşayan üst tabaka ve yumuşayan yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli $\beta_2$ değerleri için $\Gamma\Delta$ 'nın $K$ 'ya göre değişimi.....	56
Şekil 2.9 : $\beta_1 = 2$ ve $\beta_3 = -2$ için sertleşen üst tabaka ve yumuşayan yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli $\beta_2$ değerleri için $\Delta$ 'nın $K$ 'ya göre değişimi.....	56
Şekil 2.10 : $\beta_1 = 2$ ve $\beta_3 = -2$ için sertleşen üst tabaka ve yumuşayan yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli $\beta_2$ değerleri için $\Gamma\Delta$ 'nın $K$ 'ya göre değişimi.....	57
Şekil 2.11 : $\beta_1 = -2$ ve $\beta_3 = 2$ için yumuşayan üst tabaka ve sertleşen yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli $\beta_2$ değerleri için $\Delta$ 'nın $K$ 'ya göre değişimi.....	57
Şekil 2.12 : $\beta_1 = -2$ ve $\beta_3 = 2$ için yumuşayan üst tabaka ve sertleşen yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli $\beta_2$ değerleri için $\Gamma\Delta$ 'nın $K$ 'ya göre değişimi.....	58
Şekil 3.1 : Düzensiz sınır yüzeylere sahip tabakalı yarım uzay.....	61
Şekil 3.2 : $f_1 = f_2 = 0$ için problemin geometrisi. ....	95
Şekil 3.3 : $\beta_1 = 1.5$ , $\beta_2 = 1.5$ için sertleşen malzemelerden oluşan tabakalı yarım uzayda (a) Bright soliton dalga evrimi (b) Üstten görünüş (c) Maksimum genlik.....	96
Şekil 3.4 : $\beta_1 = -1.5$ , $\beta_2 = -1.5$ için yumuşayan malzemelerden oluşan tabakalı yarım uzayda (a) Dark soliton dalga evrimi (b) Üstten görünüş (c) Maksimum genlik. ....	97
Şekil 3.5 : $f_1 = f_2$ ve periyodik iken problemin geometrisi. ....	97

<b>Şekil 3.6</b>	: $f_1 = f_2 = u \cos(k_1 \xi)$ için a) Bright soliton benzeri dalgaların evrimi, b) Üstten görünüşü c) Maksimum dalga genliği d) Enerji değişimi.....	99
<b>Şekil 3.7</b>	: $f_1 = f_2 = u \cos(k_1 \xi)$ için a) Dark soliton benzeri dalgaların evrimi, b) Üstten görünüşü c) Maksimum dalga genliği d) Enerji değişimi.....	100
<b>Şekil 3.8</b>	: (a) Bright soliton benzeri dalgalar için (b) Dark soliton benzeri dalgalar için; $\xi = 7$ seçilerek, çeşitli düzgünlük parametreleri için $ A ^2$ 'nin $\tau$ ile değişimi. ....	100
<b>Şekil 3.9</b>	: Periyodik serbest yüzey ve periyodik arayüzey ile sınırlı tabakalı yarım uzay için problemin geometrisi. ....	104
<b>Şekil 3.10</b>	: Düzlem veya periyodik yüzeylerle sınırlı tabakalı yarım uzay modelleri. ....	104
<b>Şekil 3.11</b>	: $f_1 = u \cos(k_1 \xi)$ , $f_2 = 0$ için a) Bright soliton benzeri dalgaların evrimi, b) Üstten görünüşü c) Maksimum dalga genliği d) Enerji değişimi.....	105
<b>Şekil 3.12</b>	: $f_1 = 0$ , $f_2 = v \cos(k_1 \xi)$ için a) Bright soliton benzeri dalgaların evrimi, b) Üstten görünüşü, c) Maksimum dalga genliği d) Enerji değişimi.....	106
<b>Şekil 3.13</b>	: a) Serbest yüzey düzlemselken yani $U=0$ iken b) Serbest yüzey $U = 0.05$ genlikli salınma sahipken, sabitlenmiş $s = 1.4$ , $\beta_1 = 1.5$ , $\beta_2 = 1.5$ , $\xi = 7$ değerleri ve arayüzeyin düzgünlük parametresi $V$ 'nin farklı değerleri için $ A ^2$ 'nin $\tau$ ile değişimi.....	107
<b>Şekil 3.14</b>	: a) Arayüzey düzlemselken yani $V=0$ iken b) Arayüzey $V = 0.05$ genlikli salınma sahipken; sabitlenmiş $s = 1.4$ , $\beta_1 = 1.5$ , $\beta_2 = 1.5$ , $\xi = 7$ değerleri ve serbest yüzeyin düzgünlük parametresi $U$ 'nun farklı değerleri için $ A ^2$ 'nin $\tau$ ile değişimi. ....	108
<b>Şekil 3.15</b>	: Üç farklı duruma ait bright soliton benzeri dalgaların evrimi sırasında enerji değişimleri. ....	109

## TABAKALI BAZI ORTAMLARDA NONLİNEER DALGA YAYILMASI PROBLEMİNİN ASİMPOTİK ANALİZİ

### ÖZET

Elastik malzemeden meydana gelen çubuk, plak ve birbirinden farklı malzemelerden oluşan tabakalı yarım uzay gibi genel olarak dalga kılavuzu olarak adlandırılan ortamlarda yayılan dalgalar, sınır yüzeylerinde oluşan yansımaların etkisiyle dispersif olurlar, yani faz hızları dalga sayısına bağlı olarak değişir. Bir tabakalı yarım uzayda yatay polarize olmuş yüzey kayma (SH) dalgaları, tabakanın kayma hızının yarım uzayınkinden daha yavaş olması durumunda, yavaş tabakanın sınır yüzeyleri arasındaki çoklu yansımalarından dolayı dispersiftir. Bu dalgalar ilk olarak, sismogramlar tarafından kaydedilen yüzey dalgası katarlarında büyük enine yer değiştirme bileşenlerine sahip dispersif dalgaları inceleyen Love tarafından keşfedilmiştir ve literatürde Love dalgası olarak adlandırılmaktadır. Stoneley ve Tillotson 1928 yılında, tek tabakalı yarım uzayda Love dalgaları teorisini iki tabakalı yarım uzay modeli için genişletmiş ve 1950 yılında Stoneley, düşük hızlı ara tabakanın lineer Love dalga yayılımı üzerindeki etkisini incelemiştir. Stoneley'in bu çalışmasının ışığında, farklı mekanik özelliklere sahip lineer iki tabakayla kaplı bir yarım uzayda SH (Love) dalga yayılımı ve yavaş tabakanın dalga yayılımına etkisi bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalar, inşaat mühendisliği, sismoloji, malzemelerin hasarsız muayenesi, elektronik sinyal işlem cihazları teknolojisi ve depremlerden kaynaklı hasar tahmini gibi çalışma alanlarında önemli rol oynamaktadır. Yeryüzünün kıtasal kısımlarında yayılan yatay polarize olmuş yüzey elastik kayma dalgaları ile ilgili çalışmalar, yüzeyde saklı petrol, yağ, gaz, mineral gibi doğal kaynakların keşfi için yeryüzünün tabakalı yapısı hakkında önemli bilgiler vermesi açısından da önemlidir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak, lineer olmayan, homojen, birbirinden farklı hiperelastik malzemelerden oluşan, sabit kalınlıklı iki tabakayla kaplı hiperelastik bir yarım uzayda lineer olmayan yüzey SH dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Lineer durumda problem, Stoneley'in 1950'de incelediği probleme karşılık gelmektedir. Ara tabakanın lineer kayma hızının, üst tabaka ve yarım uzayın lineer kayma hızlarından küçük olduğu kabul edilerek, yavaş ara tabakanın lineer olmayan özelliklerinin SH dalga yayılımına etkisi araştırılmıştır. Ayrıca tek tabakalı ve iki tabakalı yarım uzay modellerinde lineer olmayan yüzey SH dalga yayılımını karakterize eden çözümler karşılaştırılarak, ikinci bir tabakanın varlığının dalga yayılımı üzerindeki etkileri ortaya çıkarılmıştır. Bu çalışmada incelenen ikinci problemde, lineer olmayan, elastik, homojen fakat değişken sınır yüzeylere sahip bir tabakayla kaplı yarım uzayda lineer olmayan yüzey SH dalgalarının yayılımı incelenmiştir. Tabakanın sınır yüzeylerinin, dalganın yayılma doğrultusunda değiştiği kabul edilerek, ortamı oluşturan malzemelerin lineer olmayan özelliklerinin yanı sıra, pürüzlü sınır yüzeylerin de lineer olmayan SH dalga yayılımına etkileri incelenmiştir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde, çalışılan problemlerin amacı ve kapsamından bahsedilmiş, konuyla ilgili literatür özetine yer verilmiştir.

İkinci bölümde, lineer olmayan, sabit kalınlıklı, birbirinden farklı hiperelastik malzemelerden oluşan iki tabakayla kaplı hiperelastik bir yarım uzayın yüzeyi üzerinde yatay polarize olmuş harmonik bir yüzey kayma dalgasının yavaş modülasyonu incelenmiştir. Ara tabakanın lineer kayma hızının, üst tabaka ve yarım uzayın lineer kayma hızlarından daha yavaş olduğu model ele alınarak düşük hızlı ara tabakanın lineer olmayan özelliklerinin yüzey SH dalga yayılımı üzerindeki etkisi araştırılmıştır. İkinci bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, lineer olmayan, homojen, izotrop, sıkışmaz hiperelastik ve neo-Hookeen malzemelerden oluşan iki tabakalı yarım uzayda lineer olmayan SH dalga yayılımını modelleyen hareket denklemleri ve sınır koşulları türetilmiştir. İkinci kısımda, türetilen sınır değer problemi lineerleştirilerek, bazı noktalara ışık tutmak amacıyla lineer SH dalgalarının yayılması problemi incelenmiş ve dalga yayılımının mevcut olduğu durumlar için dispersiyon bağıntıları türetilmiştir. Elde edilen dispersiyon bağıntılarının yapısı gereği, bu bağıntıların her bir dalını temsil eden fonksiyonları analitik olarak hesaplamak mümkün değildir. Bu nedenle bağıntıların çeşitli dalları sayısal olarak hesaplanarak çizdirilmiş, tabakaların kalınlıkları oranının ve ikinci bir tabakanın varlığının lineer dalga yayılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Üçüncü kısımda, SH dalga yayılımının mevcut olduğu iki farklı durum için çoklu ölçekler metodu kullanılarak, iki durumda da SH dalgalarının lineer olmayan modülasyonunun genlik fonksiyonunun asimptotik olarak lineer olmayan, sabit katsayılı bir Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edildiği gösterilmiştir. Ardından, NLS denklemi için bazı çözümlere yer verilmiş ve denklemin çözüm özelliklerinin, katsayılar çarpımının işaretine bağlı olduğu gösterilmiştir. Dördüncü kısımda, katsayıları ortamın lineer ve lineer olmayan malzeme parametrelerine, tabakaların kalınlığına ve dalga sayısına bağlı olan NLS denklemleri ile asimptotik olarak karakterize edilen lineer olmayan SH dalga yayılımına lineer olmayan malzemelerin etkisini belirleyebilmek için, katsayılar çarpımının dalga sayısı ile değişimi iki tabakalı yarım uzayın çeşitli lineer olmayan malzeme parametreleri için incelenmiştir. Yavaş ara tabakanın lineer olmayan malzeme özelliklerinin soliton dalgaların varlığı üzerindeki etkileri sayısal olarak araştırılmış ve sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir. Grafiklerden SH dalga yayılımının, yavaş ara tabakanın lineer olmayan özelliklerinden kuvvetli bir şekilde etkilendiği gözlemlenmiştir. Türetilen NLS denklemi, tabakalardan birinin kalınlığının sıfır olması durumunda tek tabakalı yarım uzayda yayılan SH dalgalarını karakterize eden NLS denklemine indirgenmektedir. İki tabakalı ve tek tabakalı yarım uzay modelleri için türetilen NSL denklemlerinin çözüm özellikleri karşılaştırılarak, ikinci tabakanın varlığının zarf soliton tipi dalga yayılımını önemli ölçüde etkilediği gösterilmiştir.

Çalışılan ilk problemde bahsedilen lineer olmayan yüzey SH dalga yayılımı problemi, düzgün (uniform) kalınlıklı tabakalarla kaplı yarım uzay modelinde incelenmiştir. Yani tabakaların sınır yüzeyleri düzlemsel ve tabaka kalınlıkları sabittir. Ancak kıtasal marjinler, dağ kökleri, dağ havzaları, tuz ve maden yatakları gibi yeryüzünün kabuksal kısımları her zaman düzgün değildir. Sınır yüzeylerindeki değişime bağlı olarak tabaka kalınlığı da değişebilmektedir. Bu durumda dalga yayılımı sadece ortamın malzeme özelliklerinden değil pürüzlü yüzey ve arayüzeylerin şekil değişiminden de etkilenir. Düzensiz sınır yüzeylere sahip elastik tabakalarda yüzey dalga yayılımı problemleri,

kıta sınırları boyunca ve değişken kabuk kalınlıklı diğer yeryüzü bölgelerinde sismik dalga yayılımına model teşkil etmesi açısından önemlidir.

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde, malzemelerin lineer olmayan özelliklerinin yanı sıra tabakalı ortamın sınırlarındaki düzensizliklerin de SH tipi yüzey dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Üçüncü bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, pürüzlü sınır yüzeylere sahip değişken kalınlıklı bir tabakayla kaplı homojen, izotrop, lineer olmayan sıkışmaz hiperelastik bir yarım uzayda SH tipi yüzey dalgalarının yayılmasını karakterize eden hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları türetilmiştir. Hem serbest yüzeyin hem de arayüzeyin, SH dalgalarının yayılma yönünde değiştii kabul edilmiştir. İkinci kısımda, lineer olmayan hareket denklemleri ve değişken katsayılı lineer olmayan sınır koşullarından oluşan sınır değer problemi lineerleştirilerek, bazı noktalara ışık tutmak amacıyla lineer SH dalgalarının yayılması problemi incelenmiştir. Tabakanın sınır yüzeylerindeki keyfi bir değişim için dalga yayılımı analizi oldukça kompleks olduğundan, sınır yüzeylerindeki değişimin dalgaların yayılma doğrultusunda ve yavaş olduğu kabul edilmiştir. Dalganın hızlı ve yavaş değişen parametreleri arasında açık bir ayırım yapabilmek için çoklu ölçekler metodu kullanılarak, değişken kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzayda lineer Love dalga yayılımını karakterize eden asimptotik bir çözüm inşaa edilmiştir. Üçüncü kısımda, bir önceki kısımdaki ölçeklerin farklı seçimiyle çoklu ölçekler metodunu uygulayarak, yüzey SH dalgalarının lineer olmayan self modülasyonu değişken katsayılı, genelleştirilmiş bir lineer olmayan Schrödinger (GNLS) denklemi ile asimptotik olarak karakterize edilmiştir. Katsayıları, lineer ve lineer olmayan malzeme özelliklerine, dalga sayısına ve ayrıca sınırlardaki düzensizlikleri temsil eden fonksiyonlara bağlı olan bu denklemin her zaman analitik çözümü yoktur. Bu sebeple bu bölümün dördüncü kısmında, GNLS denkleminin önerilen bir ansatz yardımıyla integrallenebilirlik koşulu elde edilmiş ve bu koşul altında soliton benzeri çözümleri türetilmiştir. Ardından, GNLS denkleminin katsayılarının integrallenebilirlik koşulunu sağlamadığı durumlarda nümerik çözümleri araştırılmıştır. Bu amaçla Fourier transformunun bazı özelliklerine değinildikten sonra nümerik çözümler için kullanılan pseudospectral yöntem tanıtılmış ve enerji analizine yer verilmiştir. Beşinci kısımda düzensiz sınır yüzeylerinin, GNLS denkleminin integrallenebilirliğine izin verdiği durumlar araştırılmış, bu durumlarda sınır yüzeylerindeki değişimin tabaka kalınlığına kıyasla oldukça küçük ve periyodik olduğu kabul edilerek analitik çözümler çeşitli lineer olmayan malzeme parametreleri için elde edilmiştir. Böylece, lineer olmayan malzeme özelliklerinin ve sınırlardaki ondülasyonun dalga yayılımı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Pürüzlü sınır yüzeylerin integrallenebilirliğe izin vermediği diğer özel durumları için, GNLS denkleminin çözümleri nümerik olarak elde edilmiştir. Elde edilen soliton benzeri çözümlerin grafikleri incelenerek, tabakalı yarım uzayın sınır yüzeylerindeki ondülasyonların, bright soliton benzeri ve dark soliton benzeri dalgalar üzerinde salınımlara yol açtığı gözlemlenmiştir. Sınırlardaki ondülasyonun genliğinin soliton benzeri yüzey SH dalgalarının genliği üzerindeki etkisi araştırılmış, ayrıca serbest yüzeydeki ondülasyon ile arayüzeydeki ondülasyonun lineer olmayan SH dalga yayılımı üzerindeki etkileri karşılaştırılmıştır.



# ASYMPTOTIC ANALYSIS OF NONLINEAR WAVES IN CERTAIN LAYERED MEDIA

## SUMMARY

Elastic waves propagating in wave guides such as rods, plates, layered half spaces, etc., become dispersive, i.e. the phase velocities of waves depend on the wave number, due to multiple reflections between the boundaries of wave guides. Horizontally polarized surface shear waves propagate on a layered half space providing that the shear wave velocity of the layer is less than the corresponding velocity of the half space. These waves are discovered by Love considering the dispersive waves with large transverse displacement components in the early part of the surface wave trains recorded by seismographs. They are called Love waves. Later, Stoneley and Tillotson extended the theory of Love waves to a double layered half space in 1928 and Stoneley examined the effect of low velocity internal layer on the propagation of surface shear horizontal (SH) waves in 1950. The propagation of surface SH waves in a double layered half space and also the effect of the low velocity internal layer on the propagation characteristics of surface SH waves have been investigated by other researchers as well due to their important applications in geophysics, civil engineering, electronic signal processing devices, nondestructive testing of materials and prediction of damage that can result from earthquakes etc. Moreover, the study of surface elastic SH wave propagation inside the crustal layer of the Earth gives important information about the layered structure of the Earth for exploration of natural resources buried in the Earth's surface such as oil, petroleum, gas and mineral.

In the first part of this work, the slow modulation of a harmonic surface SH wave over the surface of a nonlinear hyperelastic half space covered with two different nonlinear hyperelastic layers of uniform thickness is examined. It is assumed that the linear shear wave velocity of the intermediate layer is slower than those of the top layer and the half space. In the linear limit, the problem reduces to the problem investigated by Stoneley in 1950. The effect of the nonlinear properties of the intermediate layer on the propagation characteristics of surface SH waves has been investigated. Moreover, from the comparison of the solutions characterized the nonlinear SH wave propagation on the single layered half space and on the double layered half space, it is observed that SH wave propagation is affected considerably by the existence of a second layer. In the later part of this study, the SH waves propagating in a nonlinear elastic half space coated with a nonlinear elastic layer having irregular boundary surfaces is examined. It is assumed that the irregularities of the boundary surfaces are the functions of the distance in the direction of propagation of the waves. The effect of the varying boundary surfaces as well as the effect of the nonlinear material parameters on the propagation characteristics of the surface SH waves in a layered half space have been investigated.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, it is mentioned about purpose and scope of the studied problems, and literature review is given.

In the second chapter, the slow modulation of a harmonic surface SH wave over the surface of a nonlinear hyperelastic half space covered with two different nonlinear hyperelastic layers of uniform thickness is examined. In the analysis, it is assumed that between the linear shear wave velocities of the top layer,  $c_1$ , the intermediate layer,  $c_2$ , and the half space,  $c_3$ , the inequality  $c_2 < c_1 < c_3$  is valid. That is the linear shear wave velocity of the intermediate layer is slower than those of the top layer and the half space. The effect of the nonlinear properties of the slow intermediate layer on the existence of solitary waves has been investigated. This chapter consists of four sections.

In the first section, the equations of motion and boundary conditions are produced for the nonlinear surface SH wave propagation on the double layered half space. It is assumed that the constituent materials are nonlinear homogenous, isotropic, incompressible hyperelastic and their strain energy functions are only the functions of the first invariant of the Finger deformation tensor  $\mathbf{c}^{-1} = [x_{k,K}x_{l,K}]$ , i.e.  $\Sigma = \Sigma(I)$  where  $I = \text{tr}\mathbf{c}^{-1}$ . Namely, we consider the double layered half space made of different generalized neo-Hookean materials.

In the second section, the problem of linear SH wave propagation is investigated by linearizing the derived boundary value problem, and then the dispersion relations are obtained for cases where wave propagation exists. It is known that a surface SH wave propagates provided that the phase velocity  $c$  of this wave satisfies either the condition  $c_2 < c < c_1 < c_3$  or the one  $c_2 < c_1 < c < c_3$ . The problem is examined under these two conditions. Due to the structure of the resulting dispersion relations, it is not possible to analytically calculate the functions representing each branch of these relations. For this reason, various branches of the relations are calculated numerically, and then the effects of the thickness ratio of the layers and the existence of a second layer on the linear wave propagation are investigated.

In the third section, by using the method of multiple scales for two different cases where SH wave propagation exists, it has been shown that the amplitude functions of the nonlinear modulation of the SH waves are characterized asymptotically by nonlinear Schrödinger (NLS) equations. The coefficients of the obtained NLS equations depend, in a complicated way, on linear and nonlinear material parameters of the double layered half space, the thicknesses of the layers and also the wave number of the waves. Then, some analytical solutions for the NLS equation are obtained, and the properties of the solutions are shown to depend on the sign of the product of its coefficients. In the fourth section, the variation of this product with the wave number is evaluated numerically by giving appropriate values to the material constants and to the thickness ratio of the layers. To observe the effect of nonlinearity on the coefficients, consequently on the solutions of the NLS equation, the linear material constants are held fixed while the nonlinear ones are being changed. It is observed that the nonlinear properties of the slow intermediate layer affect strongly the solutions of the NLS equation. Moreover, for relatively long waves the nonlinear properties of the half space dominate the propagation characteristics of the surface SH waves. For  $c_2 < c < c_1 < c_3$  when  $h_1 = 0$  and for  $c_2 < c_1 < c < c_3$  when  $h_1 = 0$  or  $h_2 = 0$  the coefficients of the NLS equations reduce to the coefficients of the NLS equation for a half space covered by a single layer. To reveal the effect of the second layer, the coefficients of the NLS equations obtained for a double layered half space and for a



single layered half space are compared. It has been observed that the propagation is affected considerably by the existence of a second layer.

The problem of the nonlinear SH wave propagation studied in the first problem is examined in the half space covered with uniform thickness layers. That is, the boundary surfaces of the layers are planar and the thicknesses of the layers are constant. However, it is a well known fact that the crustal parts of the Earth are not always uniform such as continental margins, mountain roots, salt and ore deposits etc. In this case, the wave propagation is affected not only by the material properties of the medium but also by the irregular surfaces. The propagation of surface shear horizontal waves through non parallel or undulated boundaries has received much attention in geophysics, civil engineering, earthquake engineering due to importance of the seismic wave propagation inside the earth of varying crustal thickness.

In the third chapter of this study, we have investigated the effect of the irregular boundary surfaces as well as the effect of nonlinear material parameters on the propagation characteristics of the surface SH waves in a layered half space. It is assumed that the irregularities of the boundary surfaces are the functions of the distance in the direction of propagation of the waves. The third chapter consists of five sections.

In the first section, the equations of motion characterizing the propagation of surface SH waves in a homogeneous, isotropic, nonlinear, incompressible hyperelastic half space covered by a layer with varying thickness having rough boundary surfaces and associated boundary conditions are derived. It has been assumed that both the free surface and the interface vary in the direction of propagation of the SH waves.

In the second section, the problem of linear SH waves is investigated by linearizing the boundary value problem consisting of nonlinear equations of motion and nonlinear boundary conditions with variable coefficients. Since the analysis of wave propagation in a layered crustal structure with an arbitrary surface shape is very complicated, it is assumed that the irregularities of the boundary surfaces are the functions of the distance in the direction of propagation of the waves, moreover, variations of the boundary surfaces are regarded as slow. To make a clear distinction between the fast and slow varying parameters of the waveguide, it is used the method of multiple scales and an asymptotic solution has been constructed to characterize the linear Love wave propagation in a half space covered with a layer of nonuniform thickness.

In the third section, for a general geometry, it is shown that nonlinear self modulation of surface SH waves is governed by a generalized nonlinear Schrödinger (GNLS) equation with variable coefficients depending on linear and nonlinear material parameters of the media, slowly varying boundary surfaces and also the wave number of the waves. When the irregularities of the surfaces are neglected, this GNLS equation reduces to the NLS equation characterized the nonlinear propagation of Love waves in a layered half space having plane boundary surfaces. While the governing NLS equation with constant coefficients is always integrable, GNLS equation with variable coefficients may no longer be integrable because of the coefficients depending on the irregularities of the boundary surfaces. Hence, in the fourth section, integrability condition of the GNLS equation is obtained with the help of a proposed ansatz and soliton-like solutions are derived analytically under this condition. For the cases where the coefficients of the GNLS equation do not satisfy the integrability condition, numeral solutions are investigated. For this purpose, some properties of Fourier

transform are given and pseudospectral method used in numerical calculations is introduced and energy analysis is given.

In the fifth section, we have investigated some special cases of the irregularities that preserve the integrability; and also we obtain the exact soliton-like solutions of the GNLS equation for these cases in which layer thickness remains constant whereas the boundary surfaces change as periodically. For the other cases of slowly varying thickness which do not allow the integrability of the GNLS equation, because of the difficulties for the analytical solutions, the numerical solutions to GNLS equation are sought by means of the pseudospectral method. The effects of the corrugated boundary surfaces and nonlinear properties of the layered half space on the propagation characteristics of the soliton-like waves have been demonstrated graphically. The graphs reveal that the soliton-like solutions have some fluctuations due to slowly varying corrugation in the boundary surfaces of the layer. As a result of oscillations in the boundary surfaces, the background of dark solitary waves and the top of bright solitary waves undergo a periodic fluctuation. It is also demonstrated that the amplitudes of the soliton-like solutions increase with the increasing amplitude of the undulation in the boundary surfaces of the crustal layer. Moreover, the effect of the irregularities of the boundary surfaces on the soliton energy during the wave evolution is investigated. When only the interface has fluctuation, undulation of the energy during the wave evolution is relatively small compared to the cases in which free surface has fluctuation. Furthermore, it has been observed that when free surface is corrugated, fluctuations attached on the bright soliton-like waves are more significant compared to the case in which layer has corrugation only at the interface. Hence, it is concluded that the effect of the corrugated free surface is more remarkable than the effect of the corrugated interface on the wave evolution.

## 1. GİRİŞ

Katılarda dalga yayılımı ele alınırken, mekanik özelliklerine bağlı olarak yeryüzü modelleri üç temel malzeme altında sınıflandırılır. İlki bu çalışmanın da konusu olan elastik malzemedir. Bu tür malzemeler, üzerine etkiyen kuvvete ani tepki gösterip bu kuvvetin belirlediği bir şekil değiştirme durumunu hemen kazanır ve kuvvet değişmedikçe şekil değiştirme korunur. Hem elastik özellik hem de uzun süre gözlemlendiğinde akışkanların özelliklerini gösteren malzemeler ise visko-elastik malzemelerdir. Visko-elastik malzeme, üzerine etkiyen kuvvet değişmese de şekil değiştirme devam eder. Sonuncusu ise plastik malzemelerdir. Elastisite teorisinin temelleri 1822 de Cauchy tarafından atılmıştır. Cauchy elastik bir ortamın hareket denklemlerini, yerdeğiştirmeler cinsinden elde etmiş ve bugün kullandığımız izotrop ortamlar için gerilme şekil değiştirme bağıntılarını, bu bağıntıların lineer olduğu ve gerilmelerin asal düzlemlerinin, şekil değiştirmelerin asal eksenlerine dik oldukları varsayımlarını kullanarak elde etmiştir. Elastik dalga yayılımı ile ilgili çeşitli problemlerin incelenmesi ayrı bir matematiksel fizik dalı olarak devam etmiş ve bu problemler sismoloji, jeofizik, petrol mühendisliği, malzemelerin hasarsız muayenesi, elektronik sinyal işlem cihazları teknolojisinde önemli uygulama alanları bulmuştur, (Bknz. [1–5]). Elastik ortamda dalga evrimi genel olarak şu üç önemli faktöre göre belirlenir: Dispersiyon, lineer olmama ve homojen olmama.

19. yüzyılın sonlarına doğru depremlerin sismografik kayıtları yapılmaya başlandığında, deprem sırasında ortaya çıkan enerjinin enine, boyuna ve Rayleigh dalgalarına karşı gelen cisim ve yüzey dalgalarıyla iletildiği tespit edilmiştir. Yeryüzünün iç yapısında deprem ya da patlama gibi sismik bir olay sonucu meydana gelen cisim dalgalarından en hızlı olanı ve sismograf tarafından ilk ölçüleni P (primary) dalgasıdır. P dalgası boyuna dalgadır, yani yayılma doğrultusu parçacıkların hareket doğrultusuna her zaman paraleldir ve katı, gerilimi ve sıkışabilir gerilmeyi iletir. Hızı daha yavaş olan ve ikinci ölçülen dalga S (secondary veya shear) dalgasıdır. S dalgası enine dalgadır yani parçacık hareketi dalgaların yayılma yönüne diktir ve kayma

gerilmesini iletir. Yüzey dalgaları ise P ve S dalgaları yüzeye ulaştığı zaman ortaya çıkarlar, geniş bir frekans aralığında yayılırlar ve en tahrip edici dalgalardır. Yüzey dalgalarından biri olan ve Lord Rayleigh tarafından keşfedilen Rayleigh dalgaları hem enine hem de boyuna hareketi içerir. Rayleigh dalgaları dispersif değildir, yani faz hızları sabittir. Oysaki uzun periyotlu ilk sismogramlar bile yüzey dalgası katarlarında, büyük enine yer değiştirme bileşenlerine sahip dispersif dalgalar kaydetmişlerdir. Bu durum, yüzey dalgalarının bir başka tipinin olası varlığına işaret etmiştir. A. E. H. Love bunun yer yüzünün tabakalı yapısının bir sonucu olduğunu düşünmüş ve Love dalgaları olarak adlandırılan, farklı mekaniksel özelliklere sahip düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı homojen izotrop lineer elastik bir yarım uzayda, yayılma düzlemine dik yer değiştirmelere sahip dispersif yüzey dalgalarının varlığını teorik olarak göstermiştir, [3]. Yer yüzeyinin iki tabakasının temas ettiği yüzeyin civarında meydana gelen Love dalgaları deprem sırasında direkt olarak hissettiğimiz en hızlı enine yayılan yüzey dalgasıdır, [6]. Homojen, izotrop malzemeden oluşan sonsuz ortamlarda yayılan boyuna ve enine dalgalar da Rayleigh dalgaları gibi dispersif değildirler. Diğer taraftan homojen, izotrop, elastik malzemeden meydana gelen çubuk, plak ve farklı malzemeden oluşan tabakalı yarım uzay gibi genel olarak dalga klavuzu olarak adlandırılan ortamlarda yayılan dalgalar, sınır yüzeylerinde oluşan yansımaların etkisiyle dispersif olurlar, yani faz hızları dalga sayısına bağlı olarak değişir. Hem dispersif, hem de dispersif olmayan lineer elastik dalgalarla ilgili problemler yukarıda belirtilen uygulama alanlarının da etkisi ile 19. yüzyılın ortalarından günümüze kadar bir çok çalışmanın konusunu oluşturmuştur.

Yakın tarihte hem lineer olmamanın hem de dispersiyonun aynı anda etkili olduğu yayılma olaylarını karakterize eden lineer olmayan kısmi türevli denklemler türetilmiştir ve asimptotik pertürbasyon yöntemleri kullanılarak lineer olmayan elastik ortamlarda çeşitli dispersif dalga yayılımı problemleri incelenmiştir. Bu çalışmaların bir kısmında düzgün kalınlıklı tabakayla kaplı, homojen, izotrop, lineer olmayan elastik yarım uzayda Love (SH) tipi yüzey dalgalarının yayılması ile ilgilenilmiştir. Teymur, sabit kalınlıklı bir tabakayla kaplı homojen, izotropik, sıkışabilir hiperelastik bir yarım uzayda zayıf nonlineerliğe sahip küçük ama sonlu genlikli Love dalgalarının yayılımını incelemiştir, [7]. Bu çalışmada, asimptotik bir pertürbasyon yöntemi ile zayıf nonlineerlikle dispersiyonun etkilerinin dengelenmesi

sonucunda, dalga modülasyonunun genlik fonksiyonunun asimptotik olarak bir lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Daha sonra aynı problem lineer elastik bir malzemedен oluşan çok ince tabakalı yarım uzay modeli için Maugin tarafından icelenmiştir, [8]. Teymur ve diğ., [9], ince fakat lineer olmayan elastik bir tabakayla kaplı yarım uzay modelinde Love dalga yayılımını çalışmış ve sonuçları Maugin'in lineer ince tabaka yaklaşımıyla ve [7]'deki çalışmayla kıyaslamıştır. Tüm bu bahsedilen çalışmalarda, asimptotik bir pertürbasyon yöntemi ile zayıf nonlinearlikle dispersiyonun etkilerinin dengelenmesi sonucunda dalga modülasyonunun genlik fonksiyonunun asimptotik olarak lineer olmayan bir Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiş ve soliton tipi dalgaların varlığı araştırılmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalar tek tabakalı yarım uzay modeli için yürütülmüştür. Ancak yeryüzü farklı elastik tabakalardan oluşmaktadır. Jeffrey, yer kabuğunun kıtasal kısımlarının kalınlığını hesaplamak amacıyla, kayadan oluşan bir yarım uzay üzerinde bir granit tabakanın bulunduğu varsayımı ile bu granit tabakanın kalınlığını hesaplamıştır, [10]. Stoneley ve Tillotson bu sonucu, hesaplamalarda granit tabakanın altında bir bazalt tabakanın olduğunun dikkate alınmamasından dolayı yetersiz bulmuş ve en üst tabakanın granit, ara tabakanın bazalt ve yarım uzayın da tabakalardan daha yoğun kaya olduğunu kabul ederek iki tabakalı bir model geliştirmiştir, [11]. Bir tabakalı yarım uzayda yatay polarize olmuş yüzey kayma dalgalarının (SH), tabakanın kayma hızının yarım uzayinkinden daha yavaş olduğu durumda, yavaş tabakanın sınır yüzeyleri arasındaki çoklu yansımalarından dolayı dipersif olduğu biliniyordu, [3]. Stoneley ve Tillotson, tek tabakalı yarım uzayda Love dalgaları teorisini iki tabakalı yarım uzay modeli için genişletmiş; sırasıyla üst tabaka, ara tabaka ve yarım uzaya ait lineer kayma hızları  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  olmak üzere, bu hızların  $c_1 < c_2 < c_3$  eşitsizliğini sağladığını kabul etmiş ve bu dalgaların faz hızı  $c$  olmak üzere,  $c_1 < c_2 < c < c_3$  ya da  $c_1 < c < c_2 < c_3$  koşullarından birini sağlaması halinde SH tipi yüzey dalgalarının yayılabileceğini göstermiştir, [11]. Stoneley, yine jeofizik tabanlı bir problemle ilgili olarak, ara tabakanın hızının üst tabakaninkinden daha düşük olması durumunda yani,  $c_2 < c_1 < c_3$  için, faz hızının  $c_2 < c_1 < c < c_3$  ya da  $c_2 < c < c_1 < c_3$  koşullarından birini sağlaması halinde SH tipi yüzey dalgalarının yayılacaklarını ortaya çıkarmış ve yavaş ara tabakanın SH dalga yayılımı üzerindeki

etkilerini incelemiştir, [12]. Stoneley'in bu çalışmalarının ışığında, farklı mekanik özelliklere sahip lineer iki tabakayla kaplı bir yarım uzayda SH dalga yayılımı ve yavaş tabakanın dalga yayılımına etkisi de bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bath, yer yüzünün kabuğunda birçok düşük hızlı tabakanın varlığıyla ilgili deneysel ve teorik sonuçlara yer vermiştir, [13]. Dorman, iki tabakayla kaplı bir yarım uzayda yayılan Love dalgalarının faz ve grup hızını nümerik olarak hesaplamıştır, [14]. Novotny, yeryüzü kabuğunun iki tabakalı bir modelinde sönümsüz Love dalgalarının modlarını incelemiştir, [15]. Avtar, iki tabakayla kaplı homojen olmayan bir yarım uzayda yayılan Love dalgaları için dispersiyon bağıntısını türetmiş ve bazı özel durumlar için hareket denklemlerinin çözümlerini araştırmıştır, [16]. Li ve diğ. iki tabakalı bir yarım uzay modeli önermiş, yavaş ara tabakanın elastik katsayısının ve tabaka kalınlığının, piezoelektrik katmanlı sistemlerde yayılan Love dalgaları üzerindeki etkisini araştırmak için dispersiyon bağıntısını türetmiştir, [17]. İki tabakalı ortamlarda bünyesel nonlineerliğin etkilerinin incelenmesi de güncel çalışmalar arasındadır. Var , Stonoley'in 1928'de incelediği modeli ele almış ve ortamı oluşturan malzemelerin lineer olmayan özelliklerini de hesaba katarak, iki tabakalı bir yarım uzayda lineer olmayan yüzey SH dalga yayılımı problemini incelemiştir, [18]. Ahmetolan ve Teymur, düzgün kalınlıklı, lineer olmayan, elastik iki tabakalı bir levhada SH dalga modülasyonunun genlik fonksiyonunun asimptotik olarak lineer olmayan Schrödinger denklemi ile karakterize edilebileceğini göstermiş, tabakaların kalınlıkları oranının ve lineer olmayan malzeme özelliklerinin soliton tipi dalga yayılımı üzerindeki etkilerini incelemiştir, [19]. Kayestha ve diğ., iki tabakayla kaplı ön gerilmeli, sıkışabilir, elastik bir yarım uzayda yayılan sonlu genlikli Love dalgaları için enerji yoğunluğu, enerji akısı ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir, [20].

Tezin ilk problemi olarak, ortamı oluşturan malzemelerin lineer olmayan özellikleri de hesaba katılarak, sabit kalınlıklı ve farklı malzemelerden oluşan iki tabakayla kaplı homojen, izotrop, sıkışmaz hiperelastik bir yarım uzayda lineer olmayan yüzey SH dalgalarının yayılması incelenmiştir. Ara tabakanın lineer kayma hızının, üst tabakanın ve yarım uzayın lineer kayma hızlarından küçük olduğu, yani  $c_2 < c_1 < c_3$  eşitsizliklerinin sağlandığı kabul edilerek yavaş ara tabakanın lineer olmayan malzeme özelliklerinin SH dalga yayılımı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. İncelediğimiz probleme karşı gelen lineer problem ilk defa Stoneley tarafından ele alınmış ve faz

hızının  $c_2 < c_1 < c < c_3$  ya da  $c_2 < c < c_1 < c_3$  eşitsizliklerini sağladığı durumlarda SH tipi yüzey dalgalarının yayılabilecekleri gösterilmiştir, [12]. Çalışmamızda problem bu iki koşul altında incelenmiştir. Öncelikle neo-Hookean malzemedeki oluşan iki tabakalı yarım uzayda lineer olmayan SH dalga yayılımını modelleyen hareket denklemleri ve sınır koşulları türetilmiştir. Ardından, elde edilen lineer olmayan sınır değer problemi lineerleştirilerek dalga yayılımının mevcut olduğu durumlar için dispersiyon bağıntıları türetilmiş ve bu bağıntıların çeşitli dalları grafiklendirilmiştir. Grafiklerden, tabakaların kalınlıkları oranının ve ikinci bir tabakanın varlığının lineer dalga yayılımı üzerine etkileri gözlemlenmiştir. Daha sonra, dispersiyonun olduğu durumlarda lineer olmayan SH dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Yavaş modüle edilmiş bir dalga katarı, dalganın fazı hızlı ölçekli olmak üzere; dalganın genliği, boyu gibi dalga modülasyon parametreleri ise yavaş ölçekli olmak üzere iki ölçek içermektedir. Yani yüzey dalgaları, biri hızlı diğeri yavaş olmak üzere iki ölçekli bir dalga yayılımını karakterize etmektedir. Dolayısıyla çoklu ölçekler metodu ve asimptotik analiz yöntemleri, yüzey dalgalarının davranışını karakterize eden çalışmalar için faydalı matematiksel tekniklerdir. Bu sebeple çoklu ölçekler metodu kullanılarak, lineer olmayan SH dalgalarının yavaş modülasyonu asimptotik olarak lineer olmayan bir Schrödinger denklemi ile karakterize edilmiştir. Bu denklemin katsayıları, lineer ve lineer olmayan malzeme parametrelerine, tabakaların kalınlıkları oranına ve ayrıca dalga sayısına bağlıdır. Sabit katsayılı NLS denkleminin çözüm özellikleri, denklemin katsayılar çarpımının işaretine bağlı olduğundan bu çarpımın işaretinin dalga sayısı ile değişimi, malzeme parametrelerine ve tabakaların kalınlıkları oranına uygun değerler verilerek hesaplanmıştır. Lineer olmayan malzemelerin katsayıları üzerindeki, dolayısıyla denklemin çözümleri üzerindeki etkisini gözlemlemek için lineer malzeme parametreleri sabit tutulurken, çeşitli lineer olmayan malzeme parametreleri için hesaplamalar yapılarak, yavaş ara tabakanın lineer olmayan özelliklerinin zarf soliton ve dark soliton tipi dalgaların varlığı üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Yüzey SH (Love) dalga yayılımının, yavaş ara tabakayı oluşturan malzemelerin lineer olmayan özelliklerinden kuvvetli bir şekilde etkilendiği ve uzun dalgalar için yarım uzayın lineer olmayan özelliklerinin dalga modülasyonunu domine ettiği grafiklerle gösterilmiştir. Ara tabakanın kalınlığının sifira gittiği limit durumunda, iki tabakalı yarım uzayda lineer olmayan yüzey SH dalga yayılımını karakterize eden NLS denklemi, tek tabakalı yarım uzayda yüzey SH dalgalarını

asimptotik olarak karakterize eden NLS denkleminde indirgenmektedir. İki tabakalı yarım uzay ve tek tabakalı yarım uzay modellerinde SH dalga yayılımını karakterize eden NLS denklemlerinin çözüm özellikleri karşılaştırılarak, zarf soliton ve dark soliton tipi SH dalga yayılımının ikinci bir tabakanın varlığından kayda değer bir biçimde etkilendiği gözlemlenmiştir.

Yukarıda bahsedilen lineer olmayan SH dalga yayılımı problemleri düzgün (uniform) kalınlıklı tabakalı yapılarda incelenmiştir. Yani tabakaların sınır yüzeyleri düzlemsel ve kalınlıkları sabittir. Ancak kıtasal marjinler, dağ kökleri, dağ havzaları, tuz ve maden yatakları gibi yeryüzünün kabuksal kısımları her zaman düzgün değildir. Sınır yüzeylerindeki değişime bağlı olarak tabaka kalınlığı da değişebilmektedir. Bu durumda dalga yayılımı sadece ortamın malzeme özelliklerinden değil pürüzlü yüzey ve arayüzeylerin şekil değişiminden de etkilenir. Düzensiz sınır yüzeylere sahip tabakalarda elastik yüzey dalga yayılımı problemleri, kıta sınırları boyunca ve değişken kabuk kalınlıklı diğer yeryüzü bölgelerinde sismik dalga yayılımına model teşkil etmesi açısından depremlere bağlı hasarların nedenlerini belirlemede ve hasar tahmini çalışmalarında önemli rol oynamaktadır. Ayrıca farklı elastik tabakalardan oluşan yeryüzünün kıtasal bölgelerinde yüzey elastik dalgaları, yeryüzünün yüzeyinde saklı gaz, mineral, petrol gibi doğal kaynakların keşfi için de tabakalı yapı hakkında önemli bilgiler verir. Bu sebeple, kabuksal kalınlıktaki değişimin lineer SH dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerindeki etkileri birçok yazar tarafından incelenmiştir. Tabakanın sınır yüzeylerindeki keyfi bir değişim için dalga yayılımı analizi oldukça kompleks olduğundan bir çok yazar problemi bazı varsayımlar altında ele almıştır. Honma, yavaş ve lineer bir şekilde değişen kalınlığa sahip bir yüzey tabakasında, Love dalgasının yaklaşık anlamda iletilebileceğini göstermiştir, [21]. Noyer, sinüsoidal değişen arayüzeye sahip tabakalı bir yarım uzayda yayılan Love dalgaları için dispersion bağıntısını türetmiş ve düzlem harmonik dalga çözümünü incelemiştir, [22]. Sato, düzlem tabakasının kalınlığında bir sıçramalı süreksizliğin olduğunu kabul ederek probleme farklı bir yaklaşım sunmuş ve yüzey tabakanın daha kalın tarafından daha ince tarafına geçerken Love dalgalarının kırılma problemini incelemiştir, [23]. Mal, dağlık bölgelerdeki kabuk tabakadaki ani kalınlaşmaların Love dalgalarının dispersiyon bağıntısı üzerindeki etkisini incelemiştir, [24]. Ghosh, Green fonksiyonunu kullanarak sınırların eğiminden kaynaklanan Love dalgalarının



sönümünü hesaplamıştır, [25]. Takahashi, arayüzeyi ya da serbest yüzeyi hiperbolik bir şekilde değişen bir tabakayla kaplı yarım uzayda Love dalga yayılımını ele almış ve çeşitli modlarda yaklaşık çözümlerin mevcut olduğunu göstermiştir, [26]. Paul, elastik ortamlardaki hafif kavisli sınırların, yüzey dalgalarının yayılımı sırasında ortamdaki bir parçacığın yerdeğiştirme bileşenleri üzerindeki etkisini incelemiştir, [27]. Ayrıca, küçük genlikli sinüzoidal tip serbest yüzeye sahip bir elastik yarım uzayda Rayleigh dalgalarının, küçük genlikli sinüzoidal tip serbest yüzeye ve arayüzeye sahip bir tabakalı yarım uzayda da Love dalgalarının yayılmasının mümkün olduğunu göstermiştir. Rulf ve diğ. [28], eğimli yüzeyler civarında ve sabit olmayan kalınlıklı tabakalarda klavuzlanmış yüksek frekanslı elastik dalgaların yayılımını araştırmıştır ve tabakalı bir yarım uzayda yayılan Love dalgalarının, tek bir serbest yüzey tarafından klavuzlanmış Rayleigh dalgalarının ve bir plak ya da iki serbest yüzeyli bir tabaka ile klavuzlanmış Lamb dalgalarının yayılımı problemlerine ilk defa Keller [29], tarafından ortaya konulan bir asimptotik metodu adapte etmiştir. Wolf, bir pertürbasyon metodu kullanarak elastik yarım uzay üzerine oturtulmuş kısmen düzensiz serbest yüzeyli tabakada Love dalgalarının saçılımı problemini çalışmıştır, [30, 31]. Gjevik, hem arayüzeyin hem de serbest yüzeyin dalganın yayılma yönünde yavaş değiştiği tabakalı bir yarım uzayda Love dalgalarının modülasyonu için bir varyasyonel yaklaşım formüle etmiştir, [32]. Bu yöntem ile dalgaların genliği, dalga sayısı ve frekanstaki yavaş değişimi karakterize eden denklemleri elde etmiştir. Bhattacharyya, periyodik düzensizliklere sahip elastik bir ortamda SH dalgalarının yansıma ve kırılma problemini incelemiş ve çözümleri Fourier transformu yardımıyla elde etmiştir, [33]. Markenscoff ve Lekoudis, Gjevik'in incelediği modeli ele almış, hem arayüzeyin hem de serbest yüzeyin yavaş değiştiği yani sınır koşullarındaki düzensizliğin genliğinin, tabaka kalınlığına kıyasla çok küçük olduğu tabakalı bir yarım uzayda Love dalgalarının lineer yayılımı problemi için çoklu ölçekler metodunu kullanarak düzgün geçerli bir asimptotik çözüm sunmuştur, [34]. Hador ve Buchen, değişken kalınlıklı birden çok tabakalı yapılarda Love ve Rayleigh dalgalarının yayılımını incelemek için Whitham teorisi yardımıyla bir pertürbasyon formülü türetmiştir, [35, 36]. Acharya ve Roy, arayüzeye ait parabolik ve dikdörtgenel düzensizliklerin, magneto elastik kıtasal bir tabakayla kaplı izotropik elastik yarı sonsuz bir ortamdaki SH dalga yayılımı üzerindeki etkisini incelemiştir, [37]. Singh, salınımlı sınır yüzeylere sahip bir tabakalı yarım uzayda yayılan Love dalgalarının

faz ve grup hızlarını nümerik olarak hesaplamıştır, [38]. Kundu ve diğ., düzensiz sınır yüzeylere sahip homojen bir tabaka ile kaplı gözenekli bir yarım uzayda Love dalgalarının varlığını araştırmış ve bazı özel durumlar için dispersiyon denklemini türetmiştir, [39].

Su dalgalarında da benzer çalışmalar yürütülmüştür. Kawahara, çoklu ölçekler metodunun genişletilmiş bir formunu, yavaş değişen derinlikli sıvı bir tabaka üzerinde lineer olmayan kılcıl-yerçekimi (capillary-gravity) dalgalarına uygulamıştır, [40]. Sınır koşullarındaki düzensizliklerin etkilerini içeren lineer olmayan Schrödinger denkleminin ve uzun dalgaların yayılımı için Korteweg-de Vries (KDV) denkleminin genelleştirilmiş ifadelerini türetmiş; kullandığı metodun diğer lineer olmayan, dispersif ve homojen olmayan sistemlere uygulanabileceğini belirtmiştir. Ayrıca literatürde bir çok yazar tarafından ortalama Lagrangian temeline dayanan Whitham tekniği, homojen olmama durumlarını içeren çeşitli lineer olmayan dalga problemlerine başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bretherton ve diğ., Whitham tekniğine dayanarak, yavaş değişen bir dalga katarının dalga sayısındaki ve frekansındaki değişikliklerin, belli yollar boyunca (ışınlar ve karakteristikler gibi) belirlenebileceğini göstermiştir, [41]. Ayrıca ortalama Lagrangian temeline dayanan Whitham tekniğinin sonuçlarının, iki zamanlama (two timing) tekniğine dayanan formal pertürbasyon açılımının ilk yaklaşımıyla elde edilen sonuçlara denk olduğunu göstermiştir. Djordjevic ve diğ., bir pertürbasyon yöntemi kullanarak, değişken derinlikli bir ortamda yayılan yerçekimi dalgalarını (gravity waves) asimptotik olarak karakterize eden değişken katsayılı genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger denklemini türetmiş, sığ su dalgaları limiti için de bu denklemden KdV denklemini elde etmiş ve bir shelf (raf) üzerinde dalga paketi yayılımını incelemiştir, [42]. Pürüzlü yüzeyler, akustik dalga yayılımı için de önem teşkil etmektedir. Duparc ve Maradudin, bir düzlemsel, gerilmesiz yüzey ile sınırlı izotropik elastik yarı sonsuz ortamda, sagittal düzleme dik polarize olmuş yüzey akustik SH dalgalarının mevcut olmadığını söylemiş ve bir elastik izotropik ortamın pürüzlü düzlemsel yüzeyinde akustik yüzey SH dalgalarının mevcut olduğunu göstermiştir, [43]. Çeşitli ortamlarda pürüzlü yüzeylerin dalga yayılımına etkileri ve dalga yayılımını temsil eden diferansiyel denklemlerin davranışının incelenmesi günümüze kadar devam etmektedir.

Bu tez çalışmasının ikinci problemi olarak, lineer olmama durumunun yanı sıra tabakalı ortamın sınırlarındaki düzensizliklerin de SH tipi yüzey dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Düzgün olmayan sınır yüzeylere sahip değişken kalınlıklı bir tabakayla kaplı homojen, izotrop, lineer olmayan elastik yarım uzayda SH tipi yüzey dalgalarının yayılmasını karakterize eden hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları türetilmiştir. Sınır yüzeylerindeki değişimin dalgaların yayılma doğrultusunda olduğu kabul edilerek elde edilen model, lineer olmayan hareket denklemleri ve değişken katsayılı lineer olmayan sınır koşullarından oluşmaktadır. Öncelikle, elde edilen sınır değer problemi lineerleştirilerek lineer dalga yayılımı incelenmiştir. Sınır yüzeylerindeki keyfi bir değişim için dalga yayılımı analizi oldukça kompleks olduğundan yüzeylerin, dalganın yayılma yönünde yavaş değiştiği kabul edilmiştir.  $\varepsilon > 0$  küçük bir parametre olmak üzere, sınır yüzeylerdeki yavaş değişimin  $\varepsilon$  mertebesinde olduğu kabul edilmiştir. Sınırlardaki değişime bağlı olarak, dalgayı karakterize eden özelliklerdeki yavaş değişimi açıkça ortaya çıkarmak için çoklu ölçekler metodu kullanılarak lineer Love dalga yayılımını karakterize eden asimptotik bir çözüm elde edilmiştir. Lineer olmayan dalga yayılımı probleminde, yavaş değişim ölçeği  $\varepsilon$  mertebesinde seçildiğinde, dispersiyon ile nonlinearlik birbirlerini dengeleyememekte ve NLS denklemi dalga modülasyonunu karakterize edememektedir. Bu sebeple, değişken derinlikli ortamda yayılan su dalgalarındaki çalışmalarda da olduğu gibi sınır yüzeylerin,  $\varepsilon^2$  ölçeğinin fonksiyonları olduğu kabul edilmiştir, [42, 44, 45]. Yavaş değişimin etkisini ortaya çıkarmak ve en genel anlamda lineer olmayan evrim denklemini türetebilmek için daha önceki problemlerin çözümünde tanımlanan değişkenlerden farklı değişkenler tanımlanarak çoklu ölçekler pertürbasyon yöntemi kullanılmış ve genel bir geometri için SH dalgalarının lineer olmayan modülasyonunun asimptotik olarak değişken katsayılı genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger (GNLS) denklemi ile karakterize edildiği gösterilmiştir. Bu denklemin katsayıları, lineer ve lineer olmayan malzeme parametrelerine, yavaş değişen sınır yüzeylerine ve dalga sayısına bağlıdır. Sınır yüzeylerindeki düzensizlikleri temsil eden fonksiyonlar ihmal edildiğinde, problemin geometrisi düzgün kalınlıklı tabakayla kaplı bir yarım uzaya dönüşmekte ve GNLS denklemi de böyle bir ortamda yayılan lineer olmayan Love dalgalarını karakterize eden sabit katsayılı NLS denklemine indirgenmektedir. Sabit katsayılı NLS denklemi her zaman integrallenebilir olmasına rağmen, GNLS denklemi sınır

yüzeylerindeki düzensizlikleri içeren değişken katsayılarından dolayı integrallenebilir olmayabilir. Çalışmamızda önerilen bir ansatz yardımıyla GNLS denkleminin integrallenebilirlik koşulu türetilmiş ve bu koşul altında zarf soliton ve dark soliton benzeri çözümleri analitik olarak elde edilmiştir. Düzensizliklerin GNLS denkleminin integrallenebilirliğini koruduğu bazı özel durumlar araştırılmış ve bu durumlar için elde edilen soliton benzeri çözümler kullanılarak nonlineerliğin yanı sıra sınırlardaki düzensizliklerin de dalga yayılımına etkileri incelenmiştir. GNLS denkleminin integrallenebilir olmadığı diğer bazı özel durumlar için çözümler, pseudospectral yöntem yardımıyla nümerik olarak araştırılmıştır. Sınır yüzeylerindeki değişimin periyodik olduğu kabul edilerek çeşitli lineer olmayan malzeme parametreleri için elde edilen soliton benzeri çözümlerin grafikleri incelenmiş, tabakalı yarım uzayın sınır yüzeylerindeki ondülasyonların, bright soliton benzeri ve dark soliton benzeri dalgalar üzerinde salınımlara yol açtığı gözlemlenmiştir. Ayrıca sınırlardaki ondülasyonun genliğindeki artışın soliton benzeri SH dalgalarının genliğinde de artışa sebep olduğu gösterilmiştir. Serbest yüzeydeki salınımla arayüzeydeki salınının lineer olmayan dalga yayılımı üzerindeki etkileri arasındaki farkı ortaya çıkarmak için, sadece bir yüzeyin salınımlı diğer yüzeyin düzlemsel olduğu durumlar incelenmiştir. Serbest yüzeydeki salınının bright soliton benzeri dalga yayılımında daha belirgin etkiye sahip olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca lineer olmayan dalga evrimi sırasında enerji analiziyle de, serbest yüzeydeki ondülasyonun arayüze kıyasla daha çok enerji değişimine sebep olduğu ve dolayısıyla lineer olmayan dalga yayılımı üzerinde daha etkili olduğu gözlemlenmiştir.

## 2. İKİ TABAKALI LİNEER OLMAYAN ELASTİK BİR YARIM UZAYDA YÜZEY SH DALGA YAYILIMINA YAVAŞ ARA TABAKANIN ETKİSİ

Bu bölümde, sabit kalınlıklı farklı hiperelastik malzemelerden oluşan lineer olmayan iki tabakayla kaplı bir yarım uzayda yatay polarize olmuş yüzey kayma (SH) dalgalarının yavaş modülasyonu incelenmiştir. Ara tabakanın lineer kayma hızının, üst tabakanın ve yarım uzayın lineer kayma hızlarından küçük olduğu, yani sırasıyla üst tabaka, ara tabaka ve yarım uzaya ait lineer kayma hızları  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  olmak üzere  $c_2 < c_1 < c_3$  eşitsizliklerinin sağlandığı kabul edilmiştir. Stoneley, ele aldığımız probleme karşı gelen lineer problemi incelemiş ve faz hızının  $c_2 < c_1 < c < c_3$  ya da  $c_2 < c < c_1 < c_3$  eşitsizliklerini sağladığı durumlarda SH tipi yüzey dalgalarının yayılabileceklerini göstermiştir, [12]. Çalışmamızda problem, bu iki koşul altında incelenmiştir. Yarım uzay ve tabakaların, homojen, izotrop, sıkışmaz hiperelastik ve birbirinden farklı mekanik özelliklere sahip genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluştuğu kabul edilmiştir, [46]. Ek A bölümünde verilen genelleştirilmiş neo-Hookean malzemede düzlem dışı kayma dalgalarına ait analizden yararlanılarak lineer olmayan SH dalga yayılımını modelleyen lineer olmayan hareket denklemleri ve sınır koşulları türetilmiştir. Daha sonra, lineer dalgaların yayılması problemi ele alınmış ve dalga yayılımının mevcut olduğu durumlarda dispersiyon bağıntıları türetilerek, tabakaların kalınlıkları oranının ve ikinci bir tabakanın varlığının lineer dalga yayılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Ardından, çoklu ölçekler metodu kullanılarak lineer olmayan dalga modülasyonunun genlik fonksiyonu asimptotik olarak lineer olmayan bir Schrödinger denklemi ile karakterize edilmiştir. NLS denkleminin çözüm özelliklerinden yararlanarak, yavaş ara tabakanın lineer olmayan özelliklerinin soliton tipi dalgaların varlığı üzerindeki etkileri grafiklerle incelenmiştir. Ayrıca ikinci tabakanın varlığının dalga yayılımı üzerine etkisini gözlemlemek için, iki tabakalı yarım uzay ve tek tabakalı yarım uzay modelleri için türetilen NLS denklemlerinin çözüm özellikleri karşılaştırılarak ikinci

bir tabakanın zarf soliton ve dark soliton tipi dalga yayılımını önemli ölçüde etkilediği gözlemlenmiştir.

## 2.1 Problemin Formülasyonu

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen takımına göre maddesel ve uzaysal koordinatları sırasıyla  $(X_1, X_2, X_3)$  ve  $(x_1, x_2, x_3)$  olsun.  $h_1$  ve  $h_2$  pozitif sabitler olmak üzere, başlangıç konumunda

$$P_1 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid 0 < X_2 < h_1, \quad -\infty < X_1 < \infty, \quad -\infty < X_3 < \infty\} \quad (2.1)$$

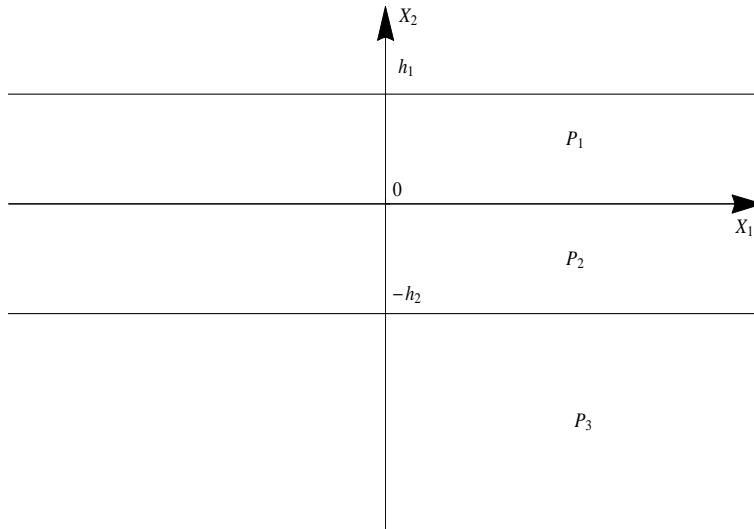
ve

$$P_2 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -h_2 < X_2 < 0, \quad -\infty < X_1 < \infty, \quad -\infty < X_3 < \infty\} \quad (2.2)$$

bölgelerini dolduran, sabit kalınlıklı, homojen, farklı hiperelastik malzemelerden oluşan iki tabakayla kaplı

$$P_3 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -\infty < X_2 < -h_2, \quad -\infty < X_1 < \infty, \quad -\infty < X_3 < \infty\} \quad (2.3)$$

bölgesini dolduran ve tabakalardan farklı bir hiperelastik malzemedan oluşan yarım uzay modeli ele alınmıştır. Problemin geometrisi Şekil 2.1'de gösterilmiştir.  $X_2 = h_1$  serbest yüzeyinin gerilmesiz olduğu,  $X_2 = 0$  ve  $X_2 = -h_2$  arayüzeyleri boyunca yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu, ayrıca  $X_2 \rightarrow -\infty$  için yarım uzayda yer değiştirmenin sifira gittiği (radyasyon koşulu) kabul edilmiştir.



Şekil 2.1 : Problemin geometrisi.

Tabakalı yarım uzayda  $X_1$  eksenini boyunca yayılan yatay polarize olmuş yüzey kayma dalgaları aşağıdaki denklemlerle tanımlanmaktadır:

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 + u^{(r)}(X_1, X_2, t), \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Burada, bir alan büyüklüğü üzerindeki parantez içindeki indis, büyüklüğün hangi bölgeye ait olduğunu göstermektedir.  $t$  zaman,  $u^{(r)}$  ise  $P_r$  bölgesindeki bir parçacığın  $X_3$  yönündeki yer değiştirme fonksiyonudur.  $\det x_{k,K} = 1$  olduğundan (2.4) ile verilen genelleştirilmiş kayma hareketi izokorik bir şekil değiştirir, yani bu hareket esnasında hacim değişimi olmamaktadır. Buna bağlı olarak böyle bir hareketin meydana geldiği ortamın yoğunlukları da,  $\rho^{(r)}$   $r = 1, 2, 3$  için, sabittir.

$T_{Kl}^{(r)}$  birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörü olmak üzere, (2.4) ile tanımlanan hareketin referans konumundaki denklemleri, harekete etki eden kütle kuvvetleri bulunmadığında aşağıdaki şekildedir, [47]:

$$T_{K\beta,K}^{(r)} = 0, \quad \beta = 1, 2; \quad T_{K3,K}^{(r)} = \rho^{(r)} \ddot{u}^{(r)}, \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Burada, virgülden sonraki alt indis maddesel koordinata göre kısmi türevi ve büyüklüğün üzerindeki her bir nokta zamana göre kısmi türevi göstermektedir. İndislerdeki Yunan harflerinin 1'den 2'ye kadar, Latin harflerinin 1'den 3'e kadar değerler alacakları ve tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar toplam olduğu kabul edilmektedir. Görüldüğü gibi her bir  $u^{(r)}$  tarafından sağlanması gereken üç tane hareket denklemi bulunmaktadır. (2.5)'teki ilk iki denklem özdeş olarak sağlanırsa  $u^{(r)}$  fonksiyonu tek bir denklemin çözümü olarak belirlenebilir.

Sınır koşulları,  $X_2 = h_1$  serbest yüzeyi üzerinde gerilmelerin sıfır olduğu varsayımıyla,

$$X_2 = h_1 \text{ 'de, } \quad N_k^{(1)} T_{kl}^{(1)} = 0 \quad l = 1, 2, 3; \quad (2.6)$$

$X_2 = 0$  ve  $X_2 = -h_2$  arayüzeyleri boyunca yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu ve  $X_2 \rightarrow -\infty$  için yer değiştirmenin sıfıra gittiği kabulüyle,

$$X_2 = 0 \text{ 'da, } \quad N_k^{(2)} T_{kl}^{(1)} = N_k^{(2)} T_{kl}^{(2)} \quad \text{ve} \quad u^{(1)} = u^{(2)} \quad (2.7)$$

ve

$$X_2 = -h_2 \text{ 'de, } \quad N_k^{(3)} T_{kl}^{(2)} = N_k^{(3)} T_{kl}^{(3)} \quad \text{ve} \quad u^{(2)} = u^{(3)} \quad (2.8)$$

$$X_2 \rightarrow -\infty \quad \text{iken} \quad u^{(3)} \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

olarak elde edilir. Burada  $N_k^{(1)}, N_k^{(2)}, N_k^{(3)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) sırasıyla

$$F_1(X_2) = X_2 - h_1 = 0, \quad F_2(X_2) = X_2 = 0 \quad \text{ve} \quad F_3(X_2) = X_2 + h_2 = 0 \quad (2.10)$$

yüzeylerinin normal vektörlerinin bileşenleri olmak üzere, normal vektörleri aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\mathbf{N}^{(i)} = \nabla F_i = \mathbf{j} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.11)$$

Şimdi, tabakaların ve yarım uzayın lineer olmayan, homojen, izotrop, sıkışmaz hiperelastik malzemelerden oluştuğu ve gerilme potansiyelinin, Finger şekil değiştirme tansörünün  $\mathbf{c}^{-1} = [x_{k,K}x_{l,K}]$ , sadece birinci invaryantının bir fonksiyonu olduğu, yani  $\Sigma^{(r)} = \Sigma^{(r)}(I^{(r)})$ ,  $r = 1, 2, 3$ , olduğu kabul edilecektir. Bu malzemeler genelleştirilmiş neo-Heoken malzeme olarak adlandırılmaktadır, [46]. (2.4) ile tanımlanan şekil değiştirme denklemlerinden birinci invaryantlar Ek A'daki çalışma ile aşağıdaki gibi bulunur:

$$I^{(r)} = 3 + \left( \frac{\partial u^{(r)}}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^{(r)}}{\partial X_2} \right)^2, \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Yine Ek A'dan yararlanılarak birinci tür Piola-Kirchoff tansörünün bileşenleri de aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} T_{11}^{(r)} = T_{22}^{(r)} = T_{12}^{(r)} = T_{21}^{(r)} = T_{33}^{(r)} = 0, \\ \Delta = 1, 2 \quad \text{için} \quad T_{\Delta 3}^{(r)} = T_{3\Delta}^{(r)} = \Phi^{(r)} u_{,\Delta}^{(r)} \quad r = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Böylece (2.5)'teki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve genelleştirilmiş neo-Hookeen malzemedan oluşan iki tabakayla kaplı bir yarım uzayda, (2.4) ile tanımlanan düzlem dışı dalga hareketi, kütle kuvvetlerine ihtiyaç duyulmadan yaratılabilir. Bu çalışmada sadece genelleştirilmiş neo-Hookeen malzeme göz önüne alınmıştır. Genellikle, izotropik sıkışabilir ya da sıkışmaz diğer malzemelerde,  $\Sigma$  gerilme potansiyeli fonksiyonu üzerine bazı kısıtlamalar koymadan (2.5)'teki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanmaz. Bu malzemelerle kaplı ortamlar için [7]'deki ilgili problemde yapıldığı gibi benzer kısıtlamalar altında paralel bir analiz yürütülebilir.

$(X_1, X_2, X_3)$  yerine  $(X, Y, Z)$  yazıldığında (2.5)'teki üçüncü denklem ve (2.6)-(2.9) sınır koşulları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \Phi^{(r)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Phi^{(r)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial Y} \right) = \rho^{(r)} \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial t^2}, \quad r = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$



$$Y = h_1 \text{ 'de; } \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} = 0, \quad (2.15)$$

$$Y = 0 \text{ 'da; } u^{(1)} = u^{(2)} \quad \text{ve} \quad \Phi^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} = \Phi^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y}, \quad (2.16)$$

$$Y = -h_2 \text{ 'de; } u^{(2)} = u^{(3)} \quad \text{ve} \quad \Phi^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} = \Phi^{(3)} \frac{\partial u^{(3)}}{\partial Y}, \quad (2.17)$$

$$Y \rightarrow -\infty \quad \text{iken} \quad u^{(3)} \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

Bu çalışmada küçük ama sonlu genlikli dalga yayılımı problemi inceleneceği için hareket denklemlerinin yaklaşık formları kullanılacaktır. Bu yaklaşık denklemleri türetmek için, gerilme potansiyeli  $\Sigma'$ 'nin,  $[3, \infty)$  aralığında  $I$ 'nin analitik fonksiyonu olduğu kabul edilerek, bu fonksiyon gerilmesiz doğal durumda yani  $I = 3$  civarında Taylor serisine açılır:

$$\Sigma(I) = \Sigma'(3)(I-3) + \frac{1}{2!} \Sigma''(3)(I-3)^2 + \dots \quad (2.19)$$

Hareketin olmadığı referans konumunda yani  $I = 3$  iken, enerjinin sıfır olması için  $\Sigma(3) = 0$  olmalıdır. Ek A'dan  $\Phi^{(r)} = 2 \frac{d\Sigma^{(r)}}{dI}$  olduğu dikkate alınarak, (2.19)'daki açılım (2.14)-(2.17) denklemlerinde yerine konulup, üçüncü ve daha yüksek mertebeden lineer olmayan terimler ihmal edilerek aşağıdaki sınır değer problemi elde edilir:

$$\frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial t^2} - c_r^2 \left( \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial Y^2} \right) = n_r \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u^{(r)}}{\partial X} \mathcal{K}(u^{(r)}) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial u^{(r)}}{\partial Y} \mathcal{K}(u^{(r)}) \right) \right\}, \quad (2.20)$$

$$Y = h_1 \text{ 'de; } \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} = 0, \quad (2.21)$$

$$Y = 0 \text{ 'da; } u^{(1)} = u^{(2)} \quad \text{ve}$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} - \gamma_1 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} = \gamma_1 \beta_2 \mathcal{K}(u^{(2)}) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} - \beta_1 \mathcal{K}(u^{(1)}) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y}, \quad (2.22)$$

$$Y = -h_2 \text{ 'de; } u^{(2)} = u^{(3)} \quad \text{ve}$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} - \gamma_2 \frac{\partial u^{(3)}}{\partial Y} = \gamma_2 \beta_3 \mathcal{K}(u^{(3)}) \frac{\partial u^{(3)}}{\partial Y} - \beta_2 \mathcal{K}(u^{(2)}) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y}, \quad (2.23)$$

$$Y \rightarrow -\infty \quad \text{iken} \quad u^{(3)} \rightarrow 0 \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.24)$$

$$\mathcal{K}(\psi) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2 \quad (2.25)$$

olmak üzere alt indisler ve parantez içindeki üst indisler, büyüklüğün hangi bölgeye karşı geldiğini göstermektedir.  $\mu_r = \Phi^{(r)}(3)$  kayma modülünü,  $n_r = \frac{d\Phi^{(r)}}{dI^{(r)}}(3)/\rho^{(r)}$  lineer olmayan malzeme parametrelerini ve  $c_r^2 = \mu_r/\rho^{(r)}$  olmak üzere  $c_r$ ,  $r = 1, 2, 3$

için sırasıyla üst tabaka, ara tabaka ve yarım uzaya ait lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarını temsil etmektedir. Eğer  $n_r > 0$  ise ilgili malzeme kaymada sertleşen, aksi halde kaymada yumuşayan davranış gösterir.  $\gamma_1, \gamma_2, \beta_r$  sabitleri de  $\gamma_1 = \mu_2/\mu_1$ ,  $\gamma_2 = \mu_3/\mu_2$  ve  $\beta_r = n_r/c_r^2$  olarak tanımlanmaktadır.

## 2.2 Lineer Dalgalar ve Dispersiyon

(2.20)-(2.25) denklemleri ile tanımlanan lineer olmayan sınır değer probleminin çözümleri inşaa edilmeden önce, lineer dalgaların yayılması problemi ele alınmıştır. Bu kısımda, iki tabakalı yarım uzayda yüzey SH dalga yayılımının mevcut olduğu koşullar araştırılmıştır. Bu koşullar için dispersiyon bağıntıları türetilerek tabakaların kalınlıkları oranının ve ikinci bir tabakanın varlığının lineer dalga yayılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Lineer dalgaları betimleyen denklemler, (2.20)-(2.25) denklemlerinde  $r = 1, 2, 3$  için ortamın lineer olmayan özelliklerine ait sabitler  $\beta_r = 0$  alınarak, aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial t^2} - c_r^2 \left( \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial Y^2} \right) = 0, \quad (2.26)$$

$$Y = h_1 \text{ 'de; } \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} = 0, \quad (2.27)$$

$$Y = 0 \text{ 'da; } u^{(1)} = u^{(2)} \text{ ve } \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} - \gamma_1 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} = 0, \quad (2.28)$$

$$Y = -h_2 \text{ 'de; } u^{(2)} = u^{(3)} \text{ ve } \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} - \gamma_2 \frac{\partial u^{(3)}}{\partial Y} = 0, \quad (2.29)$$

$$Y \rightarrow -\infty \text{ iken } u^{(3)} \rightarrow 0 \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.30)$$

Pozitif  $X$  eksenini yönünde yayılan harmonik dalgalar için (2.26) denklemlerinin çözümleri aşağıdaki formda aranabilir:

$$u^{(r)} = U^{(r)}(Y) e^{i(kX - \omega t)} + k.e., \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.31)$$

Burada k.e. bir önceki terimin kompleks eşleniğini göstermektedir.  $k$  dalga sayısı,  $\omega$  açısal frekans olmak üzere dalgaların faz hızı

$$c = \omega/k \quad (2.32)$$

olarak tanımlanır. (2.31) çözüm formu (2.26) denklemlerinde yerine yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{d^2U^{(1)}}{dY^2} + k^2 \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) U^{(1)} = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2U^{(2)}}{dY^2} + k^2 \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) U^{(2)} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{d^2U^{(3)}}{dY^2} + k^2 \left( \frac{c^2}{c_3^2} - 1 \right) U^{(3)} = 0. \quad (2.35)$$

(2.30) radyasyon koşulunun sağlanabilmesi için (2.35) denkleminin çözümlerinin hiperbolik fonksiyonlar olması gerekmektedir. Böyle bir çözüm için ise

$$c < c_3 \quad (2.36)$$

olmalıdır.

Ortamdaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızları  $c_1 < c_2 < c_3$  eşitsizliğini sağladığı durumda iki tabakalı bir yarım uzayda SH tipi yüzey dalgalarının varlığı Stoneley ve Tillotson tarafından, [11], gösterilmiş ve lineer olmayan dalga yayılımı problemi Var , [18], tarafından incelenmiştir. Ara tabakanın hızının üst tabaka ve yarım uzayınkinden daha yavaş olduğu, yani  $c_2 < c_1 < c_3$  durumu için, lineer SH tipi yüzey dalgalarının varlığı ise Stoneley tarafından gösterilmiştir, [12]. Bu tez çalışmasında, tabakaların ve yarım uzayın lineer kayma hızları arasında  $c_2 < c_1 < c_3$  eşitsizliklerinin geçerli olduğu kabul edilerek yavaş ara tabakanın lineer olmayan yüzey SH dalga yayımına etkisi araştırılmıştır. Bu durumda yüzey dalgalarının faz hızı, (2.36) koşulu da göz önünde bulundurulduğunda

$$c_2 < c < c_1 < c_3 \quad (2.37)$$

$$c_2 < c_1 < c < c_3 \quad (2.38)$$

$$c < c_2 < c_1 < c_3 \quad (2.39)$$

eşitsizliklerinden birini sağlamalıdır.

### 2.2.1 $c_2 < c < c_1 < c_3$ hali

Bu koşul altında (2.33)-(2.35) denklemlerinin çözümleri

$$U^{(1)} = Ae^{-kv_1Y} + Be^{kv_1Y}, \quad (2.40)$$

$$U^{(2)} = Ce^{ikp_2Y} + Be^{-ikp_2Y}, \quad (2.41)$$

$$U^{(3)} = Ee^{kv_3Y} \quad (2.42)$$

olarak elde edilir. Burada  $v_1$ ,  $p_2$  ve  $v_3$  aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$v_1^2 = \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) > 0, \quad p_2^2 = \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right) > 0, \quad v_3^2 = \left(1 - \frac{c^2}{c_3^2}\right) > 0. \quad (2.43)$$

Bu çözümler (2.31) kullanılarak (2.27)-(2.29) sınır koşullarında yerine konulursa,

$$\mathbf{U} = (A, B, C, D, E)^T \quad (2.44)$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -kv_1 e^{-V_1} & kv_1 e^{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ -kv_1 & kv_1 & -i\gamma_1 k p_2 & i\gamma_1 k p_2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & ikp_2 e^{-iP_2} & -ikp_2 e^{iP_2} & -\gamma_2 kv_3 e^{-V_3} \\ 0 & 0 & e^{-iP_2} & e^{iP_2} & -e^{-V_3} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

homojen cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$V_1 = kv_1 h_1, \quad P_2 = kp_2 h_2, \quad V_3 = kv_3 h_2 \quad (2.47)$$

olarak tanımlanmıştır. (2.46) denklem sistemin sıfırdan farklı çözüme sahip olabilmesi için

$$\det \mathbf{W} = 0 \quad (2.48)$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{W} &= 4ik^3 v_1 e^{-V_3} \{-v_1 p_2 \sinh V_1 \cos P_2 - \gamma_2 v_1 v_3 \sinh V_1 \sin P_2 \\ &\quad - \gamma_1 \gamma_2 p_2 v_3 \cosh V_1 \cos P_2 + \gamma_1 p_2^2 \cosh V_1 \sin P_2\} = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dikkat edilirse  $c_2 < c < c_1 < c_3$  için  $c \neq c_1$  dolayısıyla  $v_1 \neq 0$ 'dır. O halde (2.49) denklemden

$$-v_1 \sinh V_1 (p_2 \cos P_2 + \gamma_2 v_3 \sin P_2) + \gamma_1 p_2 \cosh V_1 (-\gamma_2 v_3 \cos P_2 + p_2 \sin P_2) = 0 \quad (2.50)$$

yazılabilir. Bu bağıntı faz hızı  $c_2 < c < c_1 < c_3$  eşitsizliğini sağlayan yüzey dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır. Değişkenleri  $(c, k)$  veya  $(\omega, k)$  olan bu bağıntı:

$$D(c, k) = 0 \quad (2.51)$$

ile gösterilebilir. Kapalı fonksiyon teoreminden bilindiği gibi (Bknz. [48]), (2.51) denklemini özdeş olarak sağlayan bir  $(c_0, k_0)$  noktası civarında eğer  $D_c$  ve  $D_k$  sürekli ve

$$\frac{\partial D}{\partial c} \neq 0 \quad (2.52)$$

ise (2.50) denklemi bu nokta civarında

$$c = c(k) \quad (2.53)$$

formunda bir fonksiyonu kapalı olarak tanımlar. (2.53), dispersiyon bağıntısı olarak adlandırılır. (2.50) denklemi  $c = c(k)$  formunda birden fazla fonksiyon tanımlar. Bu fonksiyonların her biri dispersiyon bağıntısının bir dalını oluşturur. Bu dallara ait fonksiyonları (2.50) dispersiyon bağıntısının yapısı gereği analitik olarak hesaplamak mümkün değildir. Bu çalışmada bazı yarım uzay modelleri için  $c = c(k)$  dispersiyon bağıntıları nümerik olarak hesaplanmıştır.

(2.50) bağıntısının her iki tarafı  $\cosh V_1 \cos P_2$ 'ye bölünürse ilk defa Stoneley tarafından elde edilen lineer dalgaların dispersiyon bağıntısı bulunur, [12]:

$$-v_1 p_2 \tanh V_1 - \gamma_2 v_1 v_3 \tanh V_1 \tan P_2 - \gamma_1 \gamma_2 p_2 v_3 + \gamma_1 p_2^2 \tan P_2 = 0. \quad (2.54)$$

Üst tabakanın kalınlığı sıfır olduğunda,  $h_1 = 0$  yani  $V_1 = 0$  için, problemin geometrisi tek tabakayla kaplı bir yarım uzaya dönüşür ve (2.54) dispersiyon bağıntısı tek tabakayla kaplı yarım uzayda yayılan Love dalgalarına ait aşağıdaki dispersiyon bağıntısına indirgenir, [2]:

$$p_2 \tan P_2 - \gamma_2 v_3 = 0. \quad (2.55)$$

Ara tabakanın kalınlığı sıfır olduğunda,  $h_2 = 0$  yani  $P_2 = 0$  için (2.54) dispersiyon bağıntısı aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$v_1 \tanh V_1 + \gamma_1 \gamma_2 v_3 = 0. \quad (2.56)$$

Dikkat edilirse,  $c < c_1 < c_3$  olduğundan  $\tanh V_1 > 0$ 'dır ve yukarıdaki denklemin sol tarafı her zaman pozitifdir. Dolayısıyla reel bir  $k$  için  $c$  çözümü yoktur ve SH tipi yüzey dalgaları  $c < c_1 < c_3$  eşitsizliği sağlandığında böyle bir ortamda yayılamazlar. Ayrıca  $h_1 \rightarrow \infty$  için ise problemin geometrisi bir tabakayla ayrılmış iki yarım uzay modeline dönüşür ve (2.54) bağıntısı aşağıdaki bağıntıya indirgenir:

$$\tan P_2 = \frac{v_1 p_2 + \gamma_1 \gamma_2 p_2 v_3}{\gamma_1 p_2^2 - \gamma_2 v_1 v_3}. \quad (2.57)$$

(2.57) ilk defa Stoneley tarafından elde edilen, düzgün kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz elastik ortamda yayılan Love dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır, [49]. Bu ortamda yayılan SH dalgaları için ortamın lineer olmayan özelliklerinin dalga yayılımına etkileri Kurt tarafından incelenmiştir, [50] .

### 2.2.2 $c_2 < c_1 < c < c_3$ hali

SH dalgalarının faz hızı  $c_2 < c_1 < c < c_3$  eşitsizliklerini sağladığında

$$p_1^2 = \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) > 0 \quad (2.58)$$

olmak üzere (2.33)'ün  $U^{(1)}$  çözümü

$$U^{(1)} = Ae^{ikp_1Y} + Be^{-ikp_1Y} \quad (2.59)$$

olarak elde edilir.  $v_1 = -ip_1$  eşitliği kullanılarak (2.54) dispersiyon bağıntısından aşağıdaki bağıntı türetilir:

$$p_1 p_2 \tan P_1 + \gamma_2 p_1 v_3 \tan P_1 \tan P_2 - \gamma_1 \gamma_2 p_2 v_3 + \gamma_1 p_2^2 \tan P_2 = 0. \quad (2.60)$$

Burada  $P_1 = kp_1 h_1$ 'dir. (2.60), iki tabakayla kaplı bir yarım uzayda Love dalga yayılımı için ilk defa Stoneley ve Tillotson tarafından türetilen dispersiyon bağıntısıdır, [11]. Üst tabakanın kalınlığı sıfır seçildiğinde, yani  $h_1 = 0$  için, problemin geometrisi tek tabakayla kaplı bir yarım uzaya dönüşür ve (2.60) dispersiyon bağıntısı aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\tan P_2 = \gamma_2 v_3 / p_2 = \mu_3 v_3 / \mu_2 p_2. \quad (2.61)$$

Ara tabakanın kalınlığı sıfır seçildiğinde ise, yani  $h_2 = 0$  için, (2.60) dispersiyon bağıntısından

$$\tan P_1 = \gamma_1 \gamma_2 v_3 / p_1 = \mu_3 v_3 / \mu_1 p_1 \quad (2.62)$$

elde edilir. İndirgenen bu bağıntılar tek tabakalı bir yarım uzayda yayılan lineer Love dalgalarına ait dispersiyon bağıntılarıyla örtüşmektedir, [2].

### 2.2.3 $c < c_2 < c_1 < c_3$ hali

SH dalgalarının faz hızı  $c < c_2 < c_1 < c_3$  eşitsizliklerini sağladığında  $U^{(1)}$  çözümü (2.40) ile verilir.  $U^{(2)}$  için ise çözüm:

$$U^{(2)} = Ce^{-kv_2Y} + De^{kv_2Y} \quad (2.63)$$

formunu alır. Burada

$$v_2^2 = \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) > 0 \quad (2.64)$$

olarak tanımlanmıştır.  $v_2 = -ip_2$  olduğu kullanılarak (2.54) dispersiyon bağıntısından aşağıdaki bağıntı türetilir:

$$v_1 v_2 \tanh V_1 + \gamma_2 v_1 v_3 \tanh V_1 \tanh V_2 + \gamma_1 \gamma_2 v_2 v_3 + \gamma_1 v_2^2 \tanh V_2 = 0. \quad (2.65)$$

Görüldüğü gibi bu bağıntının her terimi pozitiftir. Dolayısıyla bu denklemleri sağlayan reel bir  $k$  değerine karşı gelen bir  $c$  değeri bulunamaz. Bu nedenle faz hızı  $c < c_2 < c_1 < c_3$  eşitsizliğini sağlayan SH tipi yüzey dalgaları böyle bir ortamda yayılamazlar.

#### 2.2.4 Dispersiyon bağıntıları

Lineer kayma hızları  $c_2 < c_1 < c_3$  eşitsizliklerini sağlayan iki tabakalı bir yarım uzayda yayılan SH tipi yüzey dalgalarına ait dispersiyon bağıntılarının yapıları gereği, faz hızı-dalga sayısı eğrilerinin grafikleri Mathematica programı kullanılarak yazılan bir algoritma ile nümerik olarak hesaplanarak çizdirilmiştir.  $c_2 < c < c_1 < c_3$  için (2.50),  $c_2 < c_1 < c < c_3$  için ise (2.60) ile verilen bu bağıntılar, hesaplamalarda daha uygun oldukları için sırasıyla aşağıdaki formlarda yeniden yazılmıştır:

$$\begin{aligned} & -v_1 \sinh(kv_1 h_1) [p_2 \cos(kp_2 h_2) + \gamma_2 v_3 \sin(kp_2 h_2)] \\ & + \gamma_1 p_2 \cosh(kv_1 h_1) [-\gamma_2 v_3 \cos(kp_2 h_2) + p_2 \sin(kp_2 h_2)] = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

ve

$$\begin{aligned} & p_1 \sin(kp_1 h_1) [p_2 \cos(kp_2 h_2) + \gamma_2 v_3 \sin(kp_2 h_2)] \\ & + \gamma_1 p_2 \cos(kp_1 h_1) [-\gamma_2 v_3 \cos(kp_2 h_2) + p_2 \sin(kp_2 h_2)] = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Bu bağıntıları boyutsuzlaştırmak için aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır:

$$p = p_2, \quad m_1 = c_2/c_1, \quad m_2 = c_2/c_3, \quad (2.68)$$

$$p_{10}^2 = \left(\frac{1}{m_1^2} - 1\right) > 0, \quad v_{30}^2 = \left(\frac{1}{m_2^2} - 1\right) > 0, \quad \tau_0 = h_2/h_1, \quad K = k(h_1 + h_2). \quad (2.69)$$

Buradan, yeni boyutsuz parametreler ile

$$p_1 = m_1 (p^2 - p_{10}^2)^{1/2}, \quad v_1 = m_1 (p_{10}^2 - p^2)^{1/2}, \quad v_3 = m_2 (v_{30}^2 - p^2)^{1/2} \quad (2.70)$$

olarak yazılır. Bu tanımlamalarla  $p_{10} < v_{30}$  olduğuna da dikkat edilerek, (2.66) ve (2.67) dispersiyon bağıntıları boyutsuz olarak sırasıyla

$$\begin{aligned}
D_1(p, K) = & p\gamma_1 \cosh \left( \frac{Km_1 \sqrt{-p^2 + p_{10}^2}}{1 + \tau_0} \right) \left[ -m_2 \gamma_2 \sqrt{-p^2 + v_{30}^2} \cos \left( \frac{Kp\tau_0}{1 + \tau_0} \right) \right. \\
& \left. + p \sin \left( \frac{Kp\tau_0}{1 + \tau_0} \right) \right] - m_1 \sqrt{-p^2 + p_{10}^2} \sinh \left( \frac{Km_1 \sqrt{-p^2 + p_{10}^2}}{1 + \tau_0} \right) \\
& \cdot \left[ p \cos \left( \frac{Kp\tau_0}{1 + \tau_0} \right) + m_2 \gamma_2 \sqrt{-p^2 + v_{30}^2} \sin \left( \frac{Kp\tau_0}{1 + \tau_0} \right) \right] = 0, \quad (2.71)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
D_2(p, K) = & p\gamma_1 \cos \left( \frac{Km_1 \sqrt{p^2 - p_{10}^2}}{1 + \tau_0} \right) \left[ -m_2 \gamma_2 \sqrt{-p^2 + v_{30}^2} \cos \left( \frac{Kp\tau_0}{1 + \tau_0} \right) \right. \\
& \left. + p \sin \left( \frac{Kp\tau_0}{1 + \tau_0} \right) \right] + m_1 \sqrt{p^2 - p_{10}^2} \sin \left( \frac{Km_1 \sqrt{p^2 - p_{10}^2}}{1 + \tau_0} \right) \\
& \cdot \left[ p \cos \left( \frac{Kp\tau_0}{1 + \tau_0} \right) + m_2 \gamma_2 \sqrt{-p^2 + v_{30}^2} \sin \left( \frac{Kp\tau_0}{1 + \tau_0} \right) \right] = 0 \quad (2.72)
\end{aligned}$$

formlarında yazılır. Bu denklemler kullanılarak  $c = c(K)$  fonksiyonlarının  $c \geq 0, K \geq 0$  bölgesindeki dallarının grafikleri çizilebilir. Bu durumda, (2.71) ve (2.72) denklemleri ile kapalı olarak tanımlanan  $p = p(K)$  fonksiyonları hesaplandıktan sonra

$$c^2 = c_2^2(p^2 + 1) \quad (2.73)$$

bağıntısı kullanılarak ve

$$C = \frac{c}{c_2} \quad (2.74)$$

tanımı yapılarak  $C = C(K)$  fonksiyonlarının grafikleri çizdirilmiştir.

Dikkat edilirse  $c_2 < c < c_1 < c_3$  olmak üzere,  $D_1(p, K)$  fonksiyonu  $(p, K)$  düzleminde

$$K \geq 0, \quad 0 < p < p_{10} < v_{30} \quad (2.75)$$

eşitsizlikleri ile tanımlanan bölgede tanımlı ve süreklidir. Ayrıca bu bölgede  $\partial D_1 / \partial p$  ve  $\partial D_1 / \partial K$  süreklidirler. Dolayısıyla kapalı fonksiyon teoremine göre  $D_1(p, K) = 0$  denklemi, bu bölgede  $\partial D_1 / \partial p \neq 0$  olduğu noktalar civarında  $p = p(K)$  fonksiyonlarını tanımlar. Buna bağlı olarak da  $D_1(p, K) = 0$  denklemi,  $C^2 = p^2 + 1$  bağıntısı dikkate alınırsa,  $(C, K)$  düzleminde

$$K \geq 0, \quad 1 < C < \frac{c_1}{c_2} < \frac{c_3}{c_2} \quad (2.76)$$



bölgesinde  $C = C(K)$  fonksiyonlarını tanımlar.

Aynı şekilde  $c_2 < c_1 < c < c_3$  olmak üzere,  $D_2(p, K) = 0$  denklemi de  $(p, K)$  düzleminde

$$K \geq 0, \quad 0 < p_{10} < p < v_{30} \quad (2.77)$$

bölgesinde  $p = p(K)$  fonksiyonlarını, buna bağlı olarak da  $(C, K)$  düzleminde

$$K \geq 0, \quad 1 < \frac{c_1}{c_2} < C < \frac{c_3}{c_2} \quad (2.78)$$

bölgesinde  $C = C(K)$  fonksiyonlarını tanımlar.

Dikkat edilirse  $c \rightarrow c_1$  yani  $p \rightarrow p_{10}$  limitinde hem (2.71) denkleminde hem de (2.72) denkleminde

$$p_{10}\gamma_1 \left[ -m_2\gamma_2 \sqrt{-p_{10}^2 + v_{30}^2} \cos\left(\frac{Kp_{10}\tau_0}{1 + \tau_0}\right) + p_{10} \sin\left(\frac{Kp_{10}\tau_0}{1 + \tau_0}\right) \right] = 0 \quad (2.79)$$

elde edilir. Yani,  $0 < p < p_{10} < v_{30}$  ve  $0 < p_{10} < p < v_{30}$  bölgelerinde sırasıyla (2.71) ve (2.72) denklemleriyle temsil edilen  $p = p(K)$  eğrileri bu bölgelerin sınırını oluşturan  $p = p_{10}$  doğrusu üzerinde aynı noktalarda buluşacaklardır. Yani (2.71) ve (2.72) ile tanımlanan eğriler bu doğru üzerinde süreklidirler. Buna bağlı olarak da  $(C, K)$  düzlemindeki dispersiyon eğrileri  $C = c_1/c_2$  doğrusu boyunca sürekli olacaklardır. Dolayısıyla bu denklemler  $(C, K)$  düzleminde

$$K \geq 0, \quad 1 < C < \frac{c_3}{c_2} \quad (2.80)$$

bölgesinde sürekli olan eğriler tanımlayacaklardır.

Benzer şekilde (2.72) denkleminde,  $c \rightarrow c_3$  yani  $p \rightarrow v_{30}$  limitinde

$$\begin{aligned} & m_1 \sqrt{-p_{10}^2 + v_{30}^2} \cos\left(\frac{Kv_{30}\tau_0}{1 + \tau_0}\right) \sin\left(\frac{Km_1 \sqrt{-p_{10}^2 + v_{30}^2}}{1 + \tau_0}\right) \\ & + v_{30}\gamma_1 \cos\left(\frac{Km_1 \sqrt{-p_{10}^2 + v_{30}^2}}{1 + \tau_0}\right) \sin\left(\frac{Kv_{30}\tau_0}{1 + \tau_0}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemi sağlayan  $K$  değerleri,  $(p, K)$  düzleminde (2.72) ile tanımlanan eğrilerin  $p = v_{30}$  doğrusu ile kesişim noktalarını verir. Bu şekilde hesaplanan  $(v_{30}, K_i)$ ,  $(i = 1, 2, 3, \dots)$  noktaları dispersiyon bağıntısına ait her bir dalın başlangıç noktasıdır. Tek tabakalı yarım uzaya ait dispersiyon bağıntılarında olduğu gibi iki tabakalı halde de ilk dal  $(C, K)$ -düzleminde  $(C = \frac{c_3}{c_2}, K = 0)$  noktasından

başlamaktadır. Yani  $K_1 = 0$ 'dır. (2.81) denkleminde bulunacak  $K_2 > 0$  değeri ikinci dalın başlangıç dalga sayısını verir. (2.81) denkleminin kökleri

$$0 = K_1 < K_2 < K_3 < \dots \quad (2.82)$$

olmak üzere, sırasıyla diğer dalların başlangıç dalga sayılarıdır. Bunlara cut-off dalga sayıları denir.

$C = C(K)$  eğrilerinin grafiklerini çizmek için lineer malzeme özellikleri ile ilgili parametreler

$$\mu_1 = 4, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 9, \quad \text{ve} \quad \rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)} = 1 \quad (2.83)$$

olarak seçilirse böyle bir model için;

$$\begin{aligned} c_1 = 2, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 3, \quad \text{ve} \quad \gamma_1 = 1/4, \quad \gamma_2 = 9, \\ m_2 = 1/3, \quad m_1 = 1/2, \quad p_{10}^2 = 3, \quad v_{30}^2 = 8 \end{aligned} \quad (2.84)$$

elde edilir. Bu değerler kullanılarak (2.71) ve (2.72) sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

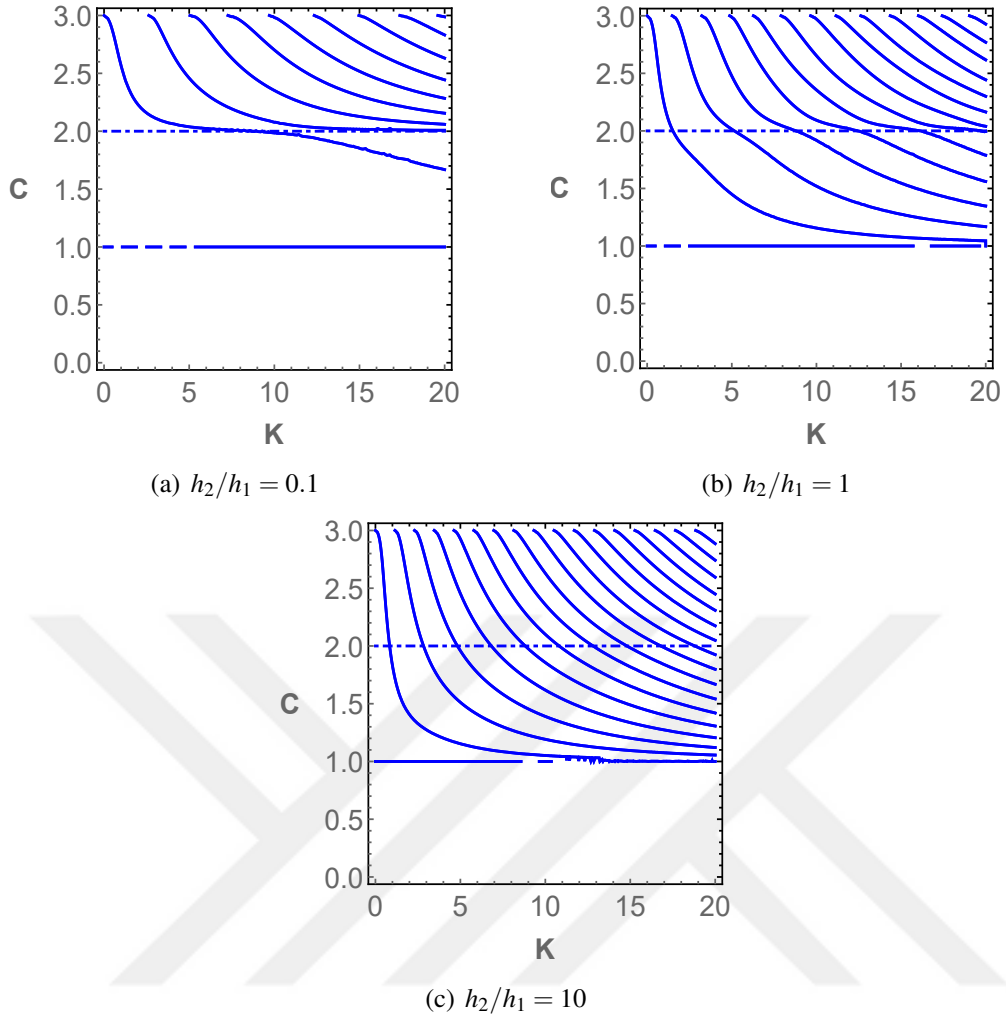
$$\begin{aligned} D_1(p, K) = p \cosh \left( \frac{K\sqrt{3-p^2}}{2+2\tau_0} \right) \left[ 3\sqrt{8-p^2} \cos \left( \frac{Kp\tau_0}{1+\tau_0} \right) - p \sin \left( \frac{Kp\tau_0}{1+\tau_0} \right) \right] \\ + 2\sqrt{3-p^2} \sinh \left( \frac{K\sqrt{3-p^2}}{2+2\tau_0} \right) \left[ p \cos \left( \frac{Kp\tau_0}{1+\tau_0} \right) + 3\sqrt{8-p^2} \sin \left( \frac{Kp\tau_0}{1+\tau_0} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

ve

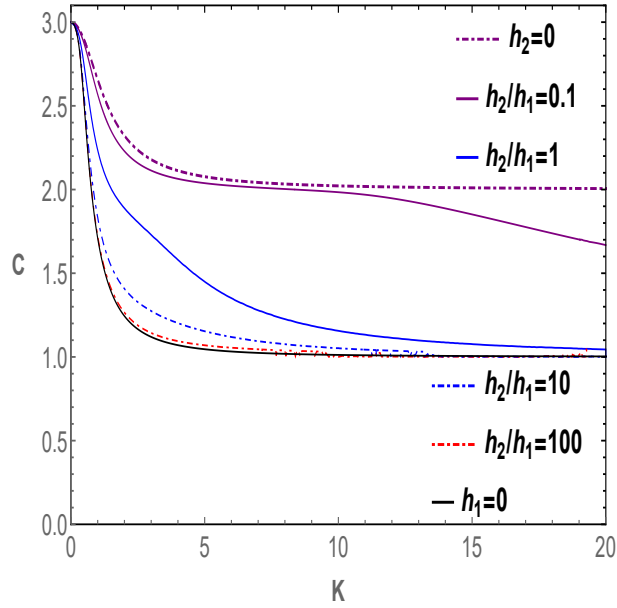
$$\begin{aligned} D_2(p, K) = p \cos \left( \frac{K\sqrt{-3+p^2}}{2+2\tau_0} \right) \left[ 3\sqrt{8-p^2} \cos \left( \frac{Kp\tau_0}{1+\tau_0} \right) - p \sin \left( \frac{Kp\tau_0}{1+\tau_0} \right) \right] \\ - 2\sqrt{-3+p^2} \sin \left( \frac{K\sqrt{-3+p^2}}{2+2\tau_0} \right) \left[ p \cos \left( \frac{Kp\tau_0}{1+\tau_0} \right) + 3\sqrt{8-p^2} \sin \left( \frac{Kp\tau_0}{1+\tau_0} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Tabakaların kalınlıkları oranının,  $\tau_0 = h_2/h_1$ , dispersiyon bağıntılarına ve dolayısıyla dalga yayılmasına etkisini gözlemlemek amacı ile  $h_2/h_1 = \{0.1, 1, 10\}$  için dispersiyon bağıntılarının farklı dalları Şekil 2.2'de, daha iyi bir kıyaslama amacıyla  $h_2/h_1 = \{0.1, 1, 10, 100\}$  ve  $h_1 = 0, h_2 = 0$  değerleri için birinci dalları Şekil 2.3'te verilmiştir. Yukarıda tanımlanan lineer model için (2.37) ve (2.38) eşitsizlikleri sırası ile  $1 < C < 2$  ve  $2 < C < 3$  formunu alır. Bu aralıklarda eğriler sırası ile (2.85) ve (2.86)

dispersiyon bağıntılarına aittir. Grafiklerden görüldüğü gibi  $(C, K)$  düzleminde bu eğriler  $C = c_1/c_2 = 2$  doğrusu boyunca aynı noktada buluşurlar, yani eğriler  $C = 2$  doğrusu boyunca süreklidirler. Şekil 2.3'ten görüleceği gibi üst tabakanın kalınlığı ara tabakaninkine kıyasla çok küçük olduğunda yani  $h_2/h_1$  artarken, üst tabakanın etkisi neredeyse ortadan kalkmakta ve dalgalar, hızları  $c_2 = 1$  ve  $c_3 = 3$  olan tek tabakalı yarım uzayda yayılan Love dalgaları gibi davranmaktadır.  $h_1 = 0$  durumunda ise  $1 < C < 3$  aralığında tek tabakayla kaplı bir yarım uzayda yayılan Love dalgaları için elde edilen (2.55) ve (2.61) dispersiyon bağıntıları ile tanımlanan  $C$ - $K$  eğrileri elde edilir.  $c_2 < c < c_1 < c_3$  durumunda yani  $1 < C < 2$  için, ara tabakanın kalınlığı üst tabakaninkine kıyasla çok küçük olduğunda yani  $h_2/h_1$  azalırken, dispersiyon bağıntısının ilk dalı için bile dalga yayılımı çok yüksek frekansta mevcut olmaktadır. Bu gözlem (2.56) denkleminin elde edildiği özel durumla örtüşmektedir öyle ki; (2.54) denkleminden  $h_2 \rightarrow 0$  limitinde (2.56) bağıntısı elde edilerek, SH tipi yüzey dalgalarının yayılamayacakları gösterilmişti.  $c_2 < c_1 < c < c_3$  durumunda yani  $2 < C < 3$  için,  $h_2/h_1$  azalırken dispersiyon eğrileri, kayma hızları sırasıyla  $c_1 = 2$  ve  $c_3 = 3$  olan tek tabakalı yarım uzayda yayılan Love dalgalarına ait eğriler gibi  $C = 2$  doğrusuna asimptot olmaktadır.  $h_2 = 0$  seçildiğinde ise,  $2 < C < 3$  aralığında tek tabakalı yarım uzayda yayılan Love dalgalarına ait  $C$ - $K$  eğrileri elde edilmektedir. Bu gözlem, yüzey dalgalarının faz hızı  $c_2 < c_1 < c < c_3$  eşitsizliğini sağlarken,  $h_2 \rightarrow 0$  limitiyle (2.60) dispersiyon bağıntısından, tek tabakalı yarım uzayda yayılan Love dalgalarına ait (2.62) bağıntısının elde edilmesi sonucuyla örtüşmektedir.



**Şekil 2.2 :** Çeşitli  $h_2/h_1$  değerleri için boyutsuz faz hızı  $C$ 'nin boyutsuz dalga sayısı  $K$ 'ya göre değişimi.



**Şekil 2.3 :** Dispersiyon bağıntılarının birinci dalları.

### 2.3 Lineer Olmayan Yüzey SH Dalgalarının Asimptotik Analizi

Bu kısımda, lineer özellikleri  $c_2 < c_1 < c_3$  eşitsizliklerini sağlayan sabit kalınlıklı iki tabakayla kaplı bir yarım uzayda lineer olmayan küçük ama sonlu genlikli SH tipi yüzey dalgalarının yavaş modülasyonu incelenmiştir. Yavaş modüle edilmiş bir dalga katarı, dalganın fazı hızlı ölçekli; dalganın genliği, boyu gibi dalga modülasyon parametreleri ise yavaş ölçekli olmak üzere iki ölçek içermektedir. Yani yüzey dalgaları, biri hızlı diğeri yavaş olmak üzere iki ölçekli bir dalga yayılımını karakterize etmektedir. Dolayısıyla çoklu ölçekler metodu ve asimptotik analiz yöntemleri, yüzey dalgalarının davranışını karakterize eden çalışmalar için kullanışlı matematiksel tekniklerdir. Bu sebeple çoklu ölçekler metodu kullanılarak, lineer dalgaların faz hızı  $c$ 'nin  $c_2 < c < c_1 < c_3$  ya da  $c_2 < c_1 < c < c_3$  eşitsizliklerini sağladığı durumlar ayrı ayrı incelenmiş ve her iki durumda da lineer olmayan self modülasyonun asimptotik olarak sabit katsayılı lineer olmayan bir Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edildiği gösterilmiştir. NLS denkleminin çözümlerinin özellikleri denklemin katsayıları çarpımının işaretine bağlı olduğundan, bu çarpımın dalga sayısı ile değişimi uygun malzeme parametreleri için nümerik olarak hesaplanmıştır. Yavaş ara tabakanın lineer olmayan özelliklerinin, NLS denkleminin çözümleri üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Ayrıca iki tabakalı yarım uzayda ve ara tabakanın kalınlığı sıfır seçilerek elde edilen tek tabakalı yarım uzayda SH dalga yayılımını asimptotik olarak karakterize eden NLS denklemlerinin katsayıları karşılaştırılarak yavaş ara tabakanın varlığının lineer olmayan dalga yayılımı üzerindeki etkisi gözlemlenmiştir.

Çoklu ölçekler metodu, aşağıdaki yeni bağımsız değişkenler tanımlanarak uygulanmıştır, [51]:

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.87)$$

Burada  $\varepsilon$  lineer olmamanın mertebesini belirten küçük pozitif bir parametre,  $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$  yayılma olayında yavaş değişimi karakterize eden yavaş değişkenler,  $\{x_0, t_0, y\}$  ise hızlı değişimi karakterize eden hızlı değişkenlerdir. Yeni tanımlanan bağımsız değişkenlerin birer fonksiyonu olduğu kabul edilen  $u^{(r)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , yer değiştirme fonksiyonlarının aşağıdaki düzgün geçerli asimptotik açılıma sahip

oldukları varsayılmaktadır:

$$u^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n^{(r)}(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2). \quad (2.88)$$

Yeni bağımsız değişkenlere göre türev operatörleri aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

(2.20)-(2.24)'de verilen hareket denklemleri ve sınır koşulları (2.87)'deki yeni bağımsız değişkenler cinsinden yazılıp, (2.88) asimptotik açılımı uygulanır ve  $\varepsilon$ 'nın aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse,  $u_n^{(r)}$ 'lerin ardışık olarak belirlenebilecekleri bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Bu pertürbasyon problemlerinin ilk üçü aşağıda verilmiştir:

$\varepsilon$  mertebesindeki problem,  $O(\varepsilon)$ :

$$L(u_1^{(r)}) \triangleq \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial t_0^2} - c_r^2 \left( \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial y^2} \right) = 0, \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.90)$$

$$y = h_1 \text{ serbest yüzeyinde } \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad (2.91)$$

$$y = 0 \text{ arayüzeyinde } u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \text{ ve } \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (2.92)$$

$$y = -h_2 \text{ arayüzeyinde } u_1^{(2)} = u_1^{(3)} \text{ ve } \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial y} = 0, \quad (2.93)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } u_1^{(3)} \rightarrow 0. \quad (2.94)$$

$\varepsilon^2$  mertebesindeki problem,  $O(\varepsilon^2)$ :

$$L(u_2^{(r)}) = 2 \left( c_r^2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial t_0 \partial t_1} \right), \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.95)$$

$$y = h_1 \text{ serbest yüzeyinde } \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad (2.96)$$

$$y = 0 \text{ arayüzeyinde } u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \text{ ve } \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (2.97)$$

$$y = -h_2 \text{ arayüzeyinde } u_2^{(2)} = u_2^{(3)} \text{ ve } \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial y} = 0, \quad (2.98)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } u_2^{(3)} \rightarrow 0. \quad (2.99)$$

$\varepsilon^3$  mertebesindeki problem,  $O(\varepsilon^3)$ :

$$\begin{aligned} L(u_3^{(r)}) = & 2 \left( c_r^2 \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial t_0 \partial t_1} \right) + c_r^2 \left( \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial x_0 x_2} \right) - \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial t_0 t_2} \\ & + n_r \left( \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial x_0} \mathcal{K}_0(u_1^{(r)}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1^{(r)}) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$y = h_1 \text{ serbest yüzeyinde } \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ arayüzeyinde } u_3^{(1)} = u_3^{(2)} \text{ ve} \\ \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y} = \gamma_1 \beta_2 \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1^{(2)}) - \beta_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1^{(1)}), \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} y = -h_2 \text{ arayüzeyinde } u_3^{(2)} = u_3^{(3)} \text{ ve} \\ \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial y} = \gamma_2 \beta_3 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1^{(3)}) - \beta_2 \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1^{(2)}), \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } u_3^{(3)} \rightarrow 0. \quad (2.104)$$

Burada

$$\mathcal{K}_0(\psi) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \quad (2.105)$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse, yukarıdaki mertebeli problemleri lineerdir ve birinci mertebeli problem (2.26)-(2.30) denklemleri ile de tanımlanan ve ilk defa Stoneley tarafından incelenen lineer dalga problemidir, [12]. Ancak lineer problemde tanımlanan  $u^{(r)} = u^{(r)}(X, Y, t)$ ,  $r = 1, 2, 3$ , yapısında fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar problemi tanımlayan denklemler çözülerek tam olarak belirlenebilir.  $\varepsilon$  mertebesindeki lineer problemde ise  $u_1^{(r)} = u_1^{(r)}(x_0, t_0, x_1, x_2, y, t_1, t_2)$  yapısında olduğu için  $\varepsilon$  mertebesindeki problem

çözülerek  $u_1^{(r)}$  fonksiyonlarının ancak  $x_0$ ,  $t_0$  ve  $y$  değişkenlerine bağlılığının yapısı açık olarak hesaplanabilmektedir. Bu fonksiyonların diğer değişkenlere bağlılığı daha üst mertebe problemler çözülerek bulunur. İkinci ve üçüncü mertebe problemlerdeki denklemlerin sağ tarafındaki bilinmeyenler bir önceki mertebe problemlerinden belirlenmiş olacağından, birinci mertebe problem gibi daha üst mertebe problemler de lineerdir. Ancak bu problemlerde hareket denklemleri ve bazı sınır koşulları homojen olmayan yapıdadır.

Şimdi  $\varepsilon$  mertebesindeki problemde başlayarak bu problemlerin çözümleri elde edilecektir. Yavaş ara tabakanın lineer olmayan yüzey SH dalga yayılımı üzerindeki etkisini incelemek için, tabakaların ve yarım uzayın lineer kayma hızlarının  $c_2 < c_1 < c_3$  eşitsizliklerini sağladığı kabul edilmiştir. Daha önce incelenen lineer problemin çözümünden de görüleceği gibi,  $c$  dalganın faz hızı olmak üzere aşağıdaki eşitsizliklerden birinin sağlanması halinde yüzey SH dalga yayılımı mevcuttur:

$$c_2 < c < c_1 < c_3, \quad (2.106)$$

$$c_2 < c_1 < c < c_3. \quad (2.107)$$

Problem, bu koşullar altında incelenecektir.

### 2.3.1 $c_2 < c < c_1 < c_3$ için analiz

Öncelikle yüzey SH dalgalarının faz hızının (2.106) eşitsizliğini sağladığı durum ele alınacaktır. Birinci mertebe problemin çözümü, (2.94) radyasyon koşulu göz önüne alınarak, lineer problemin çözümündeki gibi değişkenlere ayırma yöntemiyle aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_1^{(1)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ A_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-lkv_1 y} + B_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lkv_1 y} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (2.108)$$

$$u_1^{(2)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ C_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} + D_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (2.109)$$

$$u_1^{(3)} = \sum_{l=0}^{\infty} E_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lkv_3 y} e^{il\theta} + k.e.. \quad (2.110)$$

Burada  $l$  reel pozitif tamsayıdır; "k.e." sembolü, önceki terimin kompleks eşleniğini göstermektedir.  $\omega$  açısal frekans,  $k$  dalga sayısı olmak üzere  $\theta = kx_0 - \omega t_0$  dalganın hızlı ölçekli fazıdır.  $c = \omega/k$  faz hızı olmak üzere  $v_1$ ,  $p_2$  ve  $v_3$  (2.43)'teki gibi



tanımlanmaktadır:

$$v_1^2 = \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) > 0, \quad p_2^2 = \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1\right) > 0, \quad v_3^2 = \left(1 - \frac{c^2}{c_3^2}\right) > 0.$$

$A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}, E_1^{(l)}$  birinci mertebe yavaş değişen kompleks dalga genliği fonksiyonlarıdır ve problemin sınır koşullarından elde edilir. Bunun için (2.108)-(2.110) ile verilen çözümler (2.91)-(2.93) sınır koşullarında kullanılırsa

$$\mathbf{U}_1^{(l)} = (A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}, E_1^{(l)})^T \quad (2.111)$$

ve

$$\mathbf{W}_l = \begin{pmatrix} -klv_1e^{-lV_1} & klv_1e^{lV_1} & 0 & 0 & 0 \\ -klv_1 & klv_1 & -i\gamma_1klp_2 & i\gamma_1klp_2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & iklp_2e^{-ilP_2} & -iklp_2e^{ilP_2} & -\gamma_2klv_3e^{-lV_3} \\ 0 & 0 & e^{-ilP_2} & e^{ilP_2} & -e^{-lV_3} \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

olmak üzere, birinci mertebe genlik fonksiyonlarını içeren  $\mathbf{U}_1^{(l)}$  için

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.113)$$

homojen cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Burada  $V_1 = kv_1h_1$ ,  $P_2 = kp_2h_2$ ,  $V_3 = kv_3h_2$  olarak tanımlanmıştır. Bu homojen denklem sistemlerinin sıfırdan farklı çözümleri ancak  $\det \mathbf{W}_l = 0$  olması durumunda mevcuttur.  $l = 1$  için (2.112) ile tanımlanan  $\mathbf{W}_l$  matrisi, (2.45)'te verilen matrise özdeştir. Dolayısıyla

$$\det \mathbf{W}_1 = \det \mathbf{W} = 0 \quad (2.114)$$

eşitliğinden (2.54)'te verilen dispersiyon bağıntısı elde edilir:

$$-v_1p_2 \tanh V_1 - \gamma_2v_1v_3 \tanh V_1 \tan P_2 - \gamma_1\gamma_2p_2v_3 + \gamma_1p_2^2 \tan P_2 = 0. \quad (2.115)$$

Bölümün başında da belirtildiği gibi bu kısımda bir  $k$  dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının lineer olmayan self modülasyonu incelenmektedir. Bu nedenle yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıkları kabul edilmiştir, yani

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \det \mathbf{W}_l \neq 0. \quad (2.116)$$

Bu koşul altında (2.113) denklem sistemlerinin çözümleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{R}, \quad (2.117)$$

$$\mathbf{U}_1^{(0)} = \mathcal{B}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{P} + \mathcal{C}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{Q} + \mathcal{D}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{S}, \quad (2.118)$$

$$\mathbf{U}_1^{(l)} \equiv \mathbf{0}, \quad l \geq 2. \quad (2.119)$$

Burada  $\mathcal{A}_1$  dalga modülasyonunun birinci merteye yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonu,  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{D}_1$  yavaş değişen uzun dalga bileşenlerini temsil eden reel fonksiyonlardır.  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{S}$  aşağıdaki denklem sistemlerini sağlayan sütun vektörlerdir:

$$\mathbf{W}_1\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}_0\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}_0\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}_0\mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (2.120)$$

Burada  $\mathbf{P}^T = (1, 0, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{Q}^T = (0, 1, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{S}^T = (0, 0, 1, -1, 0)$  ve  $\mathbf{R}$  vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$R_1 = \frac{1}{2 \cosh V_1} e^{V_1 - V_3} \left( \cos P_2 + \frac{v_3 \gamma_2 \sin P_2}{p_2} \right),$$

$$R_2 = \frac{1}{2 \cosh V_1} e^{-V_1 - V_3} \left( \cos P_2 + \frac{v_3 \gamma_2 \sin P_2}{p_2} \right),$$

$$R_3 = \frac{1}{2} e^{iP_2 - V_3} \left( 1 - i \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} \right),$$

$$R_4 = \overline{R_3} = \frac{1}{2} e^{-iP_2 - V_3} \left( 1 + i \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} \right),$$

$$R_5 = 1.$$

Bu çalışmada dalgaların sadece self modülasyonu inceleneceği için diğer tüm dalga etkileşim süreci ve  $\mathbf{U}_1^{(0)}$  ihmal edilecektir. (2.117) kullanılarak, birinci merteye çözümler (2.108)-(2.110)'dan aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(R_1 e^{-kv_1 y} + R_2 e^{kv_1 y}) e^{i\theta} + k.e., \quad (2.121)$$

$$u_1^{(2)} = \mathcal{A}_1(R_3 e^{ikp_2 y} + R_4 e^{-ikp_2 y}) e^{i\theta} + k.e., \quad (2.122)$$

$$u_1^{(3)} = \mathcal{A}_1 R_5 e^{kv_3 y} e^{i\theta} + k.e.. \quad (2.123)$$

Lineer olmayan problemin birinci merteye çözümünü tamamlamak için, dalga katarının lineer olmayan self modülasyonunu temsil eden  $\mathcal{A}_1$  genlik fonksiyonunun daha yüksek merteye problemler çözülerek belirlenmesi gerekmektedir.

Yukarıda verilen birinci merteye çözümler, ikinci merteye pertürbasyon probleminin (2.95) diferansiyel denklemlerinde yerine konulursa, bu denklemler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$L(u_2^{(1)}) = 2iM^{(1)}(R_1e^{-kv_1y} + R_2e^{kv_1y})e^{i\theta} + k.e., \quad (2.124)$$

$$L(u_2^{(2)}) = 2iM^{(2)}(R_3e^{ikp_2y} + R_4e^{-ikp_2y})e^{i\theta} + k.e., \quad (2.125)$$

$$L(u_2^{(3)}) = 2iM^{(3)}R_5e^{kv_3y}e^{i\theta} + k.e.. \quad (2.126)$$

Burada

$$M^{(\alpha)} = \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + kc_\alpha^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.127)$$

olarak tanımlanmaktadır. (2.124)-(2.126) denklemlerinin çözümlerini

$$u_2^{(r)} = \bar{u}_2^{(r)} + \hat{u}_2^{(r)} \quad (2.128)$$

şeklinde iki parçaya ayırılım, öyle ki  $\bar{u}_2^{(r)}$   $r = 1, 2, 3$  için sırasıyla (2.124), (2.125) ve (2.126) denklemlerinin özel çözümleri,  $\hat{u}_2^{(r)}$ 'ler ise

$$L(\hat{u}_2^{(r)}) = 0, \quad r = 1, 2, 3 \quad (2.129)$$

homojen denklemlerinin, (2.96)-(2.99) sınır koşullarından (2.128) kullanılarak türetilen aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun;

$$y = h_1 \text{ 'de } \frac{\partial \hat{u}_2^{(1)}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial y}, \quad (2.130)$$

$$y = 0 \text{ 'da } \hat{u}_2^{(1)} - \hat{u}_2^{(2)} = -(\bar{u}_2^{(1)} - \bar{u}_2^{(2)})$$

$$\text{ve } \frac{\partial \hat{u}_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial \hat{u}_2^{(2)}}{\partial y} = -\left( \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial y} \right), \quad (2.131)$$

$$y = -h_2 \text{ 'de } \hat{u}_2^{(2)} - \hat{u}_2^{(3)} = -(\bar{u}_2^{(2)} - \bar{u}_2^{(3)})$$

$$\text{ve } \frac{\partial \hat{u}_2^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial \hat{u}_2^{(3)}}{\partial y} = -\left( \frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial \bar{u}_2^{(3)}}{\partial y} \right), \quad (2.132)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } \hat{u}_2^{(3)} + \bar{u}_2^{(3)} \rightarrow 0. \quad (2.133)$$

(2.124)-(2.126) ile verilen denklemlerin özel çözümleri  $\bar{u}_2^{(r)}$ , belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak bulunabilir. Lineer bağımsız çözümler için  $\bar{u}_2^{(r)}$ ,  $r = 1, 2, 3$  için

sırasıyla aşağıdaki şekilde seçilmelidir:

$$\bar{u}_2^{(1)} = \left( C_1 e^{-kv_1 y} + C_2 e^{kv_1 y} \right) y e^{i\theta} + k.e., \quad (2.134)$$

$$\bar{u}_2^{(2)} = \left( C_3 e^{ikp_2 y} + C_4 e^{-ikp_2 y} \right) y e^{i\theta} + k.e., \quad (2.135)$$

$$\bar{u}_2^{(3)} = C_5 y e^{kv_3 y} e^{i\theta} + k.e. \quad (2.136)$$

Burada

$$C_\alpha = C_\alpha(x_1, x_2, t_1, t_1) \quad \alpha = 1, 2, \dots, 5. \quad (2.137)$$

(2.134)-(2.136) çözüm formları (2.124)-(2.126) denklemlerinde yerine konulursa  $C_\alpha$  katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$C_1 = \frac{iR_1}{c_1^2 kv_1} M^{(1)}, \quad C_2 = \frac{-iR_2}{c_1^2 kv_1} M^{(1)}, \quad C_3 = \frac{-R_3}{c_2^2 kp_2} M^{(2)}, \quad (2.138)$$

$$C_4 = \frac{-R_4}{c_2^2 kp_2} M^{(2)}, \quad C_5 = \frac{-iR_5}{c_3^2 kv_3} M^{(3)}. \quad (2.139)$$

(2.129) homojen denklemlerinin (2.99) radyasyon koşulunu sağlayan çözümleri ise birinci mertebe problemdeki gibi değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\hat{u}_2^{(1)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ A_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-lkv_1 y} + B_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lkv_1 y} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (2.140)$$

$$\hat{u}_2^{(2)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ C_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} + D_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (2.141)$$

$$\hat{u}_2^{(3)} = \sum_{l=0}^{\infty} E_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lkv_3 y} e^{il\theta} + k.e.. \quad (2.142)$$

Burada  $A_2^{(l)}$ ,  $B_2^{(l)}$ ,  $C_2^{(l)}$ ,  $D_2^{(l)}$ ,  $E_2^{(l)}$  ikinci mertebe yavaş değişen dalga genliği fonksiyonlarıdır ve sınır koşulları kullanılarak hesaplanır.

$$\mathbf{U}_2^{(l)} = (A_2^{(l)}, B_2^{(l)}, C_2^{(l)}, D_2^{(l)}, E_2^{(l)})^T \quad (2.143)$$

olmak üzere,  $\hat{u}_2^{(r)}$  ve  $\bar{u}_2^{(r)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , çözümleri ikinci mertebe pertürbasyon probleminin sınır koşullarında kullanılırsa,  $\mathbf{U}_2^{(l)}$ 'ler için aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{b}_2^{(l)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.144)$$

Burada  $\mathbf{b}_2^{(l)}$  vektörleri

$$l \neq 1 \quad \text{için} \quad \mathbf{b}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad (2.145)$$

ve  $l = 1$  için aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -(1 - V_1)C_1 e^{-V_1} - (1 + V_1)C_2 e^{V_1} \\ -C_1 - C_2 + \gamma_1(C_3 + C_4) \\ 0 \\ -(1 - iP_2)C_3 e^{-iP_2} - (1 + iP_2)C_4 e^{iP_2} + \gamma_2(1 - V_3)e^{-V_3}C_5 \\ (C_3 e^{-iP_2} + C_4 e^{iP_2} - C_5 e^{-V_3})h_2 \end{pmatrix}. \quad (2.146)$$

$\mathbf{W}_1$  matrisinin ve  $\mathbf{R}$  vektörünün tanımları kullanılarak

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = -i \left( \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \right) \mathbf{R} \quad (2.147)$$

olduğu gösterilebilir.

$\det \mathbf{W}_1 = 0$  ve  $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}$  olduğundan,  $\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_2^{(1)} = \mathbf{b}_2^{(1)}$  homojen olmayan denklem sisteminin çözümünün olması için  $\mathbf{b}_2^{(1)}$  vektörü  $\mathbf{W}_1$  matrisinin sütun uzayında olmalıdır. Bu sebeple

$$\mathbf{L} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \quad (2.148)$$

ile tanımlanan  $\mathbf{W}_1$  matrisinin sütun uzayına dik her  $\mathbf{L}$  vektörü için

$$\mathbf{L} \mathbf{b}_2^{(1)} = 0 \quad (2.149)$$

uygunluk koşulu sağlanmalıdır.  $\text{Rank}(\mathbf{W}_1) = 2$  olduğundan  $\mathbf{L}$  vektörü bir parametreye bağlıdır ve (2.149) uygunluk koşulunun bir  $\mathbf{L}$  için sağlanması yeterlidir. (2.148) denklemlerini sağlayan  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)$  vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{1}{\cosh V_1} L_2, \quad L_2 = 1, \quad L_3 = kv_1 \tanh V_1 L_2, \\ L_4 &= \left( \gamma_1 \cos P_2 + \frac{v_1}{p_2} \tanh V_1 \sin P_2 \right) L_2, \\ L_5 &= -k(\gamma_1 p_2 \sin P_2 - v_1 \tanh V_1 \cos P_2) L_2. \end{aligned} \quad (2.150)$$

$\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = \mathbf{0}$  bağıntısının  $k$ 'ya göre türevi alınırsa,

$$\left( \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \right) \mathbf{R} + \mathbf{W}_1 \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) = \mathbf{0} \quad (2.151)$$

elde edilir. Burada  $V_g$

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.152)$$

olarak tanımlanan grup hızıdır. (2.151) soldan  $\mathbf{L}$  ile çarpılır ve (2.148) eşitliği kullanılırsa,

$$V_g = - \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \mathbf{R} \right) / \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right) \quad (2.153)$$

olduğu görülür. Bu eşitlik dikkate alınır ve (2.147) kullanılırsa (2.149) uygunluk koşulundan  $\mathcal{A}_1$  fonksiyonunun

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = 0 \quad (2.154)$$

denklemini sağlaması gerektiği bulunur. Bu ise birinci merteye yavaş değişen genlik fonksiyonu  $\mathcal{A}_1$ 'in  $V_g$  grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldığını gösterir, yani  $\mathcal{A}_1$  fonksiyonu

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \quad (2.155)$$

yapısındadır. (2.147)'deki  $\mathbf{b}_2^{(1)}$  tanımıyla birlikte (2.151) ve (2.154) kullanılırsa,  $l = 1$  için (2.144) denklem sisteminin çözümü

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \mathcal{A}_2 \mathbf{R} - i \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \quad (2.156)$$

olarak yazılır. Burada  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$  dalga modülasyonunun yavaş değişen ikinci merteye genliğini temsil etmektedir ve gerektiğinde daha yüksek merteye pertürbasyon problemlerinden elde edilir.

$l \geq 2$  için  $\det \mathbf{W}_l \neq 0$  kabulünden (2.144) denklem sistemlerinin çözümleri

$$l \geq 2, \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad (2.157)$$

olarak elde edilir.

$l = 0$  için ise  $\det \mathbf{W}_0 = 0$  olduğundan, (2.144) denklemlerinin çözümleri birinci merteye problemdeki gibi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\mathbf{U}_2^{(0)} = \mathcal{B}_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{P} + \mathcal{C}_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{Q} + \mathcal{D}_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{S}. \quad (2.158)$$

Burada  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{C}_2$  ve  $\mathcal{D}_2$  ikinci merteye uzun dalga bileşenlerini temsil eden, yavaş ölçeklerin birer fonksiyonu olmak üzere,  $\mathcal{A}_2$  gibi yüksek merteye pertürbasyon problemlerinden belirlenebilir. Fakat bu çalışmada amaç sadece birinci merteye düzgün geçerli çözümü inşa etmektir. Bunun için de  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{D}_2$  fonksiyonlarının bulunması gerekli değildir, yalnızca  $\mathcal{A}_1$ 'in belirlenmesi yeterlidir.

Yukarıda elde edilen birinci ve ikinci mertebeye çözümlerden,  $\mathcal{A}_1$  fonksiyonu tam olarak belirlenememiştir.  $\mathcal{A}_1$  fonksiyonunun  $x_2$  ve  $t_2$  yavaş değişkenlerine bağıllığı, üçüncü mertebeye pertürbasyon problemi çözülerek bulunacaktır. Yukarıda türetilen birinci ve ikinci mertebeye çözümler, üçüncü mertebeye probleme ait diferansiyel denklemlerde yerine konulursa, bu denklemler aşağıdaki formda yazılabilir:

$$L(u_3^{(1)}) = (\mathcal{D}_1 e^{-kv_1 y} + \mathcal{D}_2 y e^{-kv_1 y} + \mathcal{D}_3 e^{kv_1 y} + \mathcal{D}_4 y e^{kv_1 y} + \mathcal{D}_5 e^{-3kv_1 y} + \mathcal{D}_6 e^{3kv_1 y}) e^{i\theta} + (e^{3i\theta}, \text{li terimler}) + k.e., \quad (2.159)$$

$$L(u_3^{(2)}) = (\mathcal{D}_7 e^{ikp_2 y} + \mathcal{D}_8 y e^{ikp_2 y} + \mathcal{D}_9 e^{-ikp_2 y} + \mathcal{D}_{10} y e^{-ikp_2 y} + \mathcal{D}_{11} e^{3ikp_2 y} + \mathcal{D}_{12} e^{-3ikp_2 y}) e^{i\theta} + (e^{3i\theta}, \text{li terimler}) + k.e., \quad (2.160)$$

$$L(u_3^{(3)}) = (\mathcal{D}_{13} e^{kv_3 y} + \mathcal{D}_{14} y e^{kv_3 y} + \mathcal{D}_{15} e^{3kv_3 y}) e^{i\theta} + (e^{3i\theta}, \text{li terimler}) + k.e.. \quad (2.161)$$

Burada

$$\mathcal{D}_1 = 2iR_1 \mathcal{M}_{21}^{(1)} + 2\Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(1)} + R_1 \mathcal{N}^{(1)} + 2iR_1 \mathcal{M}_{12}^{(1)} - \mathcal{P}_1^-,$$

$$\mathcal{D}_2 = -\frac{2R_1}{v_1 k c_1^2} \left( \omega \frac{\partial}{\partial t_1} + k c_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(1)},$$

$$\mathcal{D}_3 = 2iR_2 \mathcal{M}_{21}^{(1)} + 2\Lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(1)} + R_2 \mathcal{N}^{(1)} + 2iR_2 \mathcal{M}_{12}^{(1)} - \mathcal{P}_1^+,$$

$$\mathcal{D}_4 = \frac{2R_2}{v_1 k c_1^2} \left( \omega \frac{\partial}{\partial t_1} + k c_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(1)},$$

$$\mathcal{D}_5 = \mathcal{Q}_1^-, \quad \mathcal{D}_6 = \mathcal{Q}_1^+,$$

$$\mathcal{D}_7 = 2iR_3 \mathcal{M}_{21}^{(2)} + 2\Lambda_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(2)} + R_3 \mathcal{N}^{(2)} + 2iR_3 \mathcal{M}_{12}^{(2)} - \mathcal{P}_2^-,$$

$$\mathcal{D}_8 = -\frac{2iR_3}{p_2 k c_2^2} \left( \omega \frac{\partial}{\partial t_1} + k c_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(2)},$$

$$\mathcal{D}_9 = 2iR_4 \mathcal{M}_{21}^{(2)} + 2\Lambda_4 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(2)} + R_4 \mathcal{N}^{(2)} + 2iR_4 \mathcal{M}_{12}^{(2)} - \mathcal{P}_2^+,$$

$$\mathcal{D}_{10} = \frac{2iR_4}{p_2 k c_2^2} \left( \omega \frac{\partial}{\partial t_1} + k c_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(2)},$$

$$\mathcal{D}_{11} = \mathcal{Q}_2^-, \quad \mathcal{D}_{12} = \mathcal{Q}_2^+,$$

$$\mathcal{D}_{14} = \frac{2R_5}{v_3 k c_3^2} \left( \omega \frac{\partial}{\partial t_1} + k c_3^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(3)},$$

$$\mathcal{D}_{15} = n_3 k^4 (-3 + 2v_3^2 + 9v_3^4) R_5^3 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1,$$

ve

$$\mathcal{M}_{\beta\gamma}^{(\alpha)} = \omega \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial t_\gamma} + k c_\alpha^2 \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial x_\gamma}$$

$$\mathcal{N}^{(\alpha)} = c_\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2}$$

$$\Lambda_\alpha = \left( \frac{\partial R_\alpha}{\partial k} + v_g \frac{\partial R_\alpha}{\partial \omega} \right)$$

$$\mathcal{P}_1^- = n_1 k^4 (9 - 2v_1^2 + 9v_1^4) R_1^2 R_2 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{P}_1^+ = n_1 k^4 (9 - 2v_1^2 + 9v_1^4) R_2^2 R_1 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{Q}_1^- = n_1 k^4 (-3 + 2v_1^2 + 9v_1^4) R_1^3 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{Q}_1^+ = n_1 k^4 (-3 + 2v_1^2 + 9v_1^4) R_2^3 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{P}_2^- = n_2 k^4 (9 + 2p_2^2 + 9p_2^4) |R_3|^2 R_3 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{P}_2^+ = n_2 k^4 (9 + 2p_2^2 + 9p_2^4) |R_4|^2 R_4 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{Q}_2^- = n_2 k^4 (-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4) R_3^3 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{Q}_2^+ = n_2 k^4 (-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4) R_4^3 |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1$$

olarak tanımlanmaktadır.  $|\phi|$ , bir  $\phi$  büyüklüğünün modülünü göstermektedir.

Yukarıdaki katsayılar yazılırken  $R_4 = \overline{R_3}$  özelliği kullanılmıştır.

Şimdi üçüncü mertebe problemin çözümlerini ikinci mertebe problemin çözümleri gibi

$$u_3^{(r)} = \overline{u_3^{(r)}} + \widehat{u_3^{(r)}}, \quad r = 1, 2, 3 \quad (2.162)$$



şeklinde iki parçaya ayırılım, öyle ki  $\bar{u}_3^{(r)}$   $r = 1, 2, 3$  için sırasıyla (2.159), (2.160), (2.161) denklemlerinin özel çözümleri,  $\hat{u}_3^{(r)}$ 'ler ise

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_3^{(r)}}{\partial t_0^2} - c_r^2 \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_3^{(r)}}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_3^{(r)}}{\partial y^2} \right) = 0, \quad r = 1, 2, 3 \quad (2.163)$$

homojen denklemlerin çözümleri olmak üzere, bu çözümler (2.101)-(2.104)'ten (2.162) kullanılarak türetilen aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlar:

$$y = h_1 \text{ 'de } \frac{\partial \hat{u}_3^{(1)}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_3^{(1)}}{\partial y}, \quad (2.164)$$

$$y = 0 \text{ 'da } \hat{u}_3^{(1)} - \hat{u}_3^{(2)} = -(\bar{u}_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(2)}) \quad \text{ve}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_3^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial \hat{u}_3^{(2)}}{\partial y} = - \left( \frac{\partial \bar{u}_3^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial \bar{u}_3^{(2)}}{\partial y} \right) + \gamma_1 \beta_2 \mathcal{K}_0(u_1^{(2)}) \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} - \beta_1 \mathcal{K}_0(u_1^{(1)}) \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y},$$

$$y = -h_2 \text{ 'de } \hat{u}_3^{(2)} - \hat{u}_3^{(3)} = -(\bar{u}_3^{(2)} - \bar{u}_3^{(3)}) \quad \text{ve}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_3^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial \hat{u}_3^{(3)}}{\partial y} = - \left( \frac{\partial \bar{u}_3^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial \bar{u}_3^{(3)}}{\partial y} \right) + \gamma_2 \beta_3 \mathcal{K}_0(u_1^{(3)}) \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial y} - \beta_2 \mathcal{K}_0(u_1^{(2)}) \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y},$$

$$y \rightarrow -\infty \quad \text{için} \quad \hat{u}_3^{(3)} + \bar{u}_3^{(3)} \rightarrow 0. \quad (2.165)$$

$\bar{u}_3^{(r)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , özel çözümleri aşağıdaki gibi lineer bağımsız fonksiyonların bir toplamı olarak ifade edilir:

$$\bar{u}_3^{(r)} = f_r^{(1)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{i\theta} + f_r^{(3)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{3i\theta} + k.e., \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.166)$$

Burada  $f_r^{(1)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , dalgaların self modülasyonu ile ilgili fonksiyonlarken  $f_r^{(3)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , üçüncü harmoniğin etkisini temsil etmektedir. Bu çalışmada sadece dalgaların self modülasyonu ile ilgilenildiği için  $f_r^{(3)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , fonksiyonlarının açık formları verilmeyecektir.  $f_r^{(1)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , fonksiyonları belirsiz katsayılar yöntemi ile aşağıdaki şekilde bulunur:

$$f_1^{(1)} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 y) y e^{-kv_1 y} + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4 y) y e^{kv_1 y} + \varepsilon_5 e^{-3kv_1 y} + \varepsilon_6 e^{3kv_1 y} + k.e., \quad (2.167)$$

$$f_2^{(1)} = (\varepsilon_7 + \varepsilon_8 y) y e^{ikp_2 y} + (\varepsilon_9 + \varepsilon_{10} y) y e^{-ikp_2 y} + \varepsilon_{11} e^{3ikp_2 y} + \varepsilon_{12} e^{-3ikp_2 y} + k.e.,$$

$$f_3^{(1)} = (\varepsilon_{13} + \varepsilon_{14} y) y e^{kv_3 y} + \varepsilon_{15} e^{3kv_3 y} + k.e.. \quad (2.168)$$

Bu ifadeler (2.159)-(2.161) denklemlerinde yerine konulursa  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, 15$  katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\mathcal{D}_1}{2kv_1c_1^2} + \frac{\mathcal{D}_2}{4k^2v_1^2c_1^2}, & \varepsilon_2 &= \frac{\mathcal{D}_2}{4kv_1c_1^2}, & \varepsilon_3 &= -\frac{\mathcal{D}_3}{2kv_1c_1^2} + \frac{\mathcal{D}_4}{4k^2v_1^2c_1^2}, \\
\varepsilon_4 &= -\frac{\mathcal{D}_4}{4kv_1c_1^2}, & \varepsilon_5 &= -\frac{\mathcal{D}_5}{8k^2v_1^2c_1^2}, & \varepsilon_6 &= -\frac{\mathcal{D}_6}{8k^2v_1^2c_1^2}, & \varepsilon_7 &= \frac{i\mathcal{D}_7}{2kp_2c_2^2} - \frac{\mathcal{D}_8}{4k^2p_2^2c_2^2}, \\
\varepsilon_8 &= \frac{i\mathcal{D}_8}{4kp_2c_2^2}, & \varepsilon_9 &= -\frac{i\mathcal{D}_9}{2kp_2c_2^2} - \frac{\mathcal{D}_{10}}{4k^2p_2^2c_2^2}, & \varepsilon_{10} &= -\frac{i\mathcal{D}_{10}}{4kp_2c_2^2}, \\
\varepsilon_{11} &= \frac{\mathcal{D}_{11}}{8k^2p_2^2c_2^2}, & \varepsilon_{12} &= \frac{\mathcal{D}_{12}}{8k^2p_2c_2^2}, & \varepsilon_{13} &= -\frac{\mathcal{D}_{13}}{2kv_3c_3^2} + \frac{\mathcal{D}_{14}}{4k^2v_3^2c_3^2}, \\
\varepsilon_{14} &= -\frac{\mathcal{D}_{14}}{4kv_3c_3^2}, & \varepsilon_{15} &= -\frac{\mathcal{D}_{15}}{8k^2v_3^2c_3^2}.
\end{aligned} \tag{2.169}$$

$\hat{u}_3^{(r)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , homojen çözümler, bir önceki pertürbasyon problemindeki yol izlenerek aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_3^{(1)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ A_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-lkv_1y} + B_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lkv_1y} \right\} e^{il\theta} + k.e., \tag{2.170} \\
\hat{u}_3^{(2)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ C_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2y} + D_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2y} \right\} e^{il\theta} + k.e., \\
\hat{u}_3^{(3)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( E_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lkv_3y} \right) e^{il\theta} + k.e.. \tag{2.171}
\end{aligned}$$

Burada  $A_3^{(l)}$ ,  $B_3^{(l)}$ ,  $C_3^{(l)}$ ,  $D_3^{(l)}$  ve  $E_3^{(l)}$  üçüncü mertebe yavaş değişen dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bunlar üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin sınır koşulları kullanılarak elde edilecektir. Daha önce olduğu gibi

$$\mathbf{U}_3^{(l)} = (A_3^{(l)}, B_3^{(l)}, C_3^{(l)}, D_3^{(l)}, E_3^{(l)})^T \tag{2.172}$$

tanımı yapılırsa,  $u_1^{(r)}$  ve  $u_3^{(r)}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , çözümleri üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin sınır koşullarında kullanıldığında bu vektörler için, aşağıdaki cebirsel denklem sistemleri elde edilir:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_3^{(l)} = \mathbf{b}_3^{(l)}. \tag{2.173}$$

Burada  $l = 1$  ve  $l = 3$  için  $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b}_3^{(3)} \neq \mathbf{0}$  fakat  $l \neq 1, 3$  için  $\mathbf{b}_3^{(l)} \equiv \mathbf{0}$ 'dır.  $l = 1$  için bu vektör

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_3^{(1)} &= \left[ -i \left( \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) - i \left( \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k \partial \omega} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \right] \mathbf{R} \\
&\quad + \left( \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) + \mathbf{F} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 \tag{2.174}
\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Lineer ve lineer olmayan malzeme parametrelerine ve dalga sayısına bağlı olan  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)^T$  vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$F_1 = -\beta_1 h_1 \frac{k^4(9v_1^4 - 2v_1^2 + 9)}{8 \cosh^3 V_1} \left( \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3 e^{-3V_3}, \quad (2.175)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & \beta_1 \frac{k^3(9v_1^4 - 2v_1^2 + 9)}{8v_1 \cosh^3 V_1} \left( \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3 \sinh V_1 e^{-3V_3} \\ & - \frac{3}{32} \beta_1 \frac{k^3(9v_1^4 + 2v_1^2 - 3)}{v_1 \cosh^3 V_1} \left( \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3 \sinh 3V_1 e^{-3V_3} \\ & + \gamma_1 \beta_2 \frac{k^3(9p_2^4 + 2p_2^2 + 9)}{8p_2} \left( 1 + \frac{\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \left( \sin P_2 - \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \cos P_2 \right) e^{-3V_3} \\ & - \gamma_1 \beta_2 \frac{3k^3(9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{32p_2} \left( 1 - \frac{3\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \sin 3P_2 e^{-3V_3} \\ & + \gamma_1 \beta_2 \frac{3k^3(9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{32p_2} \left( 3 - \frac{\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \cos 3P_2 e^{-3V_3} \\ & + \beta_1 \frac{k^3 v_1}{\cosh^3 V_1} \left( \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3 (\sinh V_1 \cosh^2 V_1 + 3v_1^2 \sinh^3 V_1) e^{-3V_3} \\ & - \gamma_1 \beta_2 \frac{k^3 p_2}{4} \left\{ (1 + 9p_2^2) \left( 1 + \frac{\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \left( \sin P_2 - \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \cos P_2 \right) + \right. \\ & \left. (1 - 3p_2^2) \left[ \left( 1 - \frac{3\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \sin 3P_2 - \left( 3 - \frac{\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \cos 3P_2 \right] \right\} e^{-3V_3}, \quad (2.176) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3 = & \beta_1 \frac{k^2(-3 + 2v_1^2 + 9v_1^4)}{32v_1^2 \cosh^3 V_1} \left( \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3 \cosh 3V_1 e^{-3V_3} \\ & + \beta_2 \frac{k^2(-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4)}{32p_2^2} \left( 1 - \frac{3v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) \cos 3P_2 e^{-3V_3} \\ & + \beta_2 \frac{k^2(-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4)}{32p_2^2} \left( 3 - \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} \sin 3P_2 e^{-3V_3}, \quad (2.177) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4 = & \beta_2 \frac{k^3(9 + 2p_2^2 + 9p_2^4)}{8p_2} \left( 1 + \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} e^{-3V_3} \\ & + \beta_2 \frac{h_2 k^4(9 + 2p_2^2 + 9p_2^4)}{8} \left( 1 + \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) e^{-3V_3} \\ & - \beta_2 \frac{3k^3(-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4)}{32p_2} \left( 3 - \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} e^{-3V_3} \\ & - \gamma_2 \beta_3 \frac{3k^3(-3 + 2v_3^2 + 9v_3^4)}{8v_3} e^{-3V_3} + \gamma_2 \beta_3 k^3 v_3 (1 + 3v_3^2) e^{-3V_3} \\ & - \gamma_2 \beta_2 k^3 v_3 (1 + 3\gamma_2^2 v_3^2) e^{-3V_3}, \quad (2.178) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_5 = & -\beta_2 \frac{h_2 k^3 (9 + 2p_2^2 + 9p_2^4)}{8p_2} \left(1 + \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2}\right) \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} e^{-3V_3} \\
& -\beta_2 \frac{k^2 (-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4)}{32p_2^2} \left(1 - \frac{3v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2}\right) e^{-3V_3} \\
& -\beta_3 \frac{k^2 (-3 + 2v_3^2 + 9v_3^4)}{8v_3^2} e^{-3V_3}. \tag{2.179}
\end{aligned}$$

Birinci merteye çözüm için gerekli olmadığından,  $\mathbf{b}_3^{(3)}$  vektörünün açık formu verilmeyecektir.

$\det \mathbf{W}_1 = 0$  ve  $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq \mathbf{0}$  olduğu için (2.173) denklem sisteminin  $\mathbf{U}_3^{(1)}$  için çözümünün olabilmesi için

$$\mathbf{L} \mathbf{b}_3^{(1)} = 0 \tag{2.180}$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir.  $V_g$  grup hızının (2.153) tanımı kullanılarak (2.180) uygunluk koşulundan

$$i \left( \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 + i \left( \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) = 0 \tag{2.181}$$

bağıntısı elde edilir. Burada  $\tilde{\Gamma}$  ve  $\tilde{\Delta}$  sabitleri

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma} = & - \left[ \frac{1}{2} \mathbf{L} \left( V_g^2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} + 2V_g \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega \partial k} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \right) \mathbf{R} \right. \\
& \left. + \mathbf{L} \left( \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \right] / \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right), \tag{2.182}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta} = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} / \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right) \tag{2.183}$$

olarak tanımlanmıştır.

$\mathcal{A}_2$  fonksiyonu belirlendikten sonra (2.181) denklemi  $\mathcal{A}_1$ 'in hesaplanması için kullanılabilir. Böylece problemin birinci merteye düzgün geçerli çözümünün inşaaı tamamlanmış olur. (2.181)'deki  $\mathcal{A}_2$ 'yi içeren terimlerin yapısı incelendiğinde, eğer  $\mathcal{A}_2$ 'nin  $x_1$  ve  $t_1$  değişkenlerine bağıllığı,  $\mathcal{A}_1$ 'in bu değişkenlere bağıllığı gibi kabul edilirse, yani  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)$  yapısında olduğu kabul edilirse,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} = 0 \tag{2.184}$$

olduğu görülür. Bu koşul altında, (2.181) artık yalnızca  $\mathcal{A}_1$  için aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$i \left( \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} |\mathcal{A}_1|^2 \mathcal{A}_1 = 0. \tag{2.185}$$

Aşağıdaki boyutsuz değişkenler ve sabitler tanımlanarak,

$$\tau = \omega t_2, \quad \xi = k\varepsilon^{-1}(x_2 - V_g t_2) = k(x_1 - V_g t_1), \quad (2.186)$$

$$A = k\mathcal{A}_1, \quad \Gamma = k^2\tilde{\Gamma}/\omega, \quad \Delta = \tilde{\Delta}/(\omega k^2) \quad (2.187)$$

(2.185) denkleminde aşağıdaki lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi elde edilir:

$$i\frac{\partial A}{\partial \tau} + \Gamma\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \Delta|A|^2A = 0. \quad (2.188)$$

$\mathbf{W}_1\mathbf{R} = \mathbf{0}$  denklemi,  $\omega = \omega(k)$  olduğu dikkate alınarak  $k$ 'ya göre iki defa türetilip sonuç bağıntı soldan  $\mathbf{L}$  satır vektörü ile çarpıldığında elde edilen ifade (2.182) ile karşılaştırılırsa,  $\tilde{\Gamma}$  katsayısının aşağıdaki gibi yazılabileceği görülür:

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2}\frac{dV_g}{dk} = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}. \quad (2.189)$$

(2.188) sabit katsayılı NLS denklemi integrallenebilir, [52].  $A(\xi, 0) = A_0(\xi)$  formunda verilen bir başlangıç koşulu ile NLS denkleminde  $A$  için bir çözüm türetildikten sonra,  $u_1^{(r)}$  birinci mertebe çözümler (2.121)-(2.123) eşitlikleri kullanılarak elde edilir.  $A_0(\xi)$  başlangıç değeri, tabakalı ortamların yer değiştirmelerinin başlangıç değerlerine bağlıdır.

Örneğin  $Y = h_2$  yüzeyi üzerinde (2.121)'den

$$u(X, h_2, 0) = \varepsilon \left[ \frac{e^{-kv_3 h_2}}{k \cosh(kv_1 h_1)} \left\{ \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \sin(kp_2 h_2) + \cos(kp_2 h_2) \right\} \right] A_0(\varepsilon k X) e^{ikX} \quad (2.190)$$

yazılabilir.

Amacımız, ele alınan problemin birinci mertebe düzgün geçerli çözümünü elde etmek olduğu için, (2.188) ile verilen NLS denkleminin çözümünü bulmak yeterli olacaktır. Daha yüksek mertebe düzgün geçerli çözümler elde edilmek istenildiğinde, üçüncü mertebeden yüksek mertebe pertürbasyon problemlerinin çözümleri araştırılırken sağlanması gereken uygunluk koşullarıyla  $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots$  fonksiyonlarının hesaplanabileceği denklemler türetilir.

### 2.3.2 $c_2 < c_1 < c < c_3$ için analiz

Bu kısımda, lineer özellikleri  $c_2 < c_1 < c < c_3$  eşitsizliklerini sağlayan iki tabakalı bir yarım uzayda lineer olmayan SH dalgalarının yavaş modülasyonu, bir önceki

kısımdaki benzer analiz yürütülerek incelenecektir. Bu durumda, birinci merteye problemdeki (2.90) denklemlerinin çözümleri, değişkenlere ayırma yöntemiyle aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_1^{(1)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ A_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_1 y} + B_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_1 y} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (2.191)$$

$$u_1^{(2)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ C_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} + D_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (2.192)$$

$$u_1^{(3)} = \sum_{l=0}^{\infty} E_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{lkv_3 y} e^{il\theta} + k.e.. \quad (2.193)$$

Dikkat edilirse (2.191) ifadesi, (2.108)'de  $v_1$  yerine  $-ip_1$  yazılarak da elde edilebilir. Dolayısıyla (2.191)-(2.193) ile verilen çözümler birinci merteye problemin (2.91)-(2.93) sınır koşullarında kullanılırsa elde edilen

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.194)$$

cebirsel denklem sistemlerinin katsayı matrisleri  $\mathbf{W}_l$ , (2.112) matrisinde  $v_1$  yerine  $-ip_1$  yazılarak aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mathbf{W}_l = \begin{pmatrix} iklp_1 e^{ilP_1} & -iklp_1 e^{-ilP_1} & 0 & 0 & 0 \\ iklp_1 & -iklp_1 & -i\gamma_1 klp_2 & i\gamma_1 klp_2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & iklp_2 e^{-ilP_2} & -iklp_2 e^{ilP_2} & -\gamma_2 klv_3 e^{-lV_3} \\ 0 & 0 & e^{-ilP_2} & e^{ilP_2} & -e^{-lV_3} \end{pmatrix} \quad (2.195)$$

$P_1 = kp_1 h_1$  ve  $p_1 = iv_1$  olmak üzere, aynı şekilde dispersiyon bağıntısı da aşağıdaki gibi elde edilir:

$$p_1 p_2 \tan P_1 + \gamma_2 p_1 v_3 \tan P_1 \tan P_2 - \gamma_1 \gamma_2 p_2 v_3 + \gamma_1 p_2^2 \tan P_2 = 0. \quad (2.196)$$

(2.196) bir önceki kısımda belirtildiği gibi, ilk defa [11] nolu makalede türetilen, iki tabakalı bir yarım uzayda yayılan Love dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır.  $\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = \mathbf{0}$  ve  $\mathbf{LW}_1 = \mathbf{0}$  denklemlerini sağlayan  $\mathbf{R}$  ve  $\mathbf{L}$  vektörlerinin bileşenleri de

$$R_1 = \frac{1}{2 \cos P_1} e^{-iP_1 - V_3} \left( \cos P_2 + \frac{v_3 \gamma_2 \sin P_2}{p_2} \right), \quad R_2 = \overline{R_1}, \quad (2.197)$$

$$R_3 = \frac{1}{2} e^{iP_2 - V_3} \left( 1 - i \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} \right), \quad R_4 = \overline{R_3}, \quad R_5 = 1, \quad (2.198)$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= -\frac{1}{\cos P_1} L_2, \quad L_2 = 1, \quad L_3 = -kp_1 \tan P_1 L_2, \\
L_4 &= \left( \gamma_1 \cos P_2 + \frac{-p_1}{p_2} \tan P_1 \sin P_2 \right) L_2, \\
L_5 &= -k(\gamma_1 p_2 \sin P_2 + p_1 \tan P_1 \cos P_2) L_2
\end{aligned} \tag{2.199}$$

formlarını alır. (2.194) denklemlerinin çözümleri  $l = 1$  için  $\mathbf{U}_1^{(1)} = A_1(x_1, x_2, t_1, t_2)\mathbf{R}$ ,  $l \geq 2$  için  $\mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0}$  olarak elde edilir ve dolayısıyla birinci merteye çözümler

$$u_1^{(1)} = A_1(R_1 e^{ikp_1 y} + R_2 e^{-ikp_1 y}) e^{i\theta} + k.e., \tag{2.200}$$

$$u_1^{(2)} = A_1(R_3 e^{ikp_2 y} + R_4 e^{-ikp_2 y}) e^{i\theta} + k.e., \tag{2.201}$$

$$u_1^{(3)} = A_1 R_5 e^{kv_3 y} e^{i\theta} + k.e. \tag{2.202}$$

şeklini alır. Dikkat edilirse bu çözüm (2.121)' de  $v_1$  yerine  $-ip_1$  yazılarak da elde edilebilir. Yüksek mertebeden problemlerin çözümleri de, önceki kısımda verilen ilgili çözümlerde  $v_1$  yerine  $-ip_1$  yazılarak bulunabilir. Sonuç olarak  $c_2 < c_1 < c < c_3$  için SH dalgalarının lineer olmayan modülasyonu yukarıda izlenen yolla tekrar bir NLS denkleminin karakterize edilir. Bu denklemin katsayıları  $\Gamma$  ve  $\Delta$  hesaplanırken (2.196) ile verilen dispersiyon bağıntısı kullanılır ve  $\mathbf{F}$  vektörünün bileşenleri de aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F_1 = -\beta_1 h_1 \frac{k^4 (9p_1^4 + 2p_1^2 + 9)}{8 \cos^3 P_1} \left( \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3 e^{-3v_3},$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & \beta_1 \frac{k^3(9p_1^4 + 2p_1^2 + 9)}{8p_1 \cos^3 P_1} \left( \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3 \sin P_1 e^{-3V_3} \\
& - \frac{3}{32} \beta_1 \frac{k^3(9p_1^4 - 2p_1^2 - 3)}{p_1 \cos^3 P_1} \left( \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3 \sin 3P_1 e^{-3V_3} \\
& + \gamma_1 \beta_2 \frac{k^3(9p_2^4 + 2p_2^2 + 9)}{8p_2} \left( 1 + \frac{\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \left( \sin P_2 - \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \cos P_2 \right) e^{-3V_3} \\
& - \gamma_1 \beta_2 \frac{3k^3(9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{32p_2} \left( 1 - \frac{3\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \sin 3P_2 e^{-3V_3} \\
& + \gamma_1 \beta_2 \frac{3k^3(9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{32p_2} \left( 3 - \frac{\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \cos 3P_2 e^{-3V_3} \\
& - \beta_1 \frac{k^3 p_1}{\cos^3 P_1} \left( \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3 (\sin P_1 \cos^2 P_1 + 3p_1^2 \sin^3 P_1) e^{-3V_3} \\
& - \gamma_1 \beta_2 \frac{k^3 p_2}{4} \left\{ (1 + 9p_2^2) \left( 1 + \frac{\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \left( \sin P_2 - \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \cos P_2 \right) + \right. \\
& \left. (1 - 3p_2^2) \left[ \left( 1 - \frac{3\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \sin 3P_2 - \left( 3 - \frac{\gamma_2^2 v_3^2}{p_2^2} \right) \frac{\gamma_2 v_3}{p_2} \cos 3P_2 \right] \right\} e^{-3V_3} \quad (2.203)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 = & -\beta_1 \frac{k^2 (-3 - 2p_1^2 + 9p_1^4) \left( \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} \sin P_2 + \cos P_2 \right)^3}{32p_1^2 \cos^3 P_1} \cos 3P_1 e^{-3V_3} \\
& + \beta_2 \frac{k^2 (-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4)}{32p_2^2} \left( 1 - \frac{3v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) \cos 3P_2 e^{-3V_3} \\
& + \beta_2 \frac{k^2 (-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4)}{32p_2^2} \left( 3 - \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} \sin 3P_2 e^{-3V_3} \quad (2.204)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 = & \beta_2 \frac{k^3 (9 + 2p_2^2 + 9p_2^4)}{8p_2} \left( 1 + \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} e^{-3V_3} \\
& + \beta_2 \frac{h_2 k^4 (9 + 2p_2^2 + 9p_2^4)}{8} \left( 1 + \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) e^{-3V_3} \\
& - \beta_2 \frac{3k^3 (-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4)}{32p_2} \left( 3 - \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2} \right) \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} e^{-3V_3} \\
& - \gamma_2 \beta_3 \frac{3k^3 (-3 + 2v_3^2 + 9v_3^4)}{8v_3} e^{-3V_3} + \gamma_2 \beta_3 k^3 v_3 (1 + 3v_3^2) e^{-3V_3} \\
& - \gamma_2 \beta_2 k^3 v_3 (1 + 3\gamma_2^2 v_3^2) e^{-3V_3} \quad (2.205)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
F_5 = & -\beta_2 \frac{h_2 k^3 (9 + 2p_2^2 + 9p_2^4)}{8p_2} \left(1 + \frac{v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2}\right) \frac{v_3 \gamma_2}{p_2} e^{-3v_3} \\
& -\beta_2 \frac{k^2 (-3 - 2p_2^2 + 9p_2^4)}{32p_2^2} \left(1 - \frac{3v_3^2 \gamma_2^2}{p_2^2}\right) e^{-3v_3} \\
& -\beta_3 \frac{k^2 (-3 + 2v_3^2 + 9v_3^4)}{8v_3^2} e^{-3v_3}
\end{aligned} \tag{2.206}$$

Dikkat edilirse,  $c_2 < c_1 < c < c_3$  durumunda  $h_1 = 0$  ya da  $h_2 = 0$  seçildiğinde ve  $c_2 < c < c_1 < c_3$  durumunda  $h_1 = 0$  seçildiğinde, iki tabakalı yarım uzay modeli için türetilen NLS denklemleri, tek tabakalı yarım uzayda yayılan lineer olmayan SH dalgalarını karakterize eden NLS denkleminde indirgenir.

### 2.3.3 NLS denkleminin bazı çözümleri

Bu bölümde NLS denkleminin bazı çözümleri verilerek, uniform dalga çözümlerinin küçük pertürbasyonlar altında kararlılıkları incelenmiş; NLS denkleminin çözümlerine ve kararlılığa, katsayılar çarpımı  $\Gamma\Delta$ 'nın işaretinin etkisi gösterilmiştir. (2.188) ile verilen NLS denkleminin,  $\phi$  reel bir fonksiyon  $K$ ,  $\Omega$  ve  $V_0$  sabitler olmak üzere

$$A(\xi, \tau) = \phi(\eta) e^{i(K\xi - \Omega\tau)}, \quad \eta = \xi - V_0\tau \tag{2.207}$$

formunda ilerleyen dalga çözümleri türetilecektir. (2.207) çözüm formu (2.188)'de verilen NLS denkleminde yerleştirilirse

$$\Gamma \frac{d^2\phi}{d\eta^2} + i(2K\Gamma - V_0) \frac{d\phi}{d\eta} + (\Omega - \Gamma K^2)\phi + \Delta\phi^3 = 0 \tag{2.208}$$

denklemini elde edilir.  $V_0 = 2K\Gamma$  olarak kabul edilirse, bu denklem

$$\Gamma \frac{d^2\phi}{d\eta^2} + (\Omega - \Gamma K^2)\phi + \Delta\phi^3 = 0 \tag{2.209}$$

halini alır. (2.209) denklemini  $d\phi/d\eta$  ile çarpılıp bir defa integre edilirse,

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{\Gamma K^2 - \Omega}{\Gamma} \phi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Gamma} \phi^4 + C \tag{2.210}$$

denklemini elde edilir.

$\Gamma\Delta > 0$  durumunda,  $\Omega = \Gamma K^2 - \Delta\phi_0^2/2$  seçimiyle (2.210) denklemini

$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Gamma} \phi_0^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Gamma} \phi^4 + C \tag{2.211}$$

denkleminde indirgenir. Eğer  $|\eta| \rightarrow \infty$  için  $\phi \rightarrow 0$  ve  $d\phi/d\eta \rightarrow 0$  ise  $C = 0$  olur ve (2.211) denkleminin çözümü

$$\phi = \phi_0 \operatorname{sech} \left[ \left( \frac{\Delta}{2\Gamma} \right)^{1/2} \phi_0 \eta \right] \quad (2.212)$$

şeklinde bulunur. (2.212) çözümü "zarf soliton" veya "bright soliton" çözümü olarak adlandırılmaktadır, [53].

$\Gamma\Delta < 0$  durumunda,  $\Gamma K^2 - \Omega = \Delta\phi_0^2$  ise (2.210) denklemi

$$\left( \frac{d\phi}{d\eta} \right)^2 = \frac{\Delta}{\Gamma} \phi_0^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Gamma} \phi^4 + C \quad (2.213)$$

denkleminde indirgenir. Eğer  $|\eta| \rightarrow \infty$  için  $\phi \rightarrow \phi_0$  ve  $d\phi/d\eta \rightarrow 0$  ise  $C = -\Delta\phi_0^4/2\Gamma$  olur ve (2.213) denkleminin çözümü

$$\phi = \phi_0 \tanh \left[ \left( \frac{-\Delta}{2\Gamma} \right)^{1/2} \phi_0 \eta \right] \quad (2.214)$$

şeklinde bulunur. (2.214) çözümü bir şok dalgası yayılımını karakterize eder.

Bu çözümlerden farklı olarak  $\Gamma\Delta > 0$  veya  $\Gamma\Delta < 0$  için NLS denkleminin

$$A(\xi, \tau) = \phi_0 e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \quad (2.215)$$

formunda düzlem dalga çözümü de mevcuttur. Bu çözüm NLS denkleminde yerine konulursa düzlem dalganın  $\phi_0$  genliği

$$\phi_0^2 = \frac{\Gamma K^2 - \Omega}{\Delta} \quad (2.216)$$

bağıntısını sağlar. Özel olarak  $K = 0$  alındığında, düzlem dalga çözümü

$$A(\xi, \tau) = \phi_0 e^{i\Delta|\phi_0^2|\tau} \quad (2.217)$$

şeklini alır.

Diğer taraftan,  $\Gamma\Delta < 0$  için NLS denkleminin

$$A(\xi, \tau) = \phi(\eta) e^{i(\Gamma^2\Delta\phi_0^2\tau - G(\eta))} \quad (2.218)$$

şeklinde bir çözümü aranır ve  $|\eta| \rightarrow \infty$  için  $A \rightarrow \phi_0 e^{i\Gamma^2\Delta\phi_0^2\tau}$  ve  $dA/d\eta \rightarrow 0$  olduğu kabul edilirse  $\phi$  ve  $G$  fonksiyonları

$$\phi^2 = \phi_0^2 (1 - \sin^2 B \operatorname{sech}^2 \psi) \quad (2.219)$$

$$G = \arctan(\tan B \tanh \psi) \quad (2.220)$$

olarak elde edilir, [54]. Burada  $B$  bir sabit olmak üzere,  $\psi$  ve  $V_0$  aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\psi = \left(-\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^{1/2} \phi_0 \eta \sin B, \quad (2.221)$$

$$V_0 = \pm 2^{-3/2} \Gamma(-\Gamma\Delta)^{1/2} \phi_0. \quad (2.222)$$

(2.218) ile tanımlanan çözüme "dark soliton" çözümü adı verilir ve bu çözüm bütün soliton çözümü özelliklerine sahiptir, [52, 54].

Yukarıda türetilen ilerleyen dalga çözümlerinin formlarından,  $\Gamma\Delta$  çarpımının işaretinin çözüm yapısını etkilediği açıkça görülmektedir.  $\Gamma\Delta$ 'nın işaretinden bağımsız olarak NLS denkleminin (2.215) ile verilen düzlem dalga çözümü mevcuttur. Şimdi bu düzlem dalga çözümünün küçük pertürbasyonlar altında kararlılığına,  $\Gamma\Delta$  çarpımının işaretinin etkisi incelenecektir. Eğer NLS denkleminin çözümü

$$A(\xi, \tau) = \frac{a(\xi, \tau)}{2} e^{ib(\xi, \tau)} \quad (2.223)$$

olduğu kabul edilip, NLS denkleminde yerine yazıldıktan sonra reel ve sanal kısımları ayrılırsa  $a$  ve  $b$  için aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$a_\tau + \Gamma(ab_{\xi\xi} + 2a_\xi b_\xi) = 0, \quad (2.224)$$

$$ab_\tau - \frac{\Delta}{4} a^3 - \Gamma(a_{\xi\xi} - ab_\xi^2) = 0. \quad (2.225)$$

Şimdi NLS denkleminin düzlem dalga çözümlerinin küçük pertürbasyonlar altında kararlılığını incelemek için  $a$  ve  $b$ 'yi,  $a_0$  ve  $b_0$  sabitleri civarında  $\varepsilon \ll 1$  olmak üzere  $\varepsilon$ 'na göre seriye açalım:

$$a(\xi, \tau) = a_0 + \varepsilon a_1(\xi, \tau) + O(\varepsilon^2), \quad (2.226)$$

$$b(\xi, \tau) = b_0 + \varepsilon b_1(\xi, \tau) + O(\varepsilon^2). \quad (2.227)$$

Bu seri açılımları (2.224)-(2.225) denklemlerinde kullanılır ve  $\varepsilon$ 'dan büyük terimler ihmal edilirse aşağıdaki lineer denklemler elde edilir:

$$a_{1\tau} + \Gamma a_0 b_{1\xi\xi} = 0, \quad (2.228)$$

$$a_0 b_{1\tau} - \Gamma b_{1\xi\xi} - \frac{3}{4} \Delta a_0^2 a_1 = 0. \quad (2.229)$$

$a_1$  ve  $b_1$  için elde edilen bu lineer denklem sisteminin

$$a_1(\xi, \tau) = A e^{i(K\xi - \Omega\tau)}, \quad b_1(\xi, \tau) = B e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \quad (2.230)$$

formunda düzlem dalga çözümlerini arayalım. Bu çözümler (2.228)-(2.229) denklemlerinde kullanılırsa, sıfırdan farklı çözüm elde edilebilmesi için  $\Omega$  ve  $K$  arasında

$$\Omega^2 = K^2(-\Gamma\Delta) \left( \frac{3}{4}a_0^2 - \frac{\Gamma}{\Delta}K^2 \right)^{1/2} \quad (2.231)$$

bağıntısının sağlanması gerektiği ortaya çıkar, [7]. Bu bağıntı (2.223) ile tanımlanan dalgalara ait dispersiyon bağıntısıdır. Burada reel bir  $K$  değeri için,  $\Gamma\Delta < 0$  ise  $\Omega$  reel olacaktır ve bu koşul altında  $a_1$  ve  $b_1$  sınırlı kalacaktır. Eğer  $\Gamma\Delta > 0$  ise  $K < [(3/4)(\Delta/\Gamma)]^{1/2}a_0$  için  $\Omega$  kompleks değerlidir ve buna bağlı olarak da  $a_1$  ve  $b_1$  sınırsız olarak büyür. Sonuç olarak lineer olmayan uniform düzlem katarı sonsuz küçük bir pertürbasyon altında  $\Gamma\Delta < 0$  ise kararlı,  $\Gamma\Delta > 0$  ise kararsız olacaktır.

Yukarıda incelenen lineerleştirilmiş  $a_1$  ve  $b_1$  çözümleri kısa zaman aralığında geçerli olmalarına rağmen, NLS denkleminin  $A(\xi, 0) = A_0(\xi)$  başlangıç koşulu altında çözümünün uzun zaman aralığında davranışı da  $\Gamma\Delta$ 'nın işaretine bağlıdır.  $|\xi| \rightarrow \infty$  için sıfır olan başlangıç uyarıları, eğer  $\Gamma\Delta < 0$  ise sönen titreşimlere,  $\Gamma\Delta > 0$  ise bir dizi zarf solitona dönüşür, [53].

Ayrıca bir  $k_c$  kritik dalga sayısı civarında dispersif ortamda,  $\Delta = 0$  yani  $\Gamma\Delta = 0$  oluyorsa, sistemde marjinal hal durumu ortaya çıkar. Bu durumda, NLS denkleminde dispersiyon ile nonlineerlik birbirini dengeleyemez ve NLS denklemi dalga modülasyonunu karakterize edemez. Bu halde, nonlineerliğin etkisini  $k_c$  kritik dalga civarında dengelemek için farklı bir asimptotik açılım kullanılmalıdır, [55].

## 2.4 Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar

Bir önceki bölümde ifade edildiği gibi, sabit katsayılı bir NLS denkleminin çözümleri bu denklemin katsayıları çarpımının işaretine bağlıdır. Bu sebeple, katsayıları ortamın lineer ve lineer olmayan malzeme parametrelerine, tabakaların kalınlığına ve dalga sayısına bağlı olan bir NLS denklemi ile asimptotik olarak karakterize edilen lineer olmayan SH dalgalarının davranışlarını belirleyebilmek için,  $\Gamma\Delta$  çarpımının işaretinin dalga sayısına göre değişimi çeşitli lineer olmayan malzeme parametreleri için incelenmiştir.  $\Gamma$  ve  $\Delta$  katsayılarının boyutsuz dalga sayısına,  $K = k(h_1 + h_2)$ , göre değişimi lineer malzeme sabitlerine uygun değerler verilerek dispersiyon bağıntılarının

ilk dalı için hesaplanmıştır. Hesaplamalarda lineer özellikler aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$\mu_1 = 4, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 9, \quad \text{ve} \quad \rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)} = 1. \quad (2.232)$$

Böylece

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 3 \quad (2.233)$$

olur ve boyutsuz faz hızı  $C = c/c_2$  için (2.106)-(2.107) eşitsizlikleri de sırasıyla aşağıdaki formu alır:

$$1 < C < 2; \quad 2 < C < 3. \quad (2.234)$$

Böyle bir lineer model için, Şekil 2.4'te  $\Gamma - K$  eğrileri  $h_2/h_1 = 1$ ,  $h_2 = 0$ ,  $h_1 = 0$  değerleri için çizdirilmiştir.  $h_2/h_1 = 1$  seçildiğinde  $\Gamma$ , grup hızının minimumuna sahip olduğu yaklaşık olarak  $K \approx 6.28$  değerinde sıfırdır. Ayrıca  $h_1 = 0$  ve  $h_2 = 0$  durumlarında tek tabakalı yarım uzayda yayılan SH dalgalarını karakterize eden NLS denkleminin dispersiyon terimi elde edilmiştir. Dikkat edilirse,  $\Gamma$  katsayısı lineer malzeme parametrelerine, tabakaların kalınlıkları oranına ve dalga sayısına bağlıken,  $\Delta$  bunlara ek olarak lineer olmayan malzeme parametrelerine de bağlıdır. Bu sebeple, lineer olmayan malzeme parametrelerinin  $\Gamma\Delta$  çarpımına etkisini gözlemleyebilmek için, tabakaların kalınlıkları oranı  $h_2/h_1 = 1$  alınarak ve lineer malzeme parametreleri yukarıdaki gibi seçilerek sabit tutulurken, çeşitli lineer olmayan malzeme parametreleri  $\beta_1 = n_1/c_1^2$ ,  $\beta_2 = n_2/c_2^2$  ve  $\beta_3 = n_3/c_3^2$  için hesaplamalar yapılmıştır. Daha önce de bahsedildiği gibi eğer  $\beta_r > 0$  ise ilgili malzeme kaymada sertleşen,  $\beta_r < 0$  ise ilgili malzeme kaymada yumuşayan davranış gösterir. Düşük hızlı ara tabakanın lineer olmayan özelliklerinin dalga yayılımı üzerindeki etkilerini gözlemleyebilmek için, grafiklerde üst tabaka ve yarım uzaya ait lineer olmayan malzeme parametreleri, sırasıyla  $\beta_1$  ve  $\beta_3$  sabit tutulurken, ara tabakaya ait malzeme parametresi  $\beta_2$  değiştirilmiştir. Öncelikle  $\beta_1 = \beta_3 = 2$  seçilerek sertleşen bir üst tabaka ve sertleşen bir yarım uzay modeli için,  $\Delta$  ve  $\Gamma\Delta$  'nın boyutsuz dalga sayısı  $K$ 'ya göre değişimleri incelenmiş ve grafikler sırasıyla Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'da gösterilmiştir. Bu grafiklerde  $\Delta$  ve  $\Gamma\Delta$  'nın  $K$ 'ya göre değişimleri,  $\beta_2 = -1$ ,  $\beta_2 = -2$  (yumuşayan lineer olmayan ara tabakalar) ve  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_2 = 2$  (sertleşen lineer olmayan ara tabakalar) için hesaplanmıştır.  $\beta_2 = 1$  ve  $\beta_2 = 2$  için yani iki tabakalı yarım uzay modeli tamamen sertleşen malzemeden oluştuğunda her  $K > 0$  için  $\Delta < 0$  olduğu görülmektedir. Bunun sonucu olarak da  $0 < K < 6.28$  aralığında

$\Gamma < 0$  olduğundan  $\Gamma\Delta$  çarpımının işareti pozitif olacaktır. Dolayısıyla bu aralıkta (2.212) ile verilen zarf soliton tipinde dalgalar mevcut olacaktır. Fakat Şekil 2.6'da görüldüğü gibi  $K > 6.28$  için  $\Gamma > 0$  olduğundan  $\Gamma\Delta$  çarpımı negatiftir ve bu aralıkta sadece dark solitonlar yayılabilirler.  $\beta_2 = -1$  ve  $\beta_2 = -2$  durumlarında, yani sertleşen yarım uzay ve sertleşen üst tabakanın arasında yumuşayan bir ara tabaka olduğunda, başlangıçta  $\Delta < 0$ 'dır ve yavaş ara tabakaya ait lineer olmayan malzeme parametrelerinin değişmesi ile  $\Delta$ 'nın işareti üç  $K$  değerinde değişir. Şekil 2.6'da her bir  $\Gamma\Delta$  eğrisinin sonuncu sıfır değeri  $\Gamma$  eğrisinin sıfırırken diğerleri  $\Delta$  eğrilerine aittir. Lineer malzeme parametreleri ve  $h_2/h_1 = 1$  seçilerek sabit tutulan tüm lineer olmayan modeller için  $\Gamma\Delta$  eğrilerinin sonuncu sıfırı aynıdır, diğer sıfırları yavaş ara tabakanın lineer olmayan malzeme parametrelerine bağlı olarak değişmektedir.

$\beta_1 = \beta_3 = -2$  değerlerine sahip yumuşayan üst tabaka ve yumuşayan yarım uzayın arasında  $\beta_2 = \{-1, 1, -2, 2\}$  malzeme parametrelerine sahip yumuşayan ya da sertleşen ara tabaka mevcut olduğunda,  $K$  dalga sayısına göre  $\Delta$  ve  $\Gamma\Delta$  eğrileri sırasıyla Şekil 2.7 ve Şekil 2.8'de çizdirilmiştir. Şekil 2.7 ve Şekil 2.8'de iki tabakalı yarım uzayın lineer olmayan malzeme parametreleri, Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'da ele alınan malzeme parametrelerinin işaretçe tam zıttıdır. 2.7-2.8 şekillerindeki  $\Delta$  ve dolayısıyla  $\Gamma\Delta$  eğrileri ile 2.5-2.6 şekillerindeki birbirine karşı gelen zıt işaretli eğrilerin  $K$  eksenine göre simetrik olduğu gözlemlenmiştir. Bu sebeple, NLS denkleminin çözümleri için 2.5-2.6 şekillerinden varılan sonuçların tersi geçerlidir. İki tabakalı yarım uzay tamamen yumuşayan malzemelerden oluştuğunda,  $0 < K < 6.28$  aralığında  $\Gamma\Delta < 0$  olduğundan düzlem dalgaları kararludur ve bu aralıkta sadece dark solitonlar yayılabilir. Diğer taraftan  $K > 6.28$  için  $\Gamma\Delta > 0$  olduğundan düzlem dalgaları kararsızdır ve zarf soliton tipi dalgalar mevcuttur.

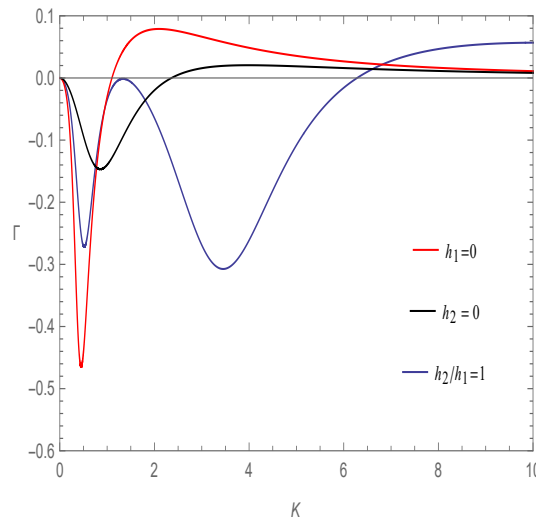
Şekil 2.9 ve Şekil 2.10'da,  $\beta_1 = 2$  için sertleşen üst tabaka ve  $\beta_3 = -2$  için yumuşayan yarım uzaya ait lineer olmayan malzeme parametreleri sabit tutularak, ara tabakanın farklı malzeme parametrelerinin  $\beta_2 = \{-1, 1, -2, 2\}$  seçimleriyle sırasıyla  $\Delta$  ve  $\Gamma\Delta$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi verilmiştir. Ara tabaka yumuşayan özellik gösterdiğinde yani  $\beta_2 < 0$  iken  $\Gamma\Delta$  eğrileri üç sıfıra sahiptir. Diğer taraftan, ara tabaka sertleşen özellik gösterdiğinde yani  $\beta_2 > 0$  iken  $\Gamma\Delta$  eğrilerinin iki sıfırı vardır. Her bir  $\Gamma\Delta$  eğrisi için sonuncu sıfır  $\Gamma$  eğrisinin sıfırı iken diğerleri  $\Delta$  eğrilerinin sıfırlarıdır. Şekil 2.9 ve Şekil 2.10'dan,  $\Delta$  eğrilerinin sıfırlarının ve dolayısıyla zarf soliton tipi dalgaların yayıldığı

aralıkların, yavaş ara tabakanın lineer olmayan malzeme parametrelerinden kuvvetli bir şekilde etkilendiği gözlemlenmektedir.

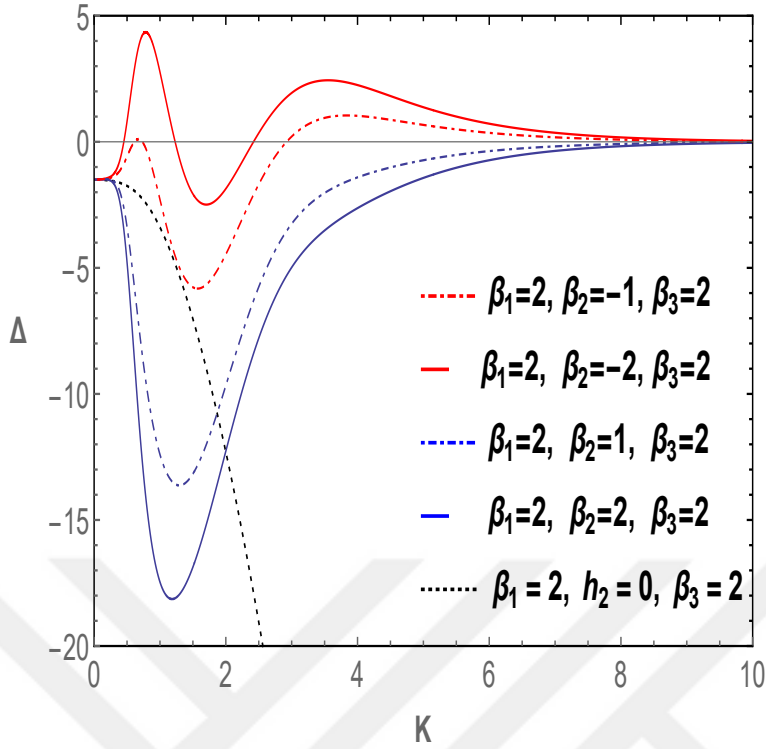
Şekil 2.11 ve Şekil 2.12’de iki tabakalı yarım uzayın lineer olmayan malzeme parametreleri Şekil 2.9 ve Şekil 2.10’daki malzeme parametrelerinin işaretçe tam zıttıdır. 2.11-2.12 şekillerindeki  $\Delta$  ve dolayısıyla  $\Gamma\Delta$  eğrileri ile 2.9-2.10 şekillerindeki birbirine karşı gelen zıt işaretli eğrilerin  $K$  eksenine göre simetrik olduğu gözlemlenmiştir. Bu sebeple, NLS denkleminin çözümleri için 2.9-2.10 şekillerinden varılan sonuçların tersi geçerlidir.

2.5-2.12 şekillerinde  $h_2 = 0$  için tek tabakalı yarım uzayda yayılan SH dalgalarını karakterize eden NLS denkleminin  $\Delta$  ve  $\Gamma\Delta$  katsayılarının da  $K$  ile değişimine yer verilmiştir. Bu grafiklerden, lineer olmayan dalga yayılımının ikinci bir tabakanın varlığından kayda değer bir şekilde etkilendiği görülmektedir.

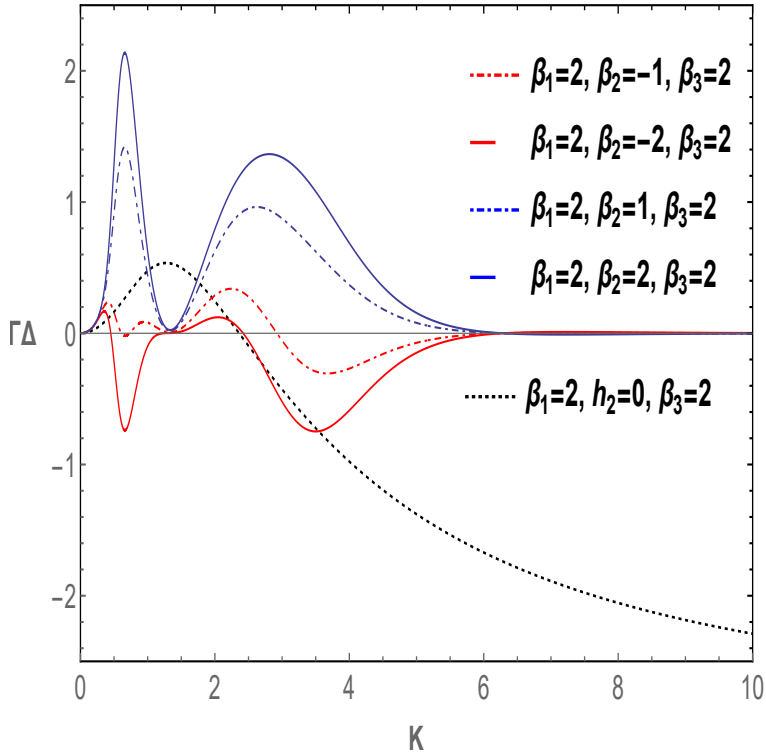
Şekil 2.6, 2.8, 2.10, 2.12’den, küçük dalga sayıları için yani,  $K \ll 1$  iken, aynı  $\beta_3$  değerine sahip  $\Gamma\Delta$  eğrilerinin birbirine yaklaştığı görülmektedir. Yarım uzayın sertleşen özellik gösterdiği tüm modeller için  $K \ll 1$  iken  $\Gamma\Delta > 0$ ’dır. Bunun sonucu olarak  $K \ll 1$  için zarf soliton tipi dalga yayılımı mevcuttur. Fakat yarım uzayın yumuşayan özellik gösterdiği diğer tüm modellerde küçük dalga sayıları için  $\Gamma\Delta < 0$ ’dır ve dark soliton tipi dalga yayılımı mevcuttur. Bu gözlemler, tek tabakalı yarım uzay modelinde de olduğu gibi [7], göreceli olarak uzun dalgalar için yarım uzayın lineer olmayan özelliklerinin yüzey SH dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerinde baskın olduğunu göstermektedir.



Şekil 2.4 :  $h_2/h_1 = 1$ ,  $h_2 = 0$  ve  $h_1 = 0$  için  $\Gamma$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi.

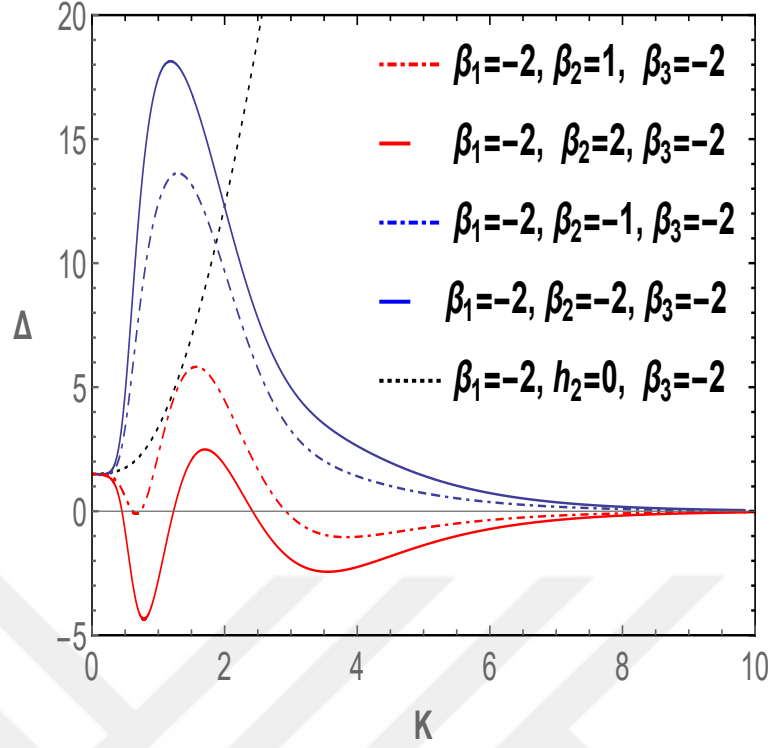


Şekil 2.5 :  $\beta_1 = \beta_3 = 2$  için sertleşen üst tabaka ve sertleşen yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli  $\beta_2$  değerleri için  $\Delta$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi.

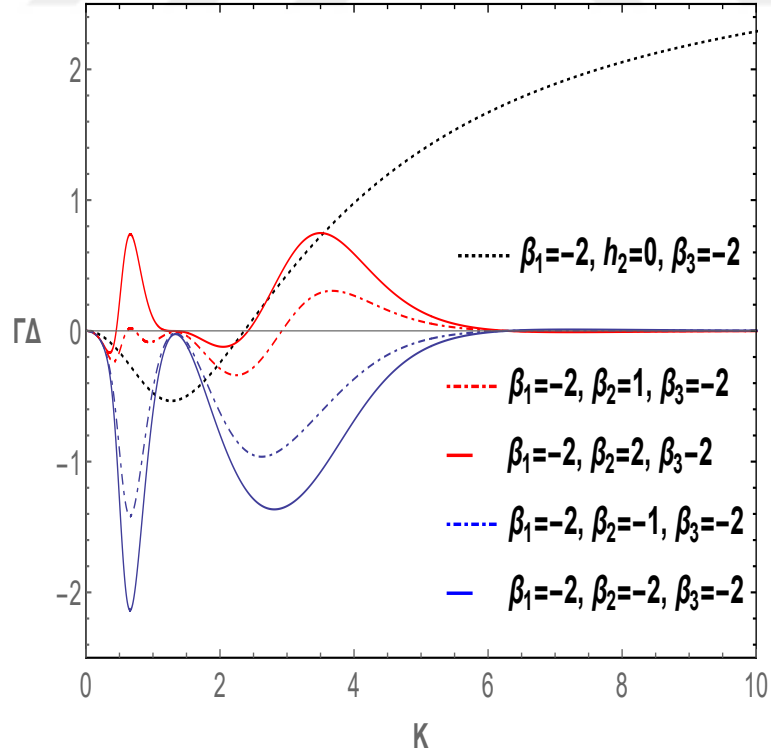


Şekil 2.6 :  $\beta_1 = \beta_3 = 2$  için sertleşen üst tabaka ve sertleşen yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli  $\beta_2$  değerleri için  $\Gamma\Delta$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi.

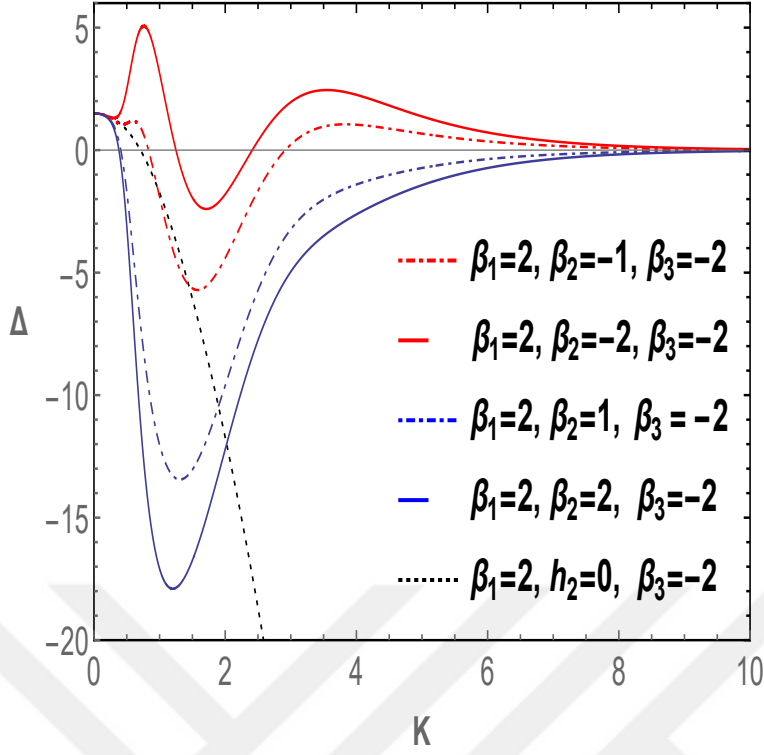




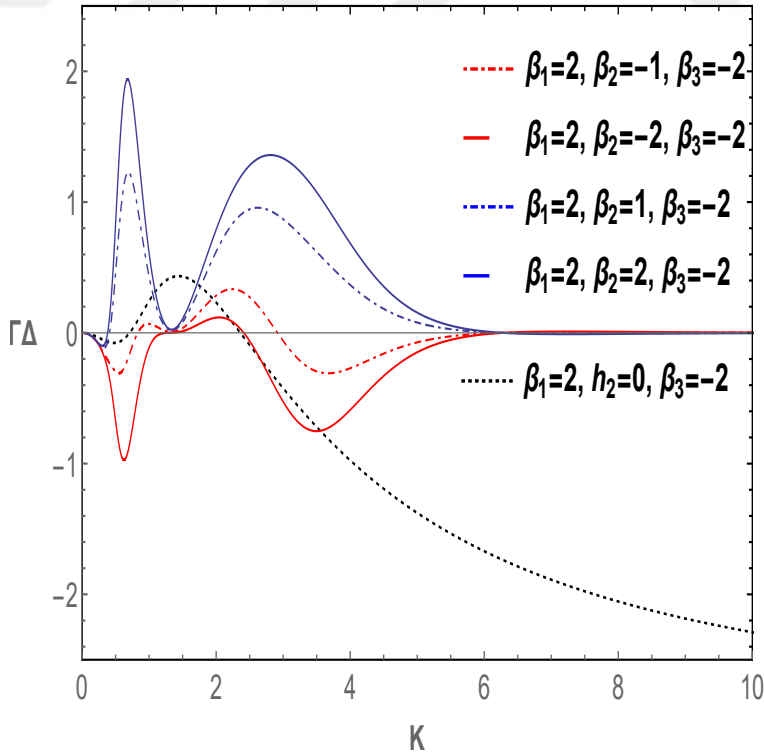
Şekil 2.7 :  $\beta_1 = \beta_3 = -2$  için yumuşayan üst tabaka ve yumuşayan yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli  $\beta_2$  değerleri için  $\Delta$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi.



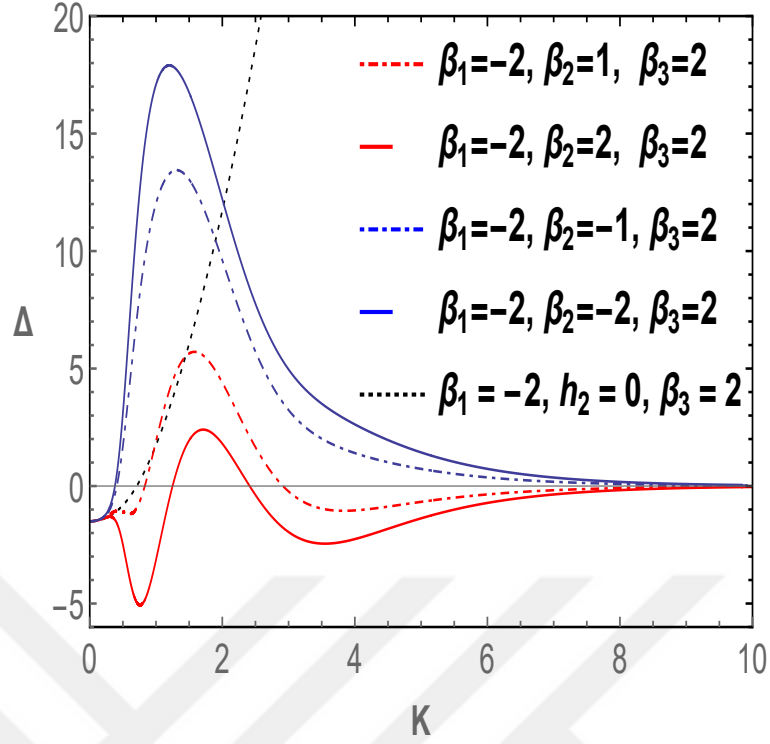
Şekil 2.8 :  $\beta_1 = \beta_3 = -2$  için yumuşayan üst tabaka ve yumuşayan yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli  $\beta_2$  değerleri için  $\Gamma\Delta$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi.



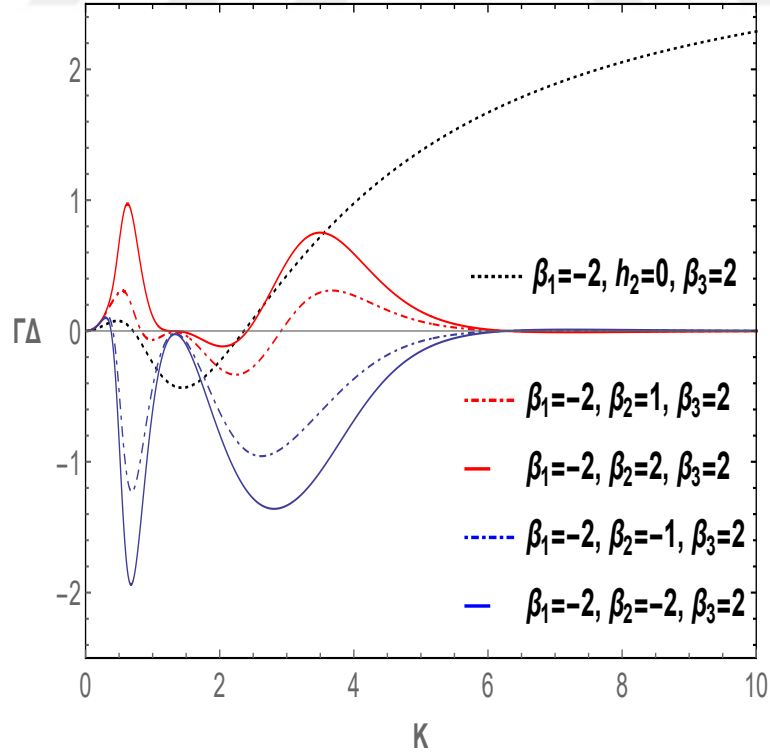
**Şekil 2.9 :**  $\beta_1 = 2$  ve  $\beta_3 = -2$  için sertleşen üst tabaka ve yumuşayan yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli  $\beta_2$  değerleri için  $\Delta$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi.



**Şekil 2.10 :**  $\beta_1 = 2$  ve  $\beta_3 = -2$  için sertleşen üst tabaka ve yumuşayan yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli  $\beta_2$  değerleri için  $\Gamma\Delta$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi.



Şekil 2.11 :  $\beta_1 = -2$  ve  $\beta_3 = 2$  için yumuşayan üst tabaka ve sertleşen yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli  $\beta_2$  değerleri için  $\Delta$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi.



Şekil 2.12 :  $\beta_1 = -2$  ve  $\beta_3 = 2$  için yumuşayan üst tabaka ve sertleşen yarım uzay arasındaki ara tabakaya ait çeşitli  $\beta_2$  değerleri için  $\Gamma\Delta$ 'nın  $K$ 'ya göre değişimi.



### **3. DEĞİŞKEN SINIR YÜZEYLERE SAHİP BİR TABAKA İLE KAPLI ELASTİK BİR YARIM UZAYDA LİNEER OLMAYAN YÜZEY SH DALGALARI**

Bir önceki bölümde, lineer olmayan SH dalga yayılımı problemi düzgün sınır yüzeylere sahip tabakalı bir yarım uzay modeli için incelenmiştir. Yani tabakaların sınır yüzeyleri düzlemsel ve tabaka kalınlığı sabittir. Ancak kıtasal marjinler, dağ kökleri, dağ havzaları, tuz ve maden yatakları gibi yeryüzünün kabuksal kısımları her zaman düzgün değildir. Sınır yüzeylerindeki değişime bağlı olarak tabaka kalınlığı da değişebilmektedir. Bu durumda dalga yayılımı sadece ortamın malzeme özelliklerinden değil pürüzlü yüzey ve arayüzeylerin şekil değişiminden de etkilenir. Bu bölümde, arayüzeyi ve serbest yüzeyi dalganın yayılma yönünde değişen bir tabakayla kaplı homojen, izotrop, lineer olmayan elastik bir yarım uzayda lineer olmayan yüzey SH dalgalarının yayılımı problemi ele alınmıştır. Malzemelerin lineer olmayan özelliklerinin yanı sıra tabakalı ortamın sınırlarındaki düzensizliklerin de SH tipi yüzey dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Öncelikle, SH tipi yüzey dalgalarının yayılımını karakterize eden hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları türetilmiştir. Daha sonra, lineer olmayan hareket denklemleri ve değişken katsayılı lineer olmayan sınır koşullarından oluşan bu sınır değer problemi lineerleştirilerek, bazı noktalara ışık tutmak amacıyla lineer SH dalgalarının yayılması problemi incelenmiştir. Tabakanın sınır yüzeylerindeki keyfi bir değişim için dalga yayılımı analizi oldukça kompleks olduğundan, sınır yüzeylerindeki değişimin dalgaların yayılma doğrultusunda ve yavaş olduğu kabul edilmiştir. Ardından, çoklu ölçekler metodu kullanılarak yüzey SH dalgalarının lineer olmayan modülasyonunun asimptotik olarak değişken katsayılı lineer olmayan genelleştirilmiş Schrödinger (GNLS) denklemi ile karakterize edildiği gösterilmiştir. GNLS denklemi sınır yüzeylerindeki düzensizlikleri içeren değişken katsayılarından dolayı her zaman integrallenebilir değildir. Bu sebeple, GNLS denkleminin önerilen bir ansatz yardımıyla integrallenebilirlik koşulu elde edilmiş ve bu koşul altında soliton benzeri çözümleri türetilmiştir. Düzensiz sınır koşullarının, GNLS denkleminin

integrallenebilirliğine izin verdiği bazı özel durumları araştırılmış; sınır yüzeylerindeki değişimin tabaka kalınlığına kıyasla oldukça küçük ve periyodik olduğu kabul edilerek analitik çözümler, çeşitli lineer olmayan malzeme parametreleri için elde edilmiştir. GNLS denkleminin integrallenebilir olmadığı diğer özel durumlar için ise çözümler pseudospectral yöntem yardımıyla nümerik olarak elde edilmiştir. Sınır yüzeylerindeki değişimin ve tabakalı yarım uzayın lineer olmayan malzeme özelliklerinin, elde edilen soliton benzeri dalgaların yayılma karakteristikleri üzerindeki etkileri grafiklerle incelenmiştir.

### 3.1 Problemin Formülasyonu

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sırasıyla  $(x_1, x_2, x_3)$  ve  $(X_1, X_2, X_3)$  olsun. Sınır yüzeylerinin dalganın yayılma doğrultusunda değiştiği bir tabakayla kaplı, hiperelastik bir yarım uzayda lineer olmayan Love dalga yayılımı problemini göz önüne alalım. Başlangıç konumunda,  $h > 0$  ortalama tabaka kalınlığı olmak üzere

$$P_1 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid f_2(X_1) < X_2 < h + f_1(X_1), \quad -\infty < X_i < \infty, \quad i = 1, 3\}, \quad (3.1)$$

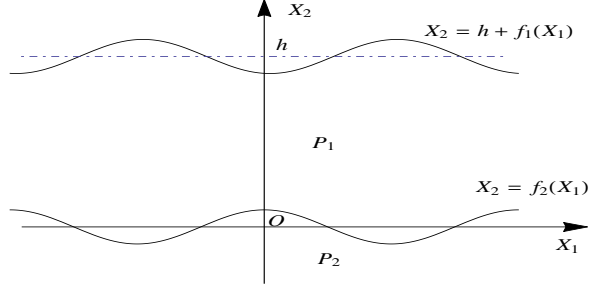
bölgesini dolduran homojen, lineer olmayan hiperelastik bir tabakanın

$$P_2 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -\infty < X_2 < f_2(X_1), \quad -\infty < X_i < \infty, \quad i = 1, 3\} \quad (3.2)$$

bölgesini dolduran homojen, lineer olmayan, tabakadan farklı hiperelastik malzemeden oluşan bir yarım uzayı kapladığı ortam ele alınacaktır. Problemin geometrisi Şekil 3.1 ile verilmiştir. İncelenen modelde,  $F_1(X_1, X_2) = X_2 - h - f_1(X_1) = 0$  serbest yüzeydeki ve  $F_2(X_1, X_2) = X_2 - f_2(X_1) = 0$  arayüzeyindeki düzensizlikler, sırasıyla  $f_1(X_1), f_2(X_1) \in C^1$  fonksiyonları ile temsil edilmektedir.  $X_2 = h + f_1(X_1)$  serbest yüzeyinin gerilmersiz,  $X_2 = f_2(X_1)$  arayüzeyinde yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu, ayrıca  $X_2 \rightarrow -\infty$  iken yarım uzaydaki yer değiştirmenin sifıra gittiği (radyasyon koşulu) kabul edilmiştir. Tabakalı yarım uzayda  $X_1$  eksenini boyunca yayılan yatay polarize olmuş yüzey kayma (SH) dalgaları aşağıdaki denklemlerle tanımlanmaktadır:

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 + u^{(r)}(X_1, X_2, t), \quad r = 1, 2. \quad (3.3)$$

Burada  $t$  zamanı, bir alan büyüklüğü üzerindeki parantez içindeki indis, büyüklüğün hangi bölgeye ait olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla  $u^{(1)}$  ve  $u^{(2)}$  sırasıyla



**Şekil 3.1** : Düzensiz sınır yüzeylere sahip tabakalı yarım uzay.

$P_1$  tabakasındaki ve  $P_2$  yarım uzayındaki noktaların  $X_3$  yönündeki yer değiştirme fonksiyonlarıdır.  $\det x_{k,K} = 1$  olduğundan (3.3) ile verilen genelleştirilmiş kayma hareketi izokorik bir şekil değiştirmedir, yani hareket esnasında hacim sabit kalmaktadır. Buna bağlı olarak böyle bir hareketin meydana geldiği ortamın yoğunlukları da,  $r = 1, 2$  için  $\rho^{(r)}$ , sabittir.

$T_{Kl}^{(r)}$ , birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörünün bileşenleri olmak üzere, harekete etki eden kuvvetlerin bulunmadığı varsayımıyla (3.3) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketini betimleyen denklemler, referans konumunda aşağıdaki şekilde yazılır:

$$T_{K\beta,K}^{(r)} = 0, \quad \beta = 1, 2; \quad T_{K3,K}^{(r)} = \rho^{(r)} \dot{u}^{(r)}, \quad r = 1, 2. \quad (3.4)$$

Burada, virgülden sonraki alt indis, bu indisin belirttiği kartezyen koordinata göre kısmi türevi ve  $\dot{u}^{(r)}$  ifadesindeki her bir nokta, zamana göre kısmi türevi göstermektedir. İndislerdeki Yunan harflerinin 1'den 2'ye kadar, Latin harflerinin 1'den 3'e kadar değerler alacakları ve tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar toplam olduğu kabul edilmektedir. Görüldüğü gibi her bir  $u^{(r)}$  tarafından sağlanması gereken üç tane hareket denklemi bulunmaktadır. (3.4)'teki ilk iki denklem özdeş olarak sağlanırsa,  $u^{(r)}$  fonksiyonu tek bir denklemin çözümü olarak belirlenebilir.

$F_1(X_1, X_2)$  serbest yüzeyinde gerilmelerin sıfır olduğu varsayımıyla,

$$X_2 = h + f_1(X_1)'de, \quad N_k^{(1)} T_{kl}^{(1)} = 0 \quad l = 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

$F_2(X_1, X_2)$  arayüzeyinde yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu kabulünden,

$$X_2 = f_2(X_1)'de, \quad N_k^{(2)} T_{kl}^{(1)} = N_k^{(2)} T_{kl}^{(2)} \quad \text{ve} \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad (3.6)$$

ayrıca  $X_2 \rightarrow -\infty$  için yer değiştirmelerin sıfır olduğu kabulünden

$$X_2 \rightarrow -\infty \text{ iken } u^{(2)} \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

sınır koşulları elde edilir. Burada sınır koşulları yazılırken, yüzey normallerinin birinci bileşenlerinin bir önceki problemdeki gibi sabit değil, değişken olduğuna dikkat edilmelidir.  $N_k^{(1)}, N_k^{(2)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) sırasıyla

$$F_1(X_1, X_2) = -f_1(X_1) + X_2 - h = 0 \quad \text{ve} \quad F_2(X_1, X_2) = -f_2(X_1) + X_2 = 0 \quad (3.8)$$

yüzeylerinin normal vektörlerinin bileşenleri olmak üzere, normal vektörleri aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\mathbf{N}^{(i)} = \nabla F_i = -\frac{df_i(X_1)}{dX_1} \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad (i = 1, 2). \quad (3.9)$$

Burada  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  sırasıyla pozitif  $X_1$  ve  $X_2$  yönündeki birim vektörlerdir.

Tabakaların ve yarım uzayın lineer olmayan, homojen, izotrop, sıkışmaz hipere-  
lastik malzemelerden oluştuğu ve gerilme potansiyelinin, Finger Şekil değiştirme  
tansörünün,  $\mathbf{c}^{-1} = [x_{k,K}x_{l,K}]$ , sadece birinci invaryantının bir fonksiyonu, yani  $\Sigma^{(r)} =$   
 $\Sigma^{(r)}(I^{(r)})$ ,  $r = 1, 2$ , olduğu kabul edilecektir. Bu malzemeler neo-Heoken malzeme  
olarak adlandırılmaktadır, [46]. Ek A'dan faydalanılarak, (3.3) ile tanımlanan düzlem  
dışı hareket için Finger Şekil değiştirme tansörünün birinci invaryantları aşağıdaki  
Şekilde yazılır:

$$I^{(r)} = 3 + \left( \frac{\partial u^{(r)}}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^{(r)}}{\partial X_2} \right)^2, \quad r = 1, 2. \quad (3.10)$$

Ek A'daki çalışma ile birinci tür Piola-Kirchoff tansörünün bileşenleri de aşağıdaki  
Şekilde bulunur:

$$T_{\alpha\beta}^{(r)} = T_{33}^{(r)} = 0, \quad T_{\alpha 3}^{(r)} = T_{3\alpha}^{(r)} = \Phi^{(r)} u_{,\alpha}^{(r)}. \quad (3.11)$$

Böylece (3.4)'teki ilk iki hareket denklemi özdeğ olarak sağlanır ve genelleştirilmiş  
neo-Hooken malzemeden oluşan değişken kalınlıklı tabakayla kaplı bir yarım uzayda,  
(3.3) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketi, kütle kuvvetlerine ihtiyaç  
duyulmadan yaratılabilir.

$(X_1, X_2, X_3)$  yerine  $(X, Y, Z)$  yazılırsa, (3.4)'teki üçüncü denklem ve (3.5)-(3.7) sınır  
koşulları aşağıdaki Şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \Phi^{(r)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Phi^{(r)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial Y} \right) = \rho^{(r)} \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial t^2} \quad r = 1, 2, \quad (3.12)$$



$$Y = h + f_1(X)'de, \quad -\frac{df_1}{dX} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial X} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} = 0; \quad (3.13)$$

$$Y = f_2(X)'de, \quad u^{(1)} = u^{(2)} \quad ve$$

$$\Phi^{(1)} \left( -\frac{df_2}{dX} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial X} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} \right) = \Phi^{(2)} \left( -\frac{df_2}{dX} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial X} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} \right);$$

$$Y \rightarrow -\infty \quad iken \quad u^{(2)} \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Bu çalışmada küçük ama sonlu genlikli (zayıf nonlinear) dalga yayılması problemi inceleneceği için hareket denklemlerinin yaklaşık formları kullanılacaktır. Bu yaklaşık denklemleri türetmek için, gerilme potansiyeli  $\Sigma$ 'nın,  $[3, \infty)$  aralığında  $I$ 'nin analitik fonksiyonu olduğu kabul edilerek, bu fonksiyon gerilmesiz doğal durum yani  $I = 3$  civarında Taylor serisine açılır:

$$\Sigma(I) = \Sigma'(3)(I-3) + \frac{1}{2!}\Sigma''(3)(I-3)^2 + \dots \quad (3.15)$$

Referans konumunda yani  $I = 3$  iken, enerjinin sıfır olması için  $\Sigma(3) = 0$  olmalıdır. Ek A'dan  $\Phi^{(r)} = 2d\Sigma^{(r)}/dI$  olduğu dikkate alınarak, (3.15)'teki açılım (3.12)-(3.14) denklemlerinde yerine yazılıp, üçüncü ve daha yüksek mertebeden lineer olmayan terimler ihmal edilerek aşağıdaki sınır değer problemi elde edilir:

$$\frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial t^2} - c_r^2 \left( \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial Y^2} \right) = n_r \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u^{(r)}}{\partial X} \mathcal{K}(u^{(r)}) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial u^{(r)}}{\partial Y} \mathcal{K}(u^{(r)}) \right) \right\}, \quad (3.16)$$

$$Y = h + f_1(X)'de, \quad -\frac{df_1}{dX} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial X} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} = 0; \quad (3.17)$$

$$Y = f_2(X)'de, \quad u^{(1)} = u^{(2)} \quad ve$$

$$-\frac{df_2}{dX} \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial X} - \gamma \frac{\partial u^{(2)}}{\partial X} \right) + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} = -\frac{df_2}{dX} \left( \gamma \beta_2 \mathcal{K}(u^{(2)}) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial X} - \beta_1 \mathcal{K}(u^{(1)}) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial X} \right) + \gamma \beta_2 \mathcal{K}(u^{(2)}) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} - \beta_1 \mathcal{K}(u^{(1)}) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y}. \quad (3.18)$$

$$Y \rightarrow -\infty \quad iken \quad u^{(2)} \rightarrow 0 \quad r = 1, 2. \quad (3.19)$$

Burada

$$\mathcal{K}(\psi) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2. \quad (3.20)$$

Alt indisler ve parantez içindeki üst indisler, büyüklüğün hangi bölgeye karşı geldiğini göstermektedir.  $\mu_r = \Phi^{(r)}(3)$  kayma modülünü,  $n_r = \frac{d\Phi^{(r)}}{dI^{(r)}}(3)/\rho^{(r)}$  lineer olmayan

malzeme parametrelerini ve  $c_r^2 = \mu_r/\rho^{(r)}$  olmak üzere  $c_r$ ,  $r = 1, 2$  için sırasıyla tabaka ve yarım uzaya ait lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarını temsil etmektedir.  $\gamma = \mu_2/\mu_1$  ve  $\beta_r = n_r/c_r^2$  olarak tanımlanmaktadır. Eğer  $n_r > 0$  ise ilgili malzeme kaymada sertleşen, aksi halde kaymada yumuşayan davranış gösterir.

Görüldüğü gibi problemin matematiksel ifadesinde lineer olmayan denklemlere, değişken katsayılı lineer olmayan sınır koşulları eşlik etmektedir. Tabakanın sınır yüzeylerindeki değişimin temsilcisi olan bu değişken katsayılar, yüzey normallerinin bileşenlerinin sabit olmamasından kaynaklanmaktadır. (3.16)-(3.19) denklemleri ile tanımlanan lineer olmayan sınır değer probleminin asimptotik çözümleri inşaa edilmeden önce, bazı noktalara ışık tutmak amacı ile bir sonraki bölümde lineer dalgaların yayılması problemi ele alınacaktır.

### 3.2 Lineer Dalgalar ve Dispersiyon

(3.16)-(3.19) denklemlerinde ortamın lineer olmayan özelliklerine ait sabitler  $\beta_r = 0$ ,  $r = 1, 2$  alınarak, lineer dalgaları betimleyen denklemler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial t^2} - c_r^2 \left( \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u^{(r)}}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad r = 1, 2. \quad (3.21)$$

$$Y = h + f_1(X) \text{ 'de; } -\frac{df_1}{dX} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial X} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} = 0, \quad (3.22)$$

$$Y = f_2(X) \text{ 'de; } u^{(1)} = u^{(2)}$$

$$\text{ve } -\frac{df_2}{dX} \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial X} - \gamma \frac{\partial u^{(2)}}{\partial X} \right) + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} = 0, \quad (3.23)$$

$$Y \rightarrow -\infty \text{ iken } u^{(2)} \rightarrow 0. \quad (3.24)$$

Pozitif  $X$  eksenini yönünde yayılan harmonik dalgalar için (3.21) denklemlerinin çözümleri aşağıdaki formlarda aranabilir:

$$u^{(r)} = U^{(r)}(Y) e^{i(kX - \omega t)} + k.e., \quad r = 1, 2. \quad (3.25)$$

Burada k.e. bir önceki terimin kompleks eşleniğini göstermektedir.  $k$  dalga sayısı,  $\omega$  açısal frekans olmak üzere dalgaların faz hızı  $c = \omega/k$  olarak tanımlanır. Dalga kinematığından bilinmektedir ki uzaysal inhomojenite frekansta herhangi bir değişim olmaksızın  $k$  dalga sayısında değişime sebep olur. Frekans, ancak ortamda

zamana bağlı değişim varsa buna bağlı olarak değişim göstermektedir, [42, 56, 57]. Dolayısıyla sınır yüzeylerdeki değişime bağlı olarak  $k$  dalga sayısı da  $X$ 'e bağlı olarak değişmektedir. (3.24) radyasyon koşulunun sağlanması ve lineer dalga yayılımının var olabilmesi için, ortamdaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızları arasında aşığıdaki bağıntı kabul edilecektir:

$$c_1 < c < c_2. \quad (3.26)$$

$k = k(X)$  olduğuna dikkat ederek, (3.25) çözümleri (3.21) denklemlerinde kullanılırsa  $U^{(1)}$  ve  $U^{(2)}$  için aşığıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{d^2 U^{(1)}}{dY^2} + k^2 \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) U^{(1)} + (2ik' - 2Xkk' - X^2(k')^2 + iXk'')U^{(1)} = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{d^2 U^{(2)}}{dY^2} + k^2 \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) U^{(2)} + (2ik' - 2Xkk' - X^2(k')^2 + iXk'')U^{(2)} = 0. \quad (3.28)$$

(3.24) sınır koşulu sağlanacak şekilde,

$$U^{(1)} = Ae^{ikpY} + Be^{-ikpY}, \quad (3.29)$$

$$U^{(2)} = Ce^{kvY} \quad (3.30)$$

çözümlerinin (3.27)-(3.28) denklemlerinin çözümlerine yakınsaması için  $k$ 'nın  $X$ 'e göre birinci ve ikinci türevlerinin çok küçük olduğu varsayımı yapılmalıdır, [22, 38]. (3.29)-(3.30)'da  $p$  ve  $v$  aşığıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$p^2 = \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) > 0, \quad v^2 = \left( 1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) > 0. \quad (3.31)$$

Bu çözümler (3.22)-(3.23) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$\mathbf{U} = (A, B, C)^T \quad (3.32)$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} (p - f'_1)e^{ikp(h+f_1)} & -(p + f'_1)e^{-ikp(h+f_1)} & 0 \\ (ip - if'_2)e^{ikpf_2} & -(if'_2 + ip)e^{-ikpf_2} & \gamma(if'_2 - v)e^{kvf_2} \\ e^{ikpf_2} & e^{-ikpf_2} & -e^{kvf_2} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

olmak üzere

$$\mathbf{WU} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

homojen cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözüme sahip olabilmesi için

$$\det \mathbf{W} = 0 \quad (3.35)$$

olmalıdır. Bu koşul aşağıdaki dispersiyon bağıntısını verir:

$$\tan[(f_1 - f_2 + h)kp] = \frac{-ip(f'_1 + f'_2(-1 + \gamma) + iv\gamma)}{f'_1 f'_2 (\gamma - 1) + p^2 + i\gamma v f'_1}. \quad (3.36)$$

Yukarıdaki bağıntı, düzensiz sınır yüzeylere sahip bir tabakayla kaplı izotropik bir yarım uzayda Love dalga yayılımı için Sing tarafından türetilen dispersiyon bağıntısı ile örtüşmektedir, [38]. Bu bağıntıda sınır yüzeylerindeki düzensizlikleri temsil eden fonksyonlar  $f_1 = 0$  ve  $f_2 = 0$  olarak seçildiğinde, problemin geometrisi düzlem sınır yüzeylere sahip bir tabakayla kaplı yarım uzaya dönüşür ve dispersiyon bağıntısı aşağıdaki bağıntıya indirgenir:

$$\frac{v\gamma}{p} = \tan(hkp). \quad (3.37)$$

Bu bağıntı, düzgün (uniform) kalınlıklı bir tabaka ile kaplı yarım uzayda yayılan Love dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır, [2].

(3.27)-(3.28) denklemlerinin çözümleri için, sınır yüzeylerdeki uzaysal değişime bağlı olan  $k$  dalga sayısının  $X$ 'e göre birinci ve ikinci türevlerinin çok küçük olduğu varsayılarak hesaplamalar yürütülmüştür. Tabakanın sınır yüzeylerindeki keyfi bir değişim için dalga yayılımı analizi oldukça kompleks olduğundan bir çok yazar, problemi bu tür varsayımlar altında ele almıştır. Paul, küçük genlikli sinüzoidal tip serbest yüzey ve arayüzeye sahip tabakalı bir yarım uzayda Love dalga yayılımının mümkün olduğunu göstermiştir, [27]. Gjevik, hem arayüzeyin hem de serbest yüzeyin dalganın yayılma yönünde yavaş değiştiği tabakalı bir yarım uzayda Love dalgalarının modülasyonu için bir varyasyonel yaklaşım formüle ederek, dalgaların genliği ve dalga sayısındaki yavaş değişimi karakterize eden denklemleri elde etmiştir, [32]. Bu çalışmalarda, sınırlardaki yavaş değişim, sınırlardaki düzensizliklerin genliğinin tabaka kalınlığına kıyasla oldukça küçük olduğu anlamına gelmektedir. Markenscoff ve Lekoudis, [34], Gjevik'in incelediği modeli ele almış, hem arayüzeyin hem de serbest yüzeyin yavaş değiştiği tabakalı bir yarım uzayda Love dalgalarının lineer yayılımı problemi için çoklu ölçekler metodunu kullanarak düzgün geçerli bir asimptotik çözüm sunmuştur. Bir sonraki bölümde, Markenscoff ve Lekoudis'in bahsedilen çalışmasındaki pertürbasyon problemlerindeki bazı yazım yanlışlarından dolayı ve dalga genliğinin sadece konuma bağlı yavaş değişimini değil ayrıca zamana bağlı yavaş modülasyonunu da incelemek amacı ile lineer dalga yayılımı problemi tekrar ele alınacak ve asimptotik bir çözüm inşaa edilecektir.

### 3.2.1 Linear Love dalgalarının asimptotik analizi

Bu bölümde, serbest yüzeyin ve arayüzeyin dalgaların yayılma yönünde yavaş değişime sahip olduğu tabakalı bir yarım uzayda yayılan lineer Love dalgaları problemi için asimptotik bir çözüm inşaa edilecektir.  $\varepsilon > 0$  küçük bir parametre olmak üzere, sınır yüzeylerdeki yavaş değişimin  $\varepsilon$  ölçeği ile temsil edildiği varsayılarak,  $f_1 = f_1(\varepsilon X)$ ,  $f_2 = f_2(\varepsilon X)$  durumu ele alınacaktır. Dalganın hızlı ve yavaş değişen özellikleri arasında açık bir ayırım yapabilmek için problem, aşağıda tanımlanan çoklu ölçeklerin bir kümesine genişletilmiştir:

$$x_1 = \varepsilon X, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad y = Y. \quad (3.38)$$

$x_1, t_1$ , yayılma olayında yavaş değişimi karakterize eden değişkenlerdir. Burada çoklu ölçekler metodunun bir genişlemesi olarak bir  $\theta$  faz değişkeni tanımlanmıştır, öyle ki:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = k, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\omega. \quad (3.39)$$

$k$  dalga sayısı ve  $\omega$  açısal frekans olmak üzere, genel durumda  $k$  ve  $\omega$ , sistemlerin yavaş değişen özelliklerine bağlı olarak değişmektedir. Dalganın korunumu  $(\theta_t)_X = (\theta_X)_t$  denkleminde uzaysal inhomojenitenin frekansta herhangi bir değişim olmaksızın  $k$  dalga sayısında değişime sebep olduğu bilinmektedir. Frekans, ancak ortamda zamana bağlı değişim varsa buna bağlı olarak değişim göstermektedir, [56]. Dolayısıyla sınır yüzeylerindeki yavaş değişimi temsil eden ölçeğe bağlı olarak  $k = k(x_1)$ ,  $V_g = V_g(x_1)$ 'dir.

Bu yeni değişkenler cinsinden yazılan  $u^{(r)}(\theta, x_1, y, t_1)$ ,  $r = 1, 2$ , bağımlı değişkenlerin  $\{\varepsilon^n\}$  asimptotik dizisine göre uniform olarak geçerli aşağıdaki asimptotik açılıma sahip oldukları kabul edilmektedir:

$$u^{(r)}(\theta, x_1, y, t_1) \cong \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n^{(r)}(\theta, x_1, y, t_1). \quad (3.40)$$

Tabaka kalınlığındaki yavaş değişimi temsil eden fonksiyonlar  $f_1(\varepsilon X)$ ,  $f_2(\varepsilon X)$  yeni değişkenler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$f_1(\varepsilon X) = f_1(x_1), \quad (3.41)$$

$$f_2(\varepsilon X) = f_2(x_1). \quad (3.42)$$

Eski ve yeni değişkenlere göre türev operatörleri arasında aşağıdaki eşitlikler kullanılacaktır:

$$\frac{\partial}{\partial X} = k \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} = k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon \left( 2k \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_1} + \frac{\partial k}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2\varepsilon\omega \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial X} = \varepsilon \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial X} = \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \sim O(1). \quad (3.50)$$

(3.21)-(3.24) hareket denklemleri ve sınır koşulları yeni bağımsız değişkenler cinsinden yazılıp (3.40) asimptotik açılımı kullanılırsa,  $u_n^{(r)}$ 'lerin ardışık olarak belirlenebilecekleri bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Pertürbasyon problemlerinden ilk ikisi aşağıda verilmiştir:

$\varepsilon$  mertebesindeki problem,  $O(\varepsilon)$ :

$$L(u_1^{(r)}) \triangleq \omega^2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta^2} - c_r^2 \left( k^2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial y^2} \right) = 0, \quad r = 1, 2, \quad (3.51)$$

$$y = h + f_1(x_1) \text{ serbest yüzeyinde } \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad (3.52)$$

$$y = f_2(x_1) \text{ arayüzeyinde } u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \text{ ve } \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (3.53)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } u_1^{(2)} \rightarrow 0. \quad (3.54)$$

$\varepsilon^2$  mertebesindeki problem,  $O(\varepsilon^2)$ :

$$L(u_2^{(r)}) = c_r^2 \left( 2k \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta \partial x_1} + \frac{\partial k}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \theta} \right) + 2\omega \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta \partial t_1}, \quad r = 1, 2, \quad (3.55)$$

$$y = h + f_1(x_1) \text{ serbest yüzeyinde } \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} - k \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} = 0, \quad (3.56)$$

$$y = f_2(x_1) \text{ arayüzeyinde } u_2^{(1)} = u_2^{(2)}$$

$$\text{ve } -k \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} - \gamma \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (3.57)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } u_2^{(2)} \rightarrow 0. \quad (3.58)$$

Şimdi  $\varepsilon$  mertebesindeki problemden başlayarak bu problemlerin çözümleri elde edilecektir.  $\varepsilon$  mertebesindeki problem,

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta^2} - c_1^2 \left( k^2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial y^2} \right) = 0, \quad r = 1, 2 \quad (3.59)$$

olmak üzere, harmonik dalgalar için (3.59) denklemlerinin çözümleri aşağıdaki formlarda aranabilir:

$$u_1^{(r)} = U^{(r)}(y) e^{i\theta} + k.e., \quad r = 1, 2. \quad (3.60)$$

(3.60) çözüm formları (3.59) denklemlerinde kullanılırsa  $U^{(1)}$  ve  $U^{(2)}$  için aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{d^2 U^{(1)}}{dY^2} + k^2 \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) U^{(1)} = 0, \quad (3.61)$$

$$\frac{d^2 U^{(2)}}{dY^2} + k^2 \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) U^{(2)} = 0. \quad (3.62)$$

(3.54) radyasyon koşulunun sağlanabilmesi için (3.62) denkleminin çözümlerinin hiperbolik fonksiyonlar olması gerekmektedir. (3.54) radyasyon koşulunun sağlanması ve lineer dalga yayılımının var olabilmesi için, ortamdaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızları arasında aşağıdaki bağıntının geçerli olduğu kabul edilmiştir:

$$c_1 < c < c_2. \quad (3.63)$$

Bu koşul altında (3.61)-(3.62) denklemlerinin çözümleri

$$U^{(1)} = A_1 e^{ikpy} + B_1 e^{-ikpy}, \quad (3.64)$$

$$U^{(2)} = C_1 e^{kvy} \quad (3.65)$$

olarak elde edilir ve tüm modlar için (3.59) denklemlerinin çözümleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$u_1^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ A_1^{(l)}(x_1, t_1) e^{ilkpy} + B_1^{(l)}(x_1, t_1) e^{-ilkpy} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (3.66)$$

$$u_1^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} C_1^{(l)}(x_1, t_1) e^{lky} e^{il\theta} + k.e.. \quad (3.67)$$

Burada  $l$  reel pozitif tamsayı,  $p$  ve  $v$  (3.31)'deki gibi tanımlanmaktadır.  $A_1^{(l)}$ ,  $B_1^{(l)}$  ve  $C_1^{(l)}$  yavaş değişen dalga genliği fonksiyonlarıdır ve problemin sınır koşullarından elde edilecektir. Bunun için (3.66)-(3.67) ile verilen çözümler (3.52)-(3.53) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$\mathbf{U}_1^{(l)} = (A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)})^T \quad (3.68)$$

ve

$$\mathbf{W}_l = \begin{pmatrix} ilkpe^{ilkp(h+f_1)} & -ilkpe^{-ilkp(h+f_1)} & 0 \\ ilkpe^{ilkpf_2} & -ilkpe^{-ilkpf_2} & -\gamma l k v e^{l k v f_2} \\ e^{ilkpf_2} & e^{-ilkpf_2} & -e^{l k v f_2} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

olmak üzere  $\mathbf{U}_1^{(l)}$  vektörleri için

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

homojen cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu homojen denklem sistemlerinin sıfırdan farklı çözümleri ancak  $\det \mathbf{W}_l = 0$  olması durumunda mevcuttur.  $l = 1$  için

$$\det \mathbf{W}_1 = 0 \quad (3.71)$$

eşitliğinden aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir:

$$\frac{v\gamma}{p} = \tan[(f_1 - f_2 + h)kp] \quad (3.72)$$

Burada

$$p = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{k^2 c_1^2} - 1\right)} \quad v = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}\right)} \quad (3.73)$$

olmak üzere, (3.72) dispersiyon bağıntısı, zincir kuralından faydalanılarak  $k$ 'ya göre türetilirse,  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  ile tanımlanan grup hızı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$v_g = \frac{v^2 w^2 \gamma c_2^2 + c_1^2 (p^2 w^2 \gamma + k^3 v (p^2 + v^2 \gamma^2) c_2^2 (h + f_1 - f_2))}{k w (p^2 \gamma c_1^2 + v c_2^2 (v \gamma + k (p^2 + v^2 \gamma^2) (h + f_1 - f_2)))}. \quad (3.74)$$

$f_1$  ve  $f_2$ ,  $x_1$  yavaş değişkeninin birer fonksiyonu olduğundan  $v_g$  grup hızının da  $x_1$  yavaş değişkenine bağlı olduğu görülmektedir. Ayrıca, dispersiyon bağıntısı  $x_1$



değişkenine göre türetilirse,  $k$ 'nın  $x_1$ 'e göre değişimini temsil eden aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\frac{\partial k}{\partial x_1} = \frac{k^2 p^2 v (p^2 + v^2 \gamma^2) (f_1' - f_2')}{(p^2 + v^2) \gamma + k p^2 v (h + f_1 - f_2) + k v^3 \gamma^2 (h + f_1 - f_2)}. \quad (3.75)$$

Bölümün başında da belirtildiği gibi bu kısımda bir  $k$  dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının self modülasyonu incelenmektedir. Bu nedenle yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıkları kabul edilmektedir, yani (3.69)'daki  $\mathbf{W}_l$  matrisi için aşağıdaki koşul geçerlidir:

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \det \mathbf{W}_l \neq 0. \quad (3.76)$$

Bu koşul altında (3.70) denklem sistemlerinin çözümleri,  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{W}_l \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (3.77)$$

denklemlerini sağlayan bir sütun vektör olmak üzere ,

$$l = 1 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(1)} = A_1(x_1, t_1) \mathbf{R} \quad (3.78)$$

ve

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.79)$$

olarak elde edilir.  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)^T$  olmak üzere, (3.77) denklem sisteminin bir çözümü aşağıdaki gibidir:

$$R_1 = \frac{1}{2} e^{-i(f_1+h)kp + f_2kv} \sec [(f_1 - f_2 + h)kp], \quad (3.80)$$

$$R_2 = \frac{1}{2} e^{i(f_1+h)kp + f_2kv} \sec [(f_1 - f_2 + h)kp], \quad R_3 = 1. \quad (3.81)$$

(3.78)-(3.79) kullanılarak, birinci mertebeye çözümler (3.66)-(3.67)'den

$$u_1^{(1)} = A_1 (R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy}) e^{i\theta} + k.e., \quad (3.82)$$

$$u_1^{(2)} = A_1 R_3 e^{kvy} e^{i\theta} + k.e. \quad (3.83)$$

olarak elde edilir.  $\varepsilon$  mertebesindeki problem çözülerek  $r = 1, 2$  için  $u_1^{(r)}$ 'lerin ancak  $\theta$  ve  $y$  değişkenlerine bağlılığının yapısı açık olarak hesaplanabilmiştir. Bu fonksiyonların diğer değişkenlere bağlılığı  $\varepsilon^2$  mertebesindeki problem çözülerek belirlenecektir. Yukarıda verilen birinci mertebeye çözümler, ikinci mertebeye

pertürbasyon problemine ait denklemlerde yerine konulursa, bu denklemler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$L(u_2^{(1)}) = ((D_1 + D_2y)e^{ikpy} + (D_3 + D_4y)e^{-ikpy})e^{i\theta} + k.e., \quad (3.84)$$

$$L(u_2^{(2)}) = (D_5 + D_6y)e^{kvy}e^{i\theta} + k.e. \quad (3.85)$$

Yukarıdaki denklemlerin katsayıları,

$$D_1 = 2iR_1 \left( \omega \frac{\partial A_1}{\partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) + 2iA_1 \left( kc_1^2 \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{R_1}{2} c_1^2 \frac{\partial k}{\partial x_1} \right), \quad (3.86)$$

$$D_2 = 2A_1 R_1 c_1^2 \frac{k}{p} \frac{\partial k}{\partial x_1}, \quad (3.87)$$

$$D_3 = 2iR_2 \left( \omega \frac{\partial A_1}{\partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) + 2iA_1 \left( kc_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial x_1} + \frac{R_2}{2} c_1^2 \frac{\partial k}{\partial x_1} \right), \quad (3.88)$$

$$D_4 = -2A_1 R_2 c_1^2 \frac{k}{p} \frac{\partial k}{\partial x_1}, \quad (3.89)$$

$$D_5 = 2iR_3 \left( \omega \frac{\partial A_1}{\partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) + 2iA_1 \left( kc_2^2 \frac{\partial R_3}{\partial x_1} + \frac{R_3}{2} c_2^2 \frac{\partial k}{\partial x_1} \right), \quad (3.90)$$

$$D_6 = 2iA_1 R_3 c_2^2 \frac{k}{v} \frac{\partial k}{\partial x_1}, \quad (3.91)$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.84)-(3.85) denklemlerinin çözümleri

$$u_2^{(r)} = \bar{u}_2^{(r)} + \hat{u}_2^{(r)}, \quad r = 1, 2, \quad (3.92)$$

şeklinde iki parçaya ayrılır, öyle ki  $\bar{u}_2^{(r)}$   $r = 1, 2$  için sırasıyla (3.84)-(3.85) denklemlerinin özel çözümleri,  $\hat{u}_2^{(r)}$

$$L(\hat{u}_2^{(r)}) = 0 \quad (3.93)$$

homojen denklemlerinin, aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleridir;

$$y = h + f_1(x_1) \text{ serbest yüzeyinde, } \frac{\partial \hat{u}_2^{(1)}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial y} + k \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta}, \quad (3.94)$$

$$y = f_2(x_1) \text{ arayüzeyinde, } \hat{u}_2^{(1)} - \hat{u}_2^{(2)} = \bar{u}_2^{(1)} - \bar{u}_2^{(2)} \text{ ve} \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \hat{u}_2^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial y} + k \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} - \gamma \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \theta} \right), \quad (3.96)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için, } \hat{u}_2^{(2)} + \bar{u}_2^{(2)} \rightarrow 0. \quad (3.97)$$

(3.84)-(3.85) ile verilen denklemlerin özel çözümleri  $\bar{u}_2^{(1)}$  ve  $\bar{u}_2^{(2)}$  belirsiz katsayılar yöntemiyle bulunabilir. Lineer bağımsız çözümler için  $\bar{u}_2^{(1)}$  ve  $\bar{u}_2^{(2)}$  aşağıdaki şekilde

seçilmelidir:

$$\bar{u}_2^{(1)} = (C_1 y + C_2 y^2) e^{ikpy} e^{i\theta} + (C_3 y + C_4 y^2) e^{-ikpy} e^{i\theta} + k.e., \quad (3.98)$$

$$\bar{u}_2^{(2)} = (C_5 y + C_6 y^2) e^{kvy} e^{i\theta} + k.e.. \quad (3.99)$$

(3.98)-(3.99)'deki çözüm formları (3.84)-(3.85) denklemlerinde kullanılırsa, gerekli ara işlemlerden sonra  $C_\alpha = C_\alpha(x_1, t_1)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ , katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$C_1 = iD_1/(2kpc_1^2) - D_2/(4k^2 p^2 c_1^2), \quad (3.100)$$

$$C_2 = iD_2/(4kpc_1^2), \quad (3.101)$$

$$C_3 = -iD_3/(2kpc_1^2) - D_4/(4k^2 p^2 c_1^2), \quad (3.102)$$

$$C_4 = -iD_4/(4kpc_1^2), \quad (3.103)$$

$$C_5 = -D_4/(2kvc_2^2) + D_5/(4k^2 v^2 c_2^2), \quad (3.104)$$

$$C_6 = -D_5/(4kvc_2^2). \quad (3.105)$$

$L(\hat{u}_2^{(1)}) = 0$ ,  $L(\hat{u}_2^{(2)}) = 0$  homojen denklemlerin çözümleri, birinci mertebe problemdeki gibi değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak aşağıdaki formlarda elde edilir:

$$\hat{u}_2^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ A_2^{(l)}(x_1, t_1) e^{ilkpy} + B_2^{(l)}(x_1, t_1) e^{-ilkpy} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (3.106)$$

$$\hat{u}_2^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} C_2^{(l)}(x_1, t_1) e^{lkvy} e^{il\theta} + k.e.. \quad (3.107)$$

Burada  $A_2^{(l)}$ ,  $B_2^{(l)}$  ve  $C_2^{(l)}$  ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bunlar (3.94)-(3.96) sınır koşulları kullanılarak hesaplanacaktır.

$$\mathbf{U}_2^{(l)} = (A_2^{(l)}, B_2^{(l)}, C_2^{(l)})^T \quad (3.108)$$

olmak üzere,  $u_2^{(r)}$  çözümleri (3.94)-(3.96) sınır koşullarında kullanılırsa,  $\mathbf{U}_2^{(l)}$ 'ler için aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{b}_2^{(l)}. \quad (3.109)$$

Burada

$$l \geq 2 \text{ için } \det \mathbf{W}_l \neq 0 \text{ ve } \mathbf{b}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0} \quad (3.110)$$

olduğundan

$$l \geq 2 \text{ için } \mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.111)$$

olarak elde edilir.  $l = 1$  için  $\mathbf{b}_2^{(1)}$  vektörü,  $\mathbf{W}_1$  matrisi ve  $\mathbf{R}$  vektörü kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = -i \left( \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial A_1}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) \mathbf{R} + i \mathbf{G} A_1. \quad (3.112)$$

Reel  $\mathbf{G}$  vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$G_1 = \frac{e^{f_2 k v} (f_1 + h) \sec [(f_1 - f_2 + h) k p]}{2 p^2 v} \{ 2 k^2 p^2 v (p \tan [(f_1 - f_2 + h) k p] (f'_1 - f'_2) + v f'_2) + (v + p (2 f_2 k p + v (p - 2 (f_1 - f_2 + h) k \tan [(f_1 - f_2 + h) k p]))) k' \}, \quad (3.113)$$

$$G_2 = \frac{1}{2 k p^3 v^3} e^{f_2 k v} \{ 2 k^2 p^2 v^3 (-f_2 k p^2 \tan [(f_1 - f_2 + h) k p] f'_2 - v \tan [(f_1 - f_2 + h) k p] f'_2) + 2 k^2 p^3 v^3 \left( (f_2 k v - \gamma) f'_2 + \sec [(f_1 - f_2 + h) k p]^2 (-f'_1 + f'_2) \right) + k' (2 (f_1 - f_2 + h) k p v^3 \sec [(f_1 - f_2 + h) k p]^2 + v^2 \tan [(f_1 - f_2 + h) k p] (-v + p^2 (-v + f_2 k (-2 + f_2 k v))) + p (f_2 k v^3 + p^2 (\gamma + v (-f_2^2 k^2 v (-2 + \gamma) - v \gamma - f_2 k (v^2 (-1 + \gamma) + \gamma)))) \},$$

$$G_3 = -\frac{e^{f_2 k v} f_2}{2 k p^3 v^3} \{ 2 k^2 p^3 v^3 f'_2 + k' p (-f_2 k v^3 + p^2 (-1 + f_2 k v + v^2)) + 2 k p v^3 \sec [(f_1 - f_2 + h) k p]^2 (k p^2 (f'_1 - f'_2) - (f_1 - f_2 + h) k') + v^2 \tan [(f_1 - f_2 + h) k p] (2 k^2 p^2 v^2 f'_2 + k' (v + p^2 (2 f_2 k + v))) \}. \quad (3.114)$$

$\det \mathbf{W}_1 = 0$  ve  $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}$  olduğu için  $\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_2^{(1)} = \mathbf{b}_2^{(1)}$  denklem sisteminin çözümünün olması için  $\mathbf{b}_2^{(1)}$  vektörü  $\mathbf{W}_1$  matrisinin sütun uzayında olmalıdır. Bu sebeple,

$$\mathbf{L} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \quad (3.115)$$

ile tanımlanan  $\mathbf{W}_1$  matrisinin sütun uzayına dik her  $\mathbf{L}$  vektörü için

$$\mathbf{L} \mathbf{b}_2^{(1)} = \mathbf{0} \quad (3.116)$$

uygunluk koşulu sağlanmalıdır.  $\text{Rank}(\mathbf{W}_1) = 2$  olduğundan  $\mathbf{L}$  vektörü bir parametreye bağlıdır ve (3.116) uygunluk koşulunun bir  $\mathbf{L}$  için sağlanması yeterlidir. (3.115) eşitliğini sağlayan  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$  vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$L_1 = e^{-i(h+f_1-f_2)kp} (-ip + v\gamma), \quad L_2 = ip, \quad L_3 = -ikpv\gamma. \quad (3.117)$$

Daha önceki bölümde gösterildiği gibi

$$v_g = - \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \mathbf{R} \right) / \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right) \quad (3.118)$$

olduğu dikkate alınarak, (3.116) uygunluk koşulundan  $A_1$  fonksiyonunun

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_1} + v_g(x_1) \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = \Lambda(x_1) A_1 \quad (3.119)$$

denklemini sağlaması gerektiği bulunur. Burada,  $\Lambda(x_1)$  aşağıdaki gibidir:

$$\Lambda = \mathbf{L} \cdot \mathbf{G} / \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right). \quad (3.120)$$

Şimdi (3.119) denkleminin çözümü bulunarak, birinci merteye çözümlerin inşası tamamlanacaktır. Karakteristikler yöntemi ile aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{v_g(x_1)} = \frac{dA_1}{\Lambda(x_1) A_1}. \quad (3.121)$$

Yukarıdaki ilk iki denklem integre edilirse,

$$t = \int \frac{dx_1}{v_g(x_1)} + c_1, \quad (3.122)$$

son iki denklem integre edilirse,

$$A_1 = c_2 \exp \left( \int \frac{\Lambda(x_1)}{v_g(x_1)} dx_1 \right) \quad (3.123)$$

elde edilir. Buradan ,

$$c_2 = A_1 \exp \left( - \int \frac{\Lambda(x_1)}{v_g(x_1)} dx_1 \right) \quad (3.124)$$

$$c_1 = t - \int \frac{dx_1}{v_g(x_1)}, \quad (3.125)$$

karakteristik eğrileri elde edilir. H başlangıç datasından belirlenecek bir fonksiyon olmak üzere,

$$A_1 \exp \left( - \int \frac{\Lambda(x_1)}{v_g(x_1)} dx_1 \right) = H \left( t - \int \frac{dx_1}{v_g(x_1)} \right) \quad (3.126)$$

eşitliğinden

$$A_1 = \exp \left( \int \frac{\Lambda(x_1)}{v_g(x_1)} dx_1 \right) H \left( t - \int \frac{dx_1}{v_g(x_1)} \right) \quad (3.127)$$

olarak elde edilir. Böylece, sınır yüzeyleri  $\varepsilon$  mertebesinde yavaş değişen tabakalı bir yarım uzayda yayılan lineer Love dalgaları için verilecek bir başlangıç datası ile birinci merteye düzgün geçerli çözümler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u^{(1)} = \varepsilon \exp \left( \int \frac{\Lambda(x_1)}{v_g(x_1)} dx_1 \right) H \left( t - \int \frac{dx_1}{v_g(x_1)} \right) (R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy}) e^{i\theta} + k.e.,$$

$$u^{(2)} = \varepsilon \exp \left( \int \frac{\Lambda(x_1)}{v_g(x_1)} dx_1 \right) H \left( t - \int \frac{dx_1}{v_g(x_1)} \right) R_3 e^{kvy} e^{i\theta} + k.e..$$

### 3.3 Linear Olmayan Yüzey SH (Love) Dalgalarının Asimptotik Analizi

Bu kısımda, düzensiz sınır yüzeylerinin yanı sıra lineer olmayan malzeme özelliklerinin de yüzey SH dalga yayılımına etkisi araştırılmıştır. Sınır yüzeylerindeki düzensizliklerin, dalgaların yayılma doğrultusunun birer fonksiyonu olarak yavaş değiştiği kabul edilmiştir. Bir önceki kısımda incelenen lineer dalga yayılımı problemindeki gibi yavaş değişim ölçeği  $\varepsilon$  mertebesinde seçildiğinde, sınır yüzeylerindeki düzensizliklerin etkisi ikinci mertebe problemin sınır koşullarında ortaya çıktığı için lineer olmayan evrim denkleminin türetildiği üçüncü mertebe problemde ilerlemek için gerekli analiz oldukça kompleks olmaktadır. Bu sebeple, değişken derinlikli ortamda yayılan su dalgalarındaki çalışmalarda da olduğu gibi tabakanın sınır yüzeyleri  $\varepsilon^2$  ölçeğinin yavaş değişen fonksiyonları olarak seçilmiştir, [42, 44, 45]. Ayrıca bir önceki bölümde kullanılan ölçeklerle çoklu ölçekler metodu yürütüldüğünde NLS denkleminde dispersiyon ile nonlineerlik birbirini dengeleyemez ve NLS denklemi dalga modülasyonunu karakterize edemez. Yavaş değişimin etkisini ortaya çıkarmak için, bir önceki bölümde kullanılan ölçeklerin farklı seçimiyle çoklu ölçekler metodu kullanılarak, SH dalgalarının lineer olmayan self modülasyonunun genlik fonksiyonu, asimptotik olarak değişken katsayılı genelleştirilmiş bir lineer olmayan Schrödinger (GNLS) denklemi ile karakterize edilmiştir. Sınır yüzeylerdeki düzensizlikleri temsil eden fonksiyonlar ihmal edildiğinde GNLS denklemi, düzlem sınır yüzeylere sahip tabakalı yarım uzayda yayılan lineer olmayan SH dalgalarını karakterize eden sabit katsayılı NLS denkleminde indirgenmektedir. Sabit katsayılı NLS denklemi her zaman integre edilebilirken, katsayıları sınır yüzeylerindeki düzensizliklere bağlı olan GNLS denklemi integrallenebilir olmayabilir. Bu sebeple, düzensizliklerin integrallenebilirliği koruduğu bazı özel durumlar araştırılmış ve bu durumlar için GNLS denkleminin soliton benzeri çözümleri, önerilen bir ansatz yardımıyla analitik olarak elde edilmiştir. Sınır yüzeylerdeki yavaş değişimin GNLS denkleminin integrallenebilirliğine izin vermediği diğer özel durumlar için, pseudospectral yöntem kullanılarak denklemin çözümleri nümerik olarak elde edilmiştir. Sınır yüzeylerindeki değişimin ve tabakalı yarım uzayın lineer olmayan malzeme özelliklerinin elde edilen soliton benzeri çözümlerin yayılma karakteristikleri üzerindeki etkileri grafiklerle incelenmiştir.

Hatırlanırsa bir önceki bölümde incelenen problemde

$$\tau = \omega \varepsilon^2 t, \quad \xi = k \varepsilon^{-1} (x_2 - V_g t_2) = k(x_1 - V_g t_1) \quad (3.128)$$

değişkenleri tanımlanarak (2.188) NLS denklemi elde edilmişti. Bunun ışığında, dalganın yayılma yönünde değişen sınır yüzeyleri  $\varepsilon^2$  ölçeğinin birer fonksiyonu seçildiğinde, katsayıları sınırlardaki değişime bağlı olan NLS denkleminin en genel anlamda türetilbileceği ön görülmektedir. Bir önceki bölümde kullanılan ölçeklerle çoklu ölçekler metodu yürütüldüğünde, NLS denkleminde dispersiyon ile nonlineerlik birbirlerini dengeleyememiş ve NLS denklemi dalga modülasyonunu karakterize edememiştir. Bu sebeple, çoklu ölçekler metodu kullanılırken yeni değişkenlerin seçiminde bazı düzenlemeler yapmak gerekmektedir.  $\xi = \varepsilon^2 X$  olmak üzere, sınır yüzeylerindeki değişimi temsil eden fonksiyonlar  $f_1 = f_1(\xi)$ ,  $f_2 = f_2(\xi)$  olarak tanımlanacaktır. Bu durumda, lineer olmayan SH dalga yayılımını asimptotik olarak karakterize eden lineer olmayan evrim denklemini en genel haliyle türetebilmek için, değişken derinlikli ortamda yayılan su dalgalarındaki çalışmalarda olduğu gibi aşağıdaki yeni değişkenler tanımlanarak çoklu ölçekler metodu kullanılacaktır, [42, 44, 45]:

$$\xi = \varepsilon^2 X, \quad \tau = \varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \int^{\xi} \frac{1}{V_g(X')} dX' - t \right), \quad y = Y. \quad (3.129)$$

$\xi$  ve  $\tau$  yayılma olayında yavaş değişimi karakterize eden yavaş değişkenler,  $V_g$  grup hızıdır. Faz değişkeni en genel anlamda aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = k, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\omega. \quad (3.130)$$

Dalganın korunumu  $(\theta_t)_X = (\theta_X)_t$  denklemi, sınır yüzeylerindeki uzaysal inhomojeniteden dolayı  $k$  dalga sayısı  $X$ 'e bağlı olarak değişirken, frekans  $\omega$ 'nın sabit kaldığı sonucunu verir, [42, 56, 58]. Dolayısıyla, dalgayı karakterize eden  $k = k(\xi)$  ve  $V_g = V_g(\xi)$  frekansı koruyacak şekilde sınır yüzeylerindeki lokal değişime bağlı olarak değişmektedir.

$u^{(r)}$ ,  $r = 1, 2$ , yer değiştirme fonksiyonlarının, yeni tanımlanan bağımsız değişkenlerin birer fonksiyonu olduğu kabul edilerek aşağıdaki düzgün geçerli asimptotik açılıma sahip oldukları varsayılır:

$$u^{(r)}(\theta, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n^{(r)}(\theta, \xi, \tau). \quad (3.131)$$

Yeni bağımsız değişkenlere göre türev operatörleri aşağıdaki şekilde yeniden yazılır:

$$\frac{\partial}{\partial X} = k \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon}{V_g} \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (3.133)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} = k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\varepsilon \frac{k}{V_g} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \tau} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2k \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \xi} + \frac{1}{V_g^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right), \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\varepsilon \omega \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad (3.135)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.136)$$

Ayrıca,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \xi} \sim O(1), \quad (3.137)$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial f_1}{\partial X} = \varepsilon^2 \frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \quad (3.138)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial X} = \varepsilon^2 \frac{\partial f_2}{\partial \xi}, \quad (3.139)$$

olarak yazılır.

(3.16)-(3.19) hareket denklemleri ve sınır koşulları (3.129) ile tanımlanan yeni bağımsız değişkenler cinsinden yazılır ve (3.131) asimptotik açılımı uygulanıp  $\varepsilon$ 'nın aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse,  $u_n^{(r)}$ 'lerin ardışık olarak belirlenebilecekleri bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Pertürbasyon problemlerinden ilk üçü aşağıda verilmiştir:

$\varepsilon$  mertebesindeki problem,  $O(\varepsilon)$ :

$$\mathcal{L}(u_1^{(r)}) \triangleq \omega^2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta^2} - c_r^2 \left( k^2 \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad r = 1, 2. \quad (3.140)$$

$$y = h + f_1(\xi) \quad \text{serbest yüzeyinde} \quad \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad (3.141)$$

$$y = f_2(\xi) \quad \text{arayüzeyinde} \quad u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (3.142)$$

$$y \rightarrow -\infty \quad \text{için} \quad u_1^{(2)} \rightarrow 0. \quad (3.143)$$



$\varepsilon^2$  mertebesindeki problem,  $O(\varepsilon^2)$ :

$$\mathcal{L}(u_2^{(r)}) = 2 \left( c_r^2 \frac{k}{V_g} - \omega \right) \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta \partial \tau} \quad r = 1, 2, \quad (3.144)$$

$$y = h + f_1(\xi) \quad \text{serbest yüzeyinde} \quad \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad (3.145)$$

$$y = f_2(\xi) \quad \text{arayüzeyinde} \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (3.146)$$

$$y \rightarrow -\infty \quad \text{için} \quad u_2^{(2)} \rightarrow 0. \quad (3.147)$$

$\varepsilon^3$  mertebesindeki problem,  $O(\varepsilon^3)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_3^{(r)}) = & 2 \left( c_r^2 \frac{k}{V_g} - \omega \right) \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \theta \partial \tau} + c_r^2 \left( \frac{1}{V_g^2} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \tau^2} + 2k \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \theta \partial \xi} + \frac{\partial k}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \tau^2} \\ & + n_r \left( k \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \theta} \mathcal{K}_0(u_1^{(r)}) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial Y} \mathcal{K}_0(u_1^{(r)}) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$y = h + f_1(\xi) \quad \text{serbest yüzeyinde} \quad \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial \xi} k \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} = 0, \quad (3.149)$$

$$y = f_2(\xi) \quad \text{arayüzeyinde} \quad u_3^{(1)} = u_3^{(2)} \quad \text{ve}$$

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial \xi} k \left( \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} - \gamma \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \theta} \right) = \gamma \beta_2 \mathcal{K}_0(u_1^{(2)}) \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} - \beta_1 \mathcal{K}_0(u_1^{(1)}) \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y},$$

$$y \rightarrow -\infty \quad \text{için} \quad u_3^{(2)} \rightarrow 0.$$

Burada

$$\mathcal{K}_0(\psi) = \left( k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2, \quad (3.150)$$

olarak tanımlanır.

Şimdi  $\varepsilon$  mertebesindeki problemden başlayarak bu problemlerin çözümleri elde edilecektir.  $\varepsilon$  mertebesindeki problem çözülerek  $u_1^{(r)}$ ,  $r = 1, 2$  fonksiyonlarının ancak  $\theta$  ve  $y$  değişkenlerine bağlılığının yapısı açık olarak hesaplanabilmektedir. Bu

fonksiyonların diğer değişkenlere bağıllığı daha üst merteye problemler çözülerek belirlenecektir. İkinci ve üçüncü merteye problemlerdeki denklemlerin sağ tarafı bir önceki mertebedeki problemlerden belirlenmiş olacağından, birinci merteye problem gibi daha üst merteye problemler de lineerdir. Ancak bu problemlerde hareket denklemleri ve bazı sınır koşulları homojen olmayan yapıdadır.

$\varepsilon$  mertebesindeki problemin bir önceki kısımda elde edilen (3.51)-(3.54) problemiyle aynı olduğu görülmektedir. Yalnız burada  $f_1 = f_1(\xi)$ ,  $f_2 = f_2(\xi)$  olduğuna dikkat edilmelidir. Şimdi, bir önceki kısımda izlenen yol takip edilerek birinci merteye çözümler inşa edilecektir. Harmonik dalgalar için (3.140) denklemlerinin çözümleri aşağıdaki formlarda aranabilir:

$$u_1^{(r)} = U^{(r)}(y)e^{i\theta} + k.e. \quad r = 1, 2. \quad (3.151)$$

Burada "k.e." bir önceki terimin kompleks eşleniğini göstermektedir.  $k$  dalga sayısı,  $\omega$  açısal frekans olmak üzere dalgaların faz hızı

$$c = \omega/k, \quad (3.152)$$

olarak tanımlanır. (3.151) çözüm formları (3.140) denklemlerinde kullanılırsa,  $U^{(r)}(y)$  fonksiyonları için aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{d^2 U^{(1)}}{dy^2} + k^2 \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) U^{(1)} = 0, \quad (3.153)$$

$$\frac{d^2 U^{(2)}}{dy^2} + k^2 \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) U^{(2)} = 0. \quad (3.154)$$

(3.143) radyasyon koşulunun sağlanabilmesi için (3.154) denkleminin çözümlerinin hiperbolik fonksiyonlar olması gerekmektedir. (3.143) radyasyon koşulunun sağlanması ve lineer dalga yayılımının var olabilmesi için, ortamdaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarının aşağıdaki eşitsizliği sağladığı kabul edilecektir:

$$c_1 < c < c_2 \quad (3.155)$$

Bu koşul altında (3.153)-(3.154) denklemlerinin çözümleri

$$U^{(1)} = Ae^{ikpy} + Be^{-ikpy}, \quad (3.156)$$

$$U^{(2)} = Ce^{kvy} \quad (3.157)$$

olarak elde edilir ve tüm modlar için (3.140) denklemlerinin çözümleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$u_1^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ A_1^{(l)}(\xi, \tau) e^{ilkpy} + B_1^{(l)}(\xi, \tau) e^{-ilkpy} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (3.158)$$

$$u_1^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} C_1^{(l)}(\xi, \tau) e^{lkvy} e^{il\theta} + k.e.. \quad (3.159)$$

Burada  $l$  reel pozitif tamsayıdır,  $p$  ve  $v$  aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$p^2 = \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) > 0, \quad v^2 = \left( 1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) > 0.$$

Birinci mertebe yavaş değişen dalga genliği fonksiyonları  $A_1^{(l)}$ ,  $B_1^{(l)}$  ve  $C_1^{(l)}$ , problemin sınır koşullarından elde edilecektir. Bunun için (3.158)-(3.159) çözümleri (3.141)-(3.142) sınır koşullarında kullanılırsa;

$$\mathbf{U}_1^{(l)} = (A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)})^T \quad (3.160)$$

ve

$$\mathbf{W}_l = \begin{pmatrix} ilkpe^{ilkp(h+f_1)} & -ilkpe^{-ilkp(h+f_1)} & 0 \\ ilkpe^{ilkpf_2} & -ilkpe^{-ilkpf_2} & -\gamma l k v e^{lkvf_2} \\ e^{ilkpf_2} & e^{-ilkpf_2} & -e^{lkvf_2} \end{pmatrix} \quad (3.161)$$

olmak üzere,  $\mathbf{U}_1^{(l)}$  vektörleri için

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0} \quad (3.162)$$

homojen cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu homojen denklem sistemlerinin sıfırdan farklı çözümleri ancak  $\det \mathbf{W}_l = 0$  olması durumunda mevcuttur.  $l = 1$  için,

$$\det \mathbf{W}_1 = 0 \quad (3.163)$$

eşitliğinden aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir:

$$\frac{v\gamma}{p} = \tan[(f_1 - f_2 + h)kp]. \quad (3.164)$$

Görüldüğü gibi,  $f_1$  ve  $f_2$ ,  $\xi$  yavaş değişkeninin birer fonksiyonu olduğu için  $k$  dalga sayısı da  $\xi$ 'ye bağlıdır. (3.164) dispersiyon bağıntısı,  $\xi$  yavaş değişkenine göre türetilirse aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\frac{dk}{d\xi} = \frac{k^2 p^2 v (p^2 + v^2 \gamma^2)}{(p^2 + v^2) \gamma + k p^2 v (h + f_1 - f_2) + k v^3 \gamma^2 (h + f_1 - f_2)} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \xi} - \frac{\partial f_2}{\partial \xi} \right). \quad (3.165)$$

(3.165) bağıntısı  $\xi$ 'ye göre  $k$ 'nın yavaş değişimini tanımlar.

Bölümün başında da belirtildiği gibi bu kısımda bir  $k$  dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının lineer olmayan self modülasyonu incelenmektedir. Bu nedenle yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıkları kabul edilmektedir, yani (3.161)'deki  $\mathbf{W}_l$  matrisi için aşağıdaki koşul geçerlidir:

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \det \mathbf{W}_l \neq 0. \quad (3.166)$$

Bu koşul altında (3.162)'nin çözümleri,  $\mathbf{R}$ ;

$$\mathbf{W}_l \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (3.167)$$

denklem sistemini sağlayan bir sütun vektör olmak üzere,

$$l = 1 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(1)} = A_1(\xi, \tau) \mathbf{R}, \quad (3.168)$$

ve

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_1^{(l)} = \mathbf{0}, \quad (3.169)$$

olarak elde edilir.  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)^T$  olmak üzere, (3.167) denklem sisteminin çözümü bir önceki kısımdaki gibi seçilmiştir:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2} e^{-i(f_1+h)kp+f_2kv} \sec[(f_1 - f_2 + h)kp], \\ R_2 &= \frac{1}{2} e^{i(f_1+h)kp+f_2kv} \sec[(f_1 - f_2 + h)kp], \quad R_3 = 1. \end{aligned} \quad (3.170)$$

(3.168)-(3.169) kullanılarak, birinci mertebeye çözümler (3.158)-(3.159)'dan aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(1)} = A_1(R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy}) e^{i\theta} + k.e., \quad (3.171)$$

$$u_1^{(2)} = A_1 R_3 e^{kvy} e^{i\theta} + k.e.. \quad (3.172)$$

Birinci mertebeye çözümün tamamen belirlenebilmesi için, dalga modülasyonunun yavaş değişen birinci mertebeye kompleks genlik fonksiyonu  $A_1$ 'in hesaplanması gerekmektedir. Yukarıda verilen birinci mertebeye çözümler, ikinci mertebeye pertürbasyon probleminin (3.144) denklemlerinde yerine konulursa, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\mathcal{L}(u_2^{(1)}) = 2i \mathcal{M}_1^{(1)} (R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy}) e^{i\theta} + k.e., \quad (3.173)$$

$$\mathcal{L}(u_2^{(2)}) = 2i R_3 \mathcal{M}_1^{(2)} e^{kvy} e^{i\theta} + k.e.. \quad (3.174)$$

Burada

$$\mathcal{M}_1^{(\alpha)} = \left(-\omega + \frac{kc_\alpha^2}{V_g}\right) \frac{\partial A_1}{\partial \tau}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.175)$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.173)-(3.174) denklemlerinin çözümlerini

$$u_2^{(r)} = \bar{u}_2^{(r)} + \hat{u}_2^{(r)}, \quad r = 1, 2, \quad (3.176)$$

şeklinde iki parçaya ayırılım, öyle ki  $\bar{u}_2^{(r)}$   $r = 1, 2$  sırasıyla (3.173)-(3.174) denklemlerinin özel çözümleri,  $\hat{u}_2^{(r)}$ 'ler ise

$$\omega^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_2^{(r)}}{\partial \theta^2} - c_r^2 \left( k^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_2^{(r)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_2^{(r)}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad r = 1, 2, \quad (3.177)$$

homojen denklemlerinin, (3.145)-(3.147)'den (3.176) kullanılarak türetilen aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun;

$$\begin{aligned} y = h + f_1(\xi) \quad \text{serbest yüzeyinde} \quad \frac{\partial \hat{u}_2^{(1)}}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial y}, \quad (3.178) \\ y = f_2(\xi) \quad \text{arayüzeyinde,} \quad \hat{u}_2^{(1)} - \hat{u}_2^{(2)} &= -\bar{u}_2^{(1)} + \bar{u}_2^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\text{ve} \quad \frac{\partial \hat{u}_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \hat{u}_2^{(2)}}{\partial y} = - \left( \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial y} \right) \quad (3.179)$$

$$y \rightarrow -\infty \quad \text{için,} \quad \hat{u}_2^{(2)} + \bar{u}_2^{(2)} \rightarrow 0. \quad (3.180)$$

(3.173)-(3.174) ile verilen denklemlerin özel çözümleri,  $\bar{u}_2^{(r)}$ , belirsiz katsayılar yöntemiyle bulunabilir. Lineer bağımsız çözümler için  $\bar{u}_2^{(r)}$ ,  $r = 1, 2$  için aşağıdaki şekilde seçilmelidir:

$$\bar{u}_2^{(1)} = \left( C_1 e^{ikpy} + C_2 e^{-ikpy} \right) y e^{i\theta} + k.e., \quad (3.181)$$

$$\bar{u}_2^{(2)} = C_3 y e^{kvy} e^{i\theta} + k.e. \quad (3.182)$$

(3.181)-(3.182)'deki çözüm formları (3.173)-(3.174) denklemlerinde kullanılırsa, gerekli ara işlemlerden sonra  $C_\alpha = C_\alpha(\xi, \tau)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , katsayıları

$$C_1 = \frac{-R_1 \mathcal{M}_1^{(1)}}{c_1^2 kp}, \quad C_2 = \frac{R_2 \mathcal{M}_1^{(1)}}{c_1^2 kp}, \quad C_3 = \frac{-iR_3 \mathcal{M}_1^{(2)}}{c_2^2 kv} \quad (3.183)$$

olarak elde edilir.

$\mathcal{L}(\hat{u}_2^{(r)}) = 0$ ,  $r = 1, 2$ , homojen denklemlerinin çözümleri ise birinci mertebe problemdeki gibi değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak (3.147) radyasyon

koşulunu sağlayacak şekilde aşağıdaki formlarda elde edilir:

$$\hat{u}_2^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ A_2^{(l)}(\xi, \tau) e^{ilkpy} + B_2^{(l)}(\xi, \tau) e^{-ilkpy} \right\} e^{il\theta} + k.e. , \quad (3.184)$$

$$\hat{u}_2^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} C_2^{(l)}(\xi, \tau) e^{lkvy} e^{il\theta} + k.e. . \quad (3.185)$$

Burada  $A_2^{(l)}$ ,  $B_2^{(l)}$  ve  $C_2^{(l)}$  ikinci mertebe yavaş değişen dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bunlar (3.178)-(3.179) sınır koşulları kullanılarak hesaplanacaktır.

$$\mathbf{U}_2^{(l)} = (A_2^{(l)}, B_2^{(l)}, C_2^{(l)})^T \quad (3.186)$$

olmak üzere,  $\bar{u}_2^{(r)}$  ve  $\hat{u}_2^{(r)}$ ,  $r = 1, 2$ , çözümleri, ikinci mertebe problemin sınır koşullarında kullanılırsa,  $\mathbf{U}_2^{(l)}$ 'ler için aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_2^{(l)} = \mathbf{b}_2^{(l)} . \quad (3.187)$$

Burada

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{b}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0} , \quad (3.188)$$

ve  $l = 1$  için  $\mathbf{b}_2^{(1)}$  vektörü aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -C_1[1 + ikp(h + f_1)]e^{ikp(h+f_1)} - C_2[1 - ikp(h + f_1)]e^{-ikp(h+f_1)} \\ -C_1(1 + ikpf_2)e^{ikpf_2} - C_2(1 - ikpf_2)e^{-ikpf_2} + C_3(1 + kvf_2)\gamma e^{kvf_2} \\ -f_2(C_1e^{ikpf_2} + C_2e^{-ikpf_2} - C_3e^{kvf_2}) \end{pmatrix} . \quad (3.189)$$

$\mathbf{W}_1$  matrisi ve  $\mathbf{R}$  vektörü kullanılarak

$$\mathbf{b}_2^{(1)} = i \left( \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} + \frac{1}{V_g} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \tau} \mathbf{R} \quad (3.190)$$

olduğu gösterilebilir.  $l \geq 2$  için  $\det \mathbf{W}_l \neq 0$  kabul edildiği için ve  $\mathbf{b}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0}$  olduğundan (3.187) denklem sistemlerinin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0} . \quad (3.191)$$

Bununla birlikte  $\det \mathbf{W}_1 = 0$  ve  $\mathbf{b}_2^{(1)} \neq \mathbf{0}$  olduğu için  $\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_2^{(1)} = \mathbf{b}_2^{(1)}$  denklem sisteminin çözümünün olması için  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{LW}_1 = \mathbf{0}$  ile tanımlanan  $\mathbf{W}_1$  matrisinin sütun uzayına dik bir vektörü olmak üzere,

$$\mathbf{Lb}_2^{(1)} = 0 \quad (3.192)$$

uygunluk koşulu sağlanmalıdır.  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$  vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$L_1 = e^{-i(f_1 - f_2 + h)kp} (-ip + v\gamma), \quad L_2 = ip, \quad L_3 = -ikpv\gamma. \quad (3.193)$$

Grup hızı için

$$V_g = - \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \mathbf{R} \right) / \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \mathbf{R} \right) \quad (3.194)$$

eşitliği ve (3.190) kullanılarak (3.192) uygunluk koşulunun sağlandığı görülür. (3.167)'deki  $\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = \mathbf{0}$  bağıntısının  $k$ 'ya göre türevi alınırsa,

$$\left( \frac{1}{V_g} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \right) \mathbf{R} + \mathbf{W}_1 \left( \frac{1}{V_g} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) = \mathbf{0} \quad (3.195)$$

elde edilir. (3.190) ve (3.195) kullanılırsa,  $l = 1$  için (3.187) denklem sisteminin çözümü

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = A_2(\xi, \tau) \mathbf{R} - i \frac{\partial A_1}{\partial \tau} \left( \frac{1}{V_g} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \quad (3.196)$$

olarak elde edilir. Burada  $A_2(\xi, \tau)$ , dalga modülasyonunun yavaş değişen ikinci merteye genliğini temsil eden kompleks fonksiyondur ve gerektiğinde daha yüksek merteye pertürbasyon problemlerinden elde edilir. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılması ile ilgilenildiği için yalnızca birinci merteye düzgün geçerli çözüm inşaa edilecektir. Bunun için de  $A_1$ 'in belirlenmesi yeterlidir.  $l \neq 1$  için  $\det \mathbf{W}_l \neq 0$  kabul edildiği için ve  $\mathbf{b}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0}$  olduğundan (3.187) denklem sisteminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad \mathbf{U}_2^{(l)} \equiv \mathbf{0}. \quad (3.197)$$

Yukarıda türetilen birinci ve ikinci merteye çözümler kullanılarak  $A_1$  fonksiyonunun  $\xi$  ve  $\tau$  yavaş değişkenlere bağıllığı, üçüncü merteye pertürbasyon probleminde belirlenecektir. Birinci ve ikinci merteye çözümler, üçüncü merteye probleme ait (3.148) denklemlerinde kullanılırsa, bu denklemler aşağıdaki formda yazılır:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_3^{(1)}) &= (\mathcal{D}_1 e^{ikpy} + \mathcal{D}_2 y e^{ikpy} + \mathcal{D}_3 e^{-ikpy} + \mathcal{D}_4 y e^{-ikpy} + \mathcal{D}_5 e^{3ikpy} \\ &\quad + \mathcal{D}_6 e^{-3ikpy}) e^{i\theta} + (e^{3i\theta}, \text{li terimler}) + k.e. , \end{aligned} \quad (3.198)$$

$$\mathcal{L}(u_3^{(2)}) = (\mathcal{D}_7 e^{kvy} + \mathcal{D}_8 y e^{kvy} + \mathcal{D}_9 e^{3kvy}) e^{i\theta} + (e^{3i\theta}, \text{li terimler}) + k.e. \quad (3.199)$$

Burada

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= 2iR_1\mathcal{M}_2^{(1)} + 2\Lambda_1\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{M}_1^{(1)} + R_1\mathcal{N}^{(1)} + 2iR_1c_1^2k\frac{\partial A_1}{\partial\xi} - \mathcal{P}_1 + 2i\zeta_1^{(1)}A_1, \\
\mathcal{D}_2 &= (-2iR_1/pkc_1^2)\left(-\omega + \frac{kc_1^2}{V_g}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{M}_1^{(1)} + 2c_1^2\frac{k}{p}\frac{\partial k}{\partial\xi}A_1R_1, \\
\mathcal{D}_3 &= 2iR_2\mathcal{M}_2^{(1)} + 2\Lambda_2\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{M}_1^{(1)} + R_2\mathcal{N}^{(1)} + 2iR_2c_1^2k\frac{\partial A_1}{\partial\xi} - \mathcal{P}_2 + 2i\zeta_2^{(1)}A_1, \\
\mathcal{D}_4 &= (2iR_2/pkc_1^2)\left(-\omega + \frac{kc_1^2}{V_g}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{M}_1^{(1)} - 2c_1^2\frac{k}{p}\frac{\partial k}{\partial\xi}A_1R_2, \\
\mathcal{D}_5 &= \mathcal{Q}_1, \\
\mathcal{D}_6 &= \mathcal{Q}_2, \\
\mathcal{D}_7 &= 2iR_3\mathcal{M}_2^{(2)} + 2\Lambda_3\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{M}_1^{(2)} + R_3\mathcal{N}^{(2)} + 2iR_3c_2^2k\frac{\partial A_1}{\partial\xi} + 2i\zeta_3^{(2)}A_1, \\
\mathcal{D}_8 &= (2R_3/vkc_2^2)\left(-\omega + \frac{kc_2^2}{V_g}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{M}_1^{(2)} + 2ic_2^2\frac{k}{v}\frac{\partial k}{\partial\xi}A_1R_3, \\
\mathcal{D}_9 &= n_2k^4(-3 + 2v^2 + 9v^4)|R_3|^2R_3|A_1|^2A_1, \tag{3.200}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\beta^{(\alpha)} &= \left(-\omega + \frac{kc_\alpha^2}{V_g}\right)\frac{\partial A_\beta}{\partial\tau}, \\
\mathcal{N}^{(\alpha)} &= \left(\frac{c_\alpha^2}{V_g^2} - 1\right)\frac{\partial^2 A_1}{\partial\tau^2}, \\
\Lambda_\alpha &= \left(\frac{1}{V_g}\frac{\partial R_\alpha}{\partial k} + \frac{\partial R_\alpha}{\partial\omega}\right), \\
\mathcal{P}_1 &= n_1k^4(|R_1|^2R_1(9 + 2p^2 + 9p^4))|A_1|^2A_1, \\
\mathcal{P}_2 &= n_1k^4(|R_2|^2R_2(9 + 2p^2 + 9p^4))|A_1|^2A_1, \\
\zeta_\beta^{(\alpha)} &= kc_\alpha^2\frac{\partial R_\beta}{\partial\xi} + \frac{R_\beta}{2}c_\alpha^2\frac{\partial k}{\partial\xi}, \\
\mathcal{Q}_1 &= n_1k^4|A_1|^2A_1R_1^3(-3 - 2p^2 + 9p^4), \\
\mathcal{Q}_2 &= n_1k^4|A_1|^2A_1R_2^3(-3 - 2p^2 + 9p^4) \tag{3.201}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır.  $|\phi|$ , bir  $\phi$  büyüklüğünün modülünü göstermektedir. Katsayılar yazılırken  $R_1^* = R_2$  özelliği kullanılmıştır.

Üçüncü mertbe problemin çözümleri, ikinci mertbe problemdeki gibi

$$u_3^{(r)} = \bar{u}_3^{(r)} + \hat{u}_3^{(r)}, \quad r = 1, 2, \tag{3.202}$$

şeklinde iki parçaya ayrılır; öyle ki  $\bar{u}_3^{(r)}$   $r = 1, 2$  sırasıyla (3.198)-(3.199) denklemlerinin özel çözümleri,  $\hat{u}_3^{(r)}$ 'ler ise

$$\mathcal{L}(\hat{u}_3^{(r)}) = 0, \quad r = 1, 2, \tag{3.203}$$



homojen denklemlerinin çözümleri olmak üzere, bu çözümler (3.202) kullanılarak türetilen aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlar:

$$y = h + f_1(\xi) \quad \text{serbest yüzeyinde} \quad \frac{\partial \hat{u}_3^{(1)}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_3^{(1)}}{\partial y} + k \frac{df_1}{d\xi} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta}, \quad (3.204)$$

$$y = f_2(\xi) \quad \text{arayüzeyinde} \quad \hat{u}_3^{(1)} - \hat{u}_3^{(2)} = -(\bar{u}_3^{(1)} - \bar{u}_3^{(2)}) \quad \text{ve} \quad (3.205)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_3^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \hat{u}_3^{(2)}}{\partial y} &= -\left( \frac{\partial \bar{u}_3^{(1)}}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{u}_3^{(2)}}{\partial y} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial \xi} k \left( \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} - \gamma \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \theta} \right) \\ &+ \gamma \beta_2 \mathcal{K}_0(u_1^{(2)}) \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} - \beta_1 \mathcal{K}_0(u_1^{(1)}) \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.206)$$

$$y \rightarrow -\infty \quad \text{için} \quad \hat{u}_3^{(2)} + \bar{u}_3^{(2)} \rightarrow 0.$$

$\bar{u}_3^{(r)}$ ,  $r = 1, 2$  özel çözümleri aşağıdaki gibi lineer bağımsız fonksiyonların toplamı şeklinde yazılır:

$$\bar{u}_3^{(r)} = f_r^{(1)}(\xi, \tau) e^{i\theta} + f_r^{(3)}(\xi, \tau) e^{3i\theta} + k.e., \quad r = 1, 2. \quad (3.207)$$

Burada  $f_r^{(1)}$ ,  $r = 1, 2$ , dalgaların self modülasyonu ile ilgili fonksiyonlar,  $f_r^{(3)}$ 'ler,  $r = 1, 2$ , üçüncü harmonik rezonansının etkilerini temsil eden fonksiyonlardır. Bu çalışmada sadece self modülasyonla ilgilenildiği için  $f_r^{(3)}$ ,  $r = 1, 2$ , fonksiyonlarının açık formlarına ihtiyaç yoktur. Belirsiz katsayılar yöntemiyle  $f_r^{(1)}$ ,  $r = 1, 2$ , fonksiyonları aşağıdaki gibi lineer bağımsız fonksiyonların toplamı olarak ifade edilir:

$$f_1^{(1)} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 y) y e^{ikpy} + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4 y) y e^{-ikpy} + \varepsilon_5 e^{3ikpy} + \varepsilon_6 e^{-3ikpy} + k.e., \quad (3.208)$$

$$f_2^{(1)} = (\varepsilon_7 + \varepsilon_8 y) y e^{kvy} + \varepsilon_9 e^{3kvy} + k.e. \quad (3.209)$$

Bu ifadeler (3.198)-(3.199) denklemlerinde yerine konulursa  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$  katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\varepsilon_1 = i\mathcal{D}_1/(2kpc_1^2) - \mathcal{D}_2/(4k^2p^2c_1^2), \quad (3.210)$$

$$\varepsilon_2 = i\mathcal{D}_2/(4kpc_1^2), \quad (3.211)$$

$$\varepsilon_3 = -i\mathcal{D}_3/(2kpc_1^2) - \mathcal{D}_4/(4k^2p^2c_1^2), \quad (3.212)$$

$$\varepsilon_4 = -i\mathcal{D}_4/(4kpc_1^2), \quad (3.213)$$

$$\varepsilon_5 = \mathcal{D}_5/(8k^2p^2c_1^2), \quad (3.214)$$

$$\varepsilon_6 = \mathcal{D}_6/(8k^2 p^2 c_1^2), \quad (3.215)$$

$$\varepsilon_7 = -\mathcal{D}_7/(2kvc_2^2) + \mathcal{D}_8/(4k^2 v^2 c_2^2), \quad (3.216)$$

$$\varepsilon_8 = -\mathcal{D}_8/(4kvc_2^2), \quad (3.217)$$

$$\varepsilon_9 = -\mathcal{D}_9/(8k^2 v^2 c_2^2). \quad (3.218)$$

$\hat{u}_3^{(r)}$ ,  $r = 1, 2$ , homojen çözümler, bir önceki pertürbasyon problemindeki gibi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\hat{u}_3^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ A_3^{(l)}(\xi, \tau) e^{ilkpy} + B_3^{(l)}(\xi, \tau) e^{-ilkpy} \right\} e^{il\theta} + k.e., \quad (3.219)$$

$$\hat{u}_3^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} C_3^{(l)}(\xi, \tau) e^{lkvy} e^{il\theta} + k.e.. \quad (3.220)$$

Burada  $A_3^{(l)}$ ,  $B_3^{(l)}$  ve  $C_3^{(l)}$  üçüncü merteye yavaş değişen dalga genliği fonksiyonlarıdır ve bunlar  $u_3^{(r)}$ ,  $u_1^{(r)}$ ,  $r = 1, 2$ , çözümleri (3.204)-(3.206) sınır koşullarında kullanılarak bulunabilir. Daha önceki merteye problemlerinde olduğu gibi

$$\mathbf{U}_3^{(l)} = (A_3^{(l)}, B_3^{(l)}, C_3^{(l)})^T \quad (3.221)$$

tanımı yapılırsa, bu vektörler için, üçüncü merteye problemin sınır koşulları kullanılarak aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_3^{(l)} = \mathbf{b}_3^{(l)}. \quad (3.222)$$

$\mathbf{b}_3^{(l)}$  vektörleri  $l = 1$  ve  $l = 3$  için sıfırdan farklı fakat  $l \neq 1, 3$  için özdeş olarak sıfırdır.  $l = 1$  için bu vektör

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3^{(1)} = & \left[ i \left( \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} + \frac{1}{V_g} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \tau} + i \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial A_1}{\partial \xi} \right. \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} + \frac{2}{V_g} \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k \partial \omega} + \frac{1}{V_g^2} \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \right) \frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} \Big] \mathbf{R} \\ & + \left( \frac{1}{V_g} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} + \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \right) \left( \frac{1}{V_g} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) \frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + \mathbf{F} |A_1|^2 A_1 + i \mathbf{G} A_1 \end{aligned} \quad (3.223)$$

olarak ifade edilir.  $\mathbf{G}$  vektörü lineer malzeme parametrelerine, dalga sayısına ve sınırlardaki düzensizlikleri temsil eden  $f_1$  ve  $f_2$  fonksiyonlarına bağlıyken,  $\mathbf{F}$  vektörü bunlara ek olarak lineer olmayan malzeme parametrelerine de bağlıdır.  $\mathbf{F}$  ve  $\mathbf{G}$

vektörlerinin bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$F_1 = -\frac{1}{8}e^{3f_2kv} (f_1 + h)k^4 (9 + 2p^2 + 9p^4) \beta_1 \sec[(f_1 - f_2 + h)kp]^3,$$

$$\begin{aligned} F_2 = & \frac{1}{32pv}e^{3f_2kv}k^3\{4p(9 + 2v^2 - 3v^4)\beta_2\gamma \\ & -4f_2kp(9 + 2p^2 + 9p^4)v\beta_1 \sec[(f_1 - f_2 + h)kp]^2 \\ & -4(-9 + 2p^2 + 3p^4)v\beta_1 \tan[(f_1 - f_2 + h)kp] \\ & + (27 + 2p^2 - 33p^4)v\beta_1 \sec[(f_1 - f_2 + h)kp]^2 \tan[(f_1 - f_2 + h)kp]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3 = & -\frac{e^{3f_2kv}k^2 \sec[(f_1 - f_2 + h)kp]^3}{32p^2v^2}\{3p^2\beta_2(-3 + 2v^2 + 9v^4)\cos[(f_1 - f_2 + h)kp] \\ & + (-3v^2\beta_1 + p^2(-3\beta_2 + 9v^4\beta_2 + v^2(-2\beta_1 + 9p^2\beta_1 + 2\beta_2)))\cos[3(f_1 - f_2 + h)kp] \\ & -4f_2kpv^2\beta_1(9 + 2p^2 + 9p^4)\sin[(f_1 - f_2 + h)kp]\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 = & \frac{e^{f_2kv}(f_1 + h)\sec[(f_1 - f_2 + h)kp]}{2p^2v}\{2k^2p^2v(p\tan[(f_1 - f_2 + h)kp](f'_1 - f'_2) + vf'_2) \\ & + (v + p(2f_2kp + v(p - 2(f_1 - f_2 + h)k\tan[(f_1 - f_2 + h)kp])))k'\}, \quad (3.224) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 = & \frac{1}{2kp^3v^3}e^{f_2kv}\{2k^2p^2v^3(-f_2kp^2\tan[(f_1 - f_2 + h)kp]f'_2 - v\tan[(f_1 - f_2 + h)kp]f'_2) \\ & + 2k^2p^3v^3((f_2kv - \gamma)f'_2 + \sec[(f_1 - f_2 + h)kp]^2(-f'_1 + f'_2)) \\ & + k'(2(f_1 - f_2 + h)kpv^3\sec[(f_1 - f_2 + h)kp]^2 \\ & + v^2\tan[(f_1 - f_2 + h)kp](-v + p^2(-v + f_2k(-2 + f_2kv))) \\ & + p(f_2kv^3 + p^2(\gamma + v(-f_2^2k^2v(-2 + \gamma) - v\gamma - f_2k(v^2(-1 + \gamma) + \gamma))))\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_3 = & -\frac{e^{f_2kv}f_2}{2kp^3v^3}\{2k^2p^3v^3f'_2 + k'p(-f_2kv^3 + p^2(-1 + f_2kv + v^2)) \\ & + 2kpv^3\sec[(f_1 - f_2 + h)kp]^2(kp^2(f'_1 - f'_2) - (f_1 - f_2 + h)k') \\ & + v^2\tan[(f_1 - f_2 + h)kp](2k^2p^2v^2f'_2 + k'(v + p^2(2f_2k + v)))\}. \quad (3.225) \end{aligned}$$

Burada,  $f'_1$ ,  $f'_2$  ve  $k'$ ,  $\xi$ 'ye göre türevleri göstermektedir.  $k'$ , (3.165) denklemi ile bulunur.  $\mathbf{b}_3^{(3)}$  vektörünün açık formu, daha sonraki hesaplarda kullanılmayacağı için verilmeyecektir.  $l = 3$  için  $\det \mathbf{W}_3 \neq 0$  olduğundan, (3.222) denklem sisteminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{U}_3^{(3)} = \mathbf{W}_3^{-1}\mathbf{b}_3^{(3)}. \quad (3.226)$$

$l \neq 1$  ve  $l \neq 3$  için  $\det \mathbf{W}_l \neq 0$  ve  $\mathbf{b}_3^{(l)} \equiv \mathbf{0}$  olduğundan, (3.222)'nin çözümleri

$$\mathbf{U}_3^{(l)} = \mathbf{0}, \quad l \neq 1, 3 \quad (3.227)$$

olarak elde edilir. Birinci merteye düzgün geçerli çözümü elde etmek için ihtiyaç olmadığından,  $\mathbf{U}_3^{(1)}$  ve  $\mathbf{U}_3^{(3)}$  çözümlerinin açık yapıları hesaplanmayacaktır.  $\det \mathbf{W}_1 = 0$  ve  $\mathbf{b}_3^{(1)} \neq \mathbf{0}$  olduğundan  $l = 1$  için (3.222) denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için aşağıdaki uygunluk koşulu sağlanmalıdır:

$$\mathbf{L}\mathbf{b}_3^{(1)} = 0. \quad (3.228)$$

Şimdi aşağıdaki boyutsuz değişkenleri tanımlayalım:

$$A = A_1/h, \quad \tilde{\xi} = \xi/h, \quad \tilde{\tau} = \tau\omega, \quad (3.229)$$

Grup hızının (3.194) tanımı kullanılarak, (3.228) uygunluk koşulu ile aşağıdaki değişken katsayılı genelleştirilmiş Schrödinger (GNLS) denklemi elde edilir:

$$i \frac{\partial A}{\partial \tilde{\xi}} + \Gamma \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{\tau}^2} + \Delta |A|^2 A = i \Lambda A. \quad (3.230)$$

Bu denklemde  $\tilde{\xi}$  ve  $\tilde{\tau}$  üzerindeki tildalar ihmal edilmiştir.  $\xi$ 'nin fonksiyonları olan  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ve  $\Lambda$  katsayıları boyutsuz olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\Gamma(\xi) = \omega^2 h \frac{1}{2V_g^3} \frac{dV_g}{dk} = \omega^2 h \frac{1}{2V_g^3} \frac{d^2 \omega}{dk^2}, \quad (3.231)$$

$$\Delta(\xi) = h^3 \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} / \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \mathbf{R} \right), \quad (3.232)$$

$$\Lambda(\xi) = -h \mathbf{L} \cdot \mathbf{G} / \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \mathbf{R} \right). \quad (3.233)$$

$\Gamma$  ve  $\Lambda$  katsayıları lineer malzeme parametrelerine, yavaş değişen  $f_1(\xi)$  ve  $f_2(\xi)$  fonksiyonlarına bağlıyken,  $\Delta$  bunlara ek olarak lineer olmayan malzeme özelliklerine de bağlıdır.

$f_1 = f_2 = 0$  seçildiğinde  $\Lambda = 0$  bulunur ve  $\Gamma$ ,  $\Delta$  katsayıları, [7]'de türetilen düzgün kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzayda lineer olmayan Love dalgalarını karakterize eden sabit katsayılı NLS denkleminin ilgili katsayılarına sembolik olarak indirgenir.

$A(\tau, 0) = A_0(\tau)$  formunda verilen bir başlangıç koşulu ile (3.230) GNLS denkleminde  $A$  için bir çözüm elde edildikten sonra  $u_1^{(1)}$  ve  $u_1^{(2)}$  birinci merteye çözümlerinin inşası tamamlanmış olur.

### 3.4 GNLS Denkleminin Çözümleri

#### 3.4.1 Analitik çözümler

Bu kısımda, (3.230) GNLS denkleminin soliton-benzeri analitik çözümleri aşağıdaki şekilde önerilen bir ansatz yardımı ile araştırılacaktır:

$$A(\xi, \tau) = B(\xi, \tau)e^{ig(\xi)}. \quad (3.234)$$

GNLS denklemindeki  $\xi$ 'ye bağlı değişken katsayılardan dolayı,  $B$  ve  $g$ ,  $\xi$ 'nin fonksiyonu olarak seçilmiştir. Sıfırdan farklı bright soliton-benzeri çözümleri inşa etmek için  $B(\xi, \tau)$  aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$B(\xi, \tau) = B_1(\xi)sech(\tau). \quad (3.235)$$

(3.234) ile tanımlanan ansatz (3.235) ile birlikte GNLS denkleminde kullanılıp, lineer bağımsız terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\Delta B_1^2 - 2\Gamma = 0, \quad (3.236)$$

$$g' - \Gamma = 0, \quad (3.237)$$

$$B_1' - B_1\Lambda = 0. \quad (3.238)$$

Yukarıdaki ilk iki denklemin çözümünden,

$$B_1(\xi) = \sqrt{\frac{2\Gamma}{\Delta}}, \quad g(\xi) = \int^\xi \Gamma(x')dx' \quad (3.239)$$

elde edilir. Üçüncü denklemden, katsayılar arasındaki aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\Lambda = \frac{\Delta\Gamma_\xi - \Gamma\Delta_\xi}{2\Gamma\Delta} \quad (3.240)$$

(3.240) eşitliği, değişken katsayılı GNLS denklemini için integrallenebilirlik koşuludur ve ilk defa V. Serkin ve A. Hasegawa tarafından türetilmiştir, [59]. Böylece önerilen bir ansatz yardımıyla GNLS denkleminin (3.240) integrallenebilirlik koşulu altında bright soliton-benzeri çözümleri aşağıdaki formda elde edilir:

$$A(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{2\Gamma}{\Delta}}sech(\tau)e^{i\int^\xi \Gamma(x')dx'}. \quad (3.241)$$

Bu çözüm, R. Hao ve diğ. tarafından Darboux transformu kullanılarak elde edilen çözümle örtüşmektedir, [60]. Dikkat edilirse (3.241) çözümü  $\Gamma\Delta > 0$  için geçerlidir.

$\Gamma\Delta < 0$  durumunda, GNLS denkleminin dark soliton-benzeri çözümlerini elde etmek için (3.234) ile verilen ansatz aşağıdaki  $B$  fonksiyonu ile tanımlanır:

$$B(\xi, \tau) = B_1(\xi) \tanh(\tau). \quad (3.242)$$

(3.242), (3.234) ile birlikte GNLS denkleminde yerine koyulup, lineer bağımsız terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\Delta B_1^2 + 2\Gamma = 0, \quad (3.243)$$

$$g' + 2\Gamma = 0, \quad (3.244)$$

$$B_1' - B_1\Lambda = 0. \quad (3.245)$$

Yukarıdaki ilk iki denklemin çözümünden,

$$B_1(\xi) = \sqrt{\frac{-2\Gamma}{\Delta}}, \quad g(\xi) = \int^{\xi} -2\Gamma(x') dx' \quad (3.246)$$

elde edilir. Üçüncü denklem ise (3.240) integrallenebilirlik şartını verir. Böylece  $\Gamma\Delta < 0$  için aşağıdaki dark soliton-benzeri çözüm formu elde edilir:

$$A(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{-2\Gamma}{\Delta}} \tanh(\tau) e^{-2i \int^{\xi} \Gamma(x') dx'}. \quad (3.247)$$

Bu çözüm GNLS denklemini için  $\Gamma\Delta < 0$  durumunda, Serkin ve Belyaeva tarafından elde edilen çözüm ile örtüşmektedir, [61].

Dikkat edilmelidir ki (3.241) ve (3.247) ile verilen çözümler, ancak denklemin katsayıları arasındaki (3.240) koşulu sağlandığı zaman geçerlidir. Fakat sınır yüzeylerindeki düzensizliklerin fonksiyonu olan bu katsayılar her zaman integrallenebilirlik koşulunu sağlamayabilir. Bu durumda denklemin çözümleri nümerik olarak araştırılacaktır.

### 3.4.2 Nümerik çözümler

İntegrallenebilir olmayan GNLS denkleminin nümerik çözümleri, uygulamadaki kolaylığı ve sonlu fark yöntemlerine kıyasla oldukça hızlı yakınsaması sebebiyle pseudospectral yöntem kullanılarak araştırılacaktır. Bu amaçla önce Fourier dönüşümü tanımlanıp, kullanılacak bazı özelliklerinden bahsedilecektir.

Eğer  $A(\xi, \tau)$ , sürekli, düzgün ve mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise  $A(\xi, \tau)$ 'nın  $\tau$ 'ya göre Fourier dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$F\{A(\xi, \tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik\tau) A(\xi, \tau) d\tau. \quad (3.248)$$

Burada  $k$ , Fourier dönüşümünün değişkeni ve  $\exp(-ik\tau)$  çekirdeğidir.  $F\{A(\xi, \tau)\}$  'in ters Fourier dönüşümü ise aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F^{-1}\{F\{A(\xi, \tau)\}\} = A(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik\tau) F\{A(\xi, \tau)\} dk. \quad (3.249)$$

Türevin Fourier dönüşümü ise aşağıdaki gibidir:

$$F\left\{\frac{\partial A}{\partial \tau}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik\tau) \frac{\partial A}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.250)$$

$|\tau| \rightarrow \infty$  iken  $A(\xi, \tau) \rightarrow 0$  olsun. Eğer  $A(\xi, \tau)$  ve  $\frac{\partial A}{\partial \tau}$  mutlak integrallenebilirse, yukarıdaki integrale kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned} F\left\{\frac{\partial A}{\partial \tau}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( [\exp(-ik\tau)A(\xi, \tau)]_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik\tau) A(\xi, \tau) d\tau \right) \\ &= ikF\{A(\xi, \tau)\} \end{aligned} \quad (3.251)$$

elde edilir. Benzer şekilde,  $A(\xi, \tau)$  sürekli,  $n$  kez diferansiyellenebilir ve  $|\tau| \rightarrow \infty$  iken  $m = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$  için  $\frac{\partial^m A}{\partial \tau^m} \rightarrow 0$  ise, bu fonksiyonun  $n$ 'inci mertebeden türevinin Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi bulunur, [62]:

$$F\left\{\frac{\partial^n A}{\partial \tau^n}\right\} = (ik)^n F\{A(\xi, \tau)\}. \quad (3.252)$$

Bu bilgiler ışığında pseudospectral metodu tarif etmek için

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} + \Gamma\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \Delta|A|^2 A = i\Lambda A \quad (3.253)$$

GNLS denklemini göz önüne alınacaktır. Pseudospectral metodun temel fikri  $A_{\tau\tau}$  türevini ayrık Fourier transformu ile hesaplamak ve indirgenen adi diferansiyel denklemi uygun bir sonlu fark metodu ile çözmektir, [63].  $A_n, \tau_n$  ızgara noktasındaki çözüm olmak üzere, öncelikle denklem  $\tau$  uzayında ayrıklaştırılır:

$$A_{n,\xi} = i(\Gamma A_{n,\tau\tau} + \Delta|A_n|^2 A_n) + \Lambda A_n \quad (3.254)$$

Fourier transformu ile, her bir  $\tau_n$  için  $A_{n,\tau\tau}$  hesabı aşağıdaki gibi yapılır

$$A_{n,\tau\tau} = F^{-1} [(ik)^2 F\{A_n\}]. \quad (3.255)$$

Artık (3.254) denklemini  $A(0, \tau)$  başlangıç koşulu ile uygun bir sonlu fark metodu kullanılarak çözülebilir. Bu çalışmada dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu kullanılmıştır.

Herhangi bir düzgün  $A$  fonksiyonu için pseudospectral metodun doğruluğu spektraldir, yani hata uzaysal adım aralığı  $\Delta x$ 'in herhangi bir kuvvetinden daha küçüktür. Pseudospectral metodun uzaysal tamlığı spectral olmasına rağmen, zamanda ilerlerken  $\Delta t$  adım aralığının, metodun kararlılık bölgesinde kalacak şekilde seçilmesine dikkat edilmelidir. Kararlılık bölgesi ile ilgili detaylı bilgi için Bknz. [63], sf. 331. Yöntemdeki kararlılık kısıtlamasından dolayı, beşinci mertebe KdV denklemi gibi daha yüksek mertebe uzaysal türeve sahip evrim denklemleri için yöntem kullanışsız hale gelebilir, bu durumda zaman adım aralığında daha az kısıtlayıcı kararlılık koşuluna sahip olan split step ya da integrating factor yöntemleri kullanılabilir, [63,64]. Ancak ikinci mertebe uzaysal türeve sahip NLS denklemleri için pseudospectral yöntem kolay uygulanabilmesi ve hızlı yakınsaması bakımından elverişli olduğu için bu çalışmada tercih edilmiştir.

### 3.4.3 Enerji analizi

Bu kısımda, tabakanın sınır yüzeylerindeki düzensizliklerin, dalga evrimi boyunca soliton enerjisi üzerindeki etkisi incelenecektir. Soliton enerjisi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır, [58]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\xi, \tau)|^2 d\tau. \quad (3.256)$$

(3.241) bright soliton benzeri çözüm için enerji fonksiyonu aşağıdaki gibi açıkça elde edilebilir:

$$E(\xi) = \frac{2\Gamma}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sech}(\tau)|^2 d\tau = 4\frac{\Gamma}{\Delta}. \quad (3.257)$$

Buradan,  $\Gamma$  ve  $\Delta$  katsayılarının  $\xi$  ile yavaş değişimine bağlı olarak, enerjide de dalga evrimi boyunca küçük değişimler olacağı sonucuna varılmaktadır.

GNLS denklemi, ilave terimi  $\Lambda$ 'dan dolayı korunumlu değildir, [65]. Bu sebeple (3.256), denklemin korunum yasasıyla karıştırılmamalıdır; solitonun altında kalan alanı temsil etmektedir.

### 3.5 Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar

Sabit katsayılı NLS denklemi her zaman integrallenebilirken, değişken sınır yüzeylere sahip tabakalı yarım uzayda SH dalgalarının lineer olmayan self modülasyonunu asimptotik olarak karakterize eden, sınırlardaki düzensizliklerin katsayı fonksiyon-

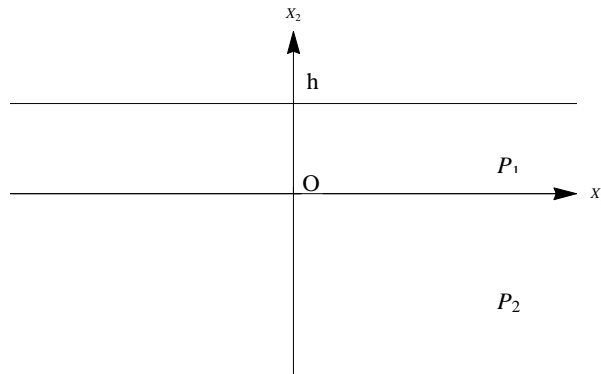


larında görüldüğü değişken katsayılı GNLS denklemleri her zaman integrallenebilir değildir. Bu kısımda öncelikle sınırlardaki düzensizliklerin GNLS denkleminin integrallenebilirliğine izin verdiği durumlar araştırılmıştır. Bu durumlar için, özel olarak periyodik ya da düzlemsel olarak seçilen sınırlardaki düzensizliklerin ve tabakalı yarım uzayı oluşturan malzemelerin lineer olmayan özelliklerinin bir önceki kısımda analitik olarak elde edilen soliton benzeri dalgaların yayılma karakteristikleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. GNLS denkleminin integrallenebilirlik şartının sağlanmadığı sınır yüzeylerin diğer özel durumları için çözümler, pseudospectral yöntem kullanılarak nümerik olarak elde edilmiştir. Salınlı veya düzlemsel olarak seçilen tabakanın sınır yüzeylerinin beş farklı durumu için hesaplamalar yapılarak, salınlı tabakanın ve ortamın lineer olmayan malzeme parametrelerinin GNLS denklemleri ile karakterize edilen SH dalga yayılımı üzerindeki etkileri grafiklerle gözlemlenmiştir. Çözümlerin sayısal hesaplamalarında, tabakalı ortamın lineer olmayan malzeme özelliklerinin çözümlerin davranışı üzerindeki etkisini gözlemleyebilmek için, lineer olmayan malzeme parametreleri  $\beta_1 = n_1/c_1^2$  ve  $\beta_2 = n_2/c_2^2$  değiştirilirken lineer malzeme parametreleri ve boyutsuz faz hızı  $C = c/c_1$  aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$c_2/c_1 = 1.297, \quad \gamma = 2.159, \quad C = 1.19. \quad (3.258)$$

Daha önce bahsedildiği gibi  $\beta_r > 0$  ise ilgili malzeme kaymada sertleşen,  $\beta_r < 0$  ise kaymada yumuşayan özellik göstermektedir.

### 3.5.1 Düzlem sınır yüzeylere sahip sabit kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzay

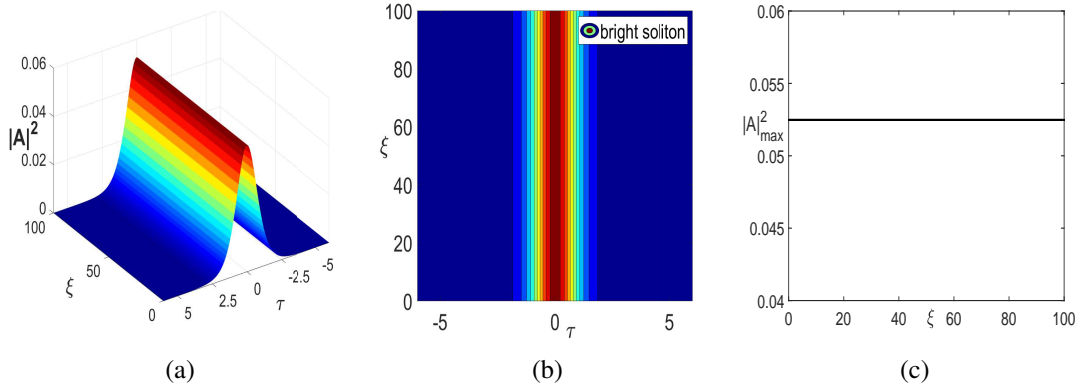


Şekil 3.2 :  $f_1 = f_2 = 0$  için problemin geometrisi.

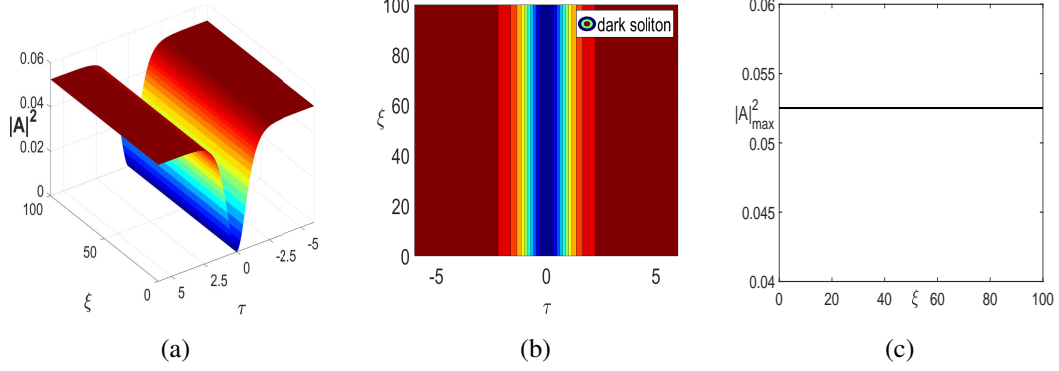
Tabaka  $y = h$  düzlem serbest yüzeyi ve  $y = 0$  düzlem arayüzeyi ile sınırlı olduğunda, yani  $f_1 = f_2 = 0$  iken problemin geometrisi Şekil 3.2'deki gibidir ve (3.253) GNLS denklemi aşağıdaki sabit katsayılı NLS denklemine indirgenir:

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} + \Gamma \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \Delta |A|^2 A = 0. \quad (3.259)$$

(3.259) denklemi, düzgün kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzayda yayılan lineer olmayan Love dalga yayılımını karakterize etmektedir, [7]. Dikkat edilirse bu durumda  $\Lambda = 0$ 'dır. Dispersiyonun ve lineer olmayan malzeme parametrelerinin etkilerini içeren tüm sabit  $\Gamma$  ve  $\Delta$  katsayıları için (3.240) integrellenebilirlik koşulu sağlanmaktadır. Bu durumda (3.241) ve (3.247) çözümleri sırasıyla bright ve dark soliton tipi dalgaları temsil etmektedir. Tabakalı ortamın lineer olmayan özelliklerinin dalga yayılımı üzerindeki etkilerini gözlemlemek amacı ile, farklı lineer olmayan malzeme parametreleri için bu dalgalar Şekil 3.3-3.4 ile verilmiştir. Bu şekillerden görülmektedir ki  $\beta_1 = 1.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$  için tabakalı yarım uzay tamamen sertleşen malzemelerden meydana geldiğinde  $\Gamma\Delta > 0$ 'dır ve bu durumda bright soliton dalgaları yayılırken,  $\beta_1 = -1.5$ ,  $\beta_2 = -1.5$  için tabakalı yarım uzay tamamen yumuşayan malzemelerden oluştuğunda  $\Gamma\Delta < 0$ 'dır ve bu durumda dark soliton dalga yayılımı mevcuttur. İki durumda da dalga evrimi boyunca solitonlar şeklini ve maksimum genliğini korur.

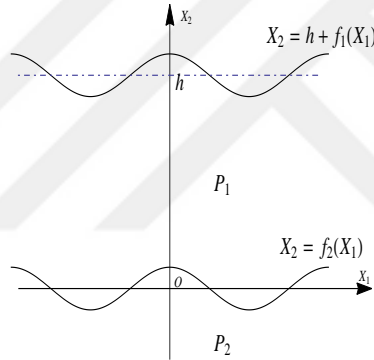


**Şekil 3.3 :**  $\beta_1 = 1.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$  için sertleşen malzemelerden oluşan tabakalı yarım uzayda (a) Bright soliton dalga evrimi (b) Üstten görünüş (c) Maksimum genlik.



**Şekil 3.4 :**  $\beta_1 = -1.5, \beta_2 = -1.5$  için yumuşayan malzemelerden oluşan tabakalı yarım uzayda (a) Dark soliton dalga evrimi (b) Üstten görünüş (c) Maksimum genlik.

### 3.5.2 Periyodik sınır yüzeylere sahip sabit kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzay

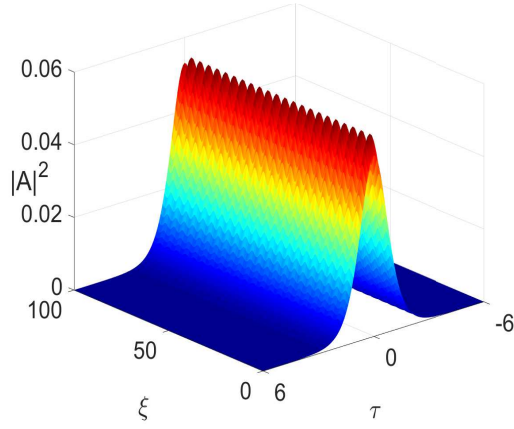


**Şekil 3.5 :**  $f_1 = f_2$  ve periyodik iken problemin geometrisi.

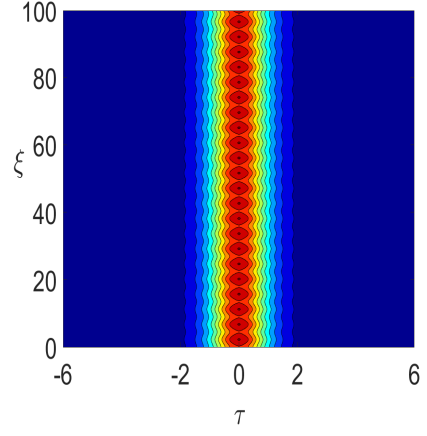
(3.240) denklemi  $f_1$  ve  $f_2$  fonksiyonları için çözüldüğünde, GNLS denkleminin (3.240) integrellenebilirlik şartını, ancak sınır yüzeylerindeki düzensizlikleri temsil eden fonksiyonlar eşit olduğunda yani  $f_1 = f_2$  iken sağladığı görülür.  $f_1 = f_2$  durumunda, sınır yüzeylerin kosinüs fonksiyonu şeklinde değiştiği kabul edilerek, dalga yayılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Problemin geometrisi Şekil 3.5'teki gibidir.  $f_1(\xi) = f_2(\xi) = u \cos(k_1 \xi)$  olmak üzere,  $u$  periyodik sınır yüzeylerin genliği,  $k_1$  dalga sayısı ve  $\xi$  konum parametresidir. Dikkat edilirse, sınır yüzeyleri kosinüsün fonksiyonu şeklinde değişse de tabaka kalınlığı  $f_1 = f_2$  olduğu için sabit kalır. Ortamı oluşturan malzemelerin lineer olmayan özelliklerinin yanı sıra  $y = h + u \cos(k_1 \xi)$  periyodik serbest yüzeyi ve  $y = u \cos(k_1 \xi)$  arayüzeyi ile sınırlı, salınımlı ama sabit kalınlıklı bir tabakanın GNLS denklemi ile karakterize edilen dalga yayılımı üzerine etkisi, analitik olarak elde edilen (3.241), (3.247) çözümleri

kullanılarak incelenmiş ve grafikler Şekil 3.6-3.8 ile gösterilmiştir. Çözümlerin hesabında, sınır yüzeylerdeki osilasyona ait boyutsuz salınım parametresi  $s = k_1 h$  ve boyutsuz düzgünlük parametresi  $U = u/h$  olmak üzere  $U = 0.05$  ve  $s = 1.4$  olarak seçilmiştir.  $\beta_1 = 1.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$  için yani sertleşen bir tabakayla kaplı sertleşen yarım uzayda  $\Gamma\Delta > 0$ 'dır ve bu durumda (3.241) ile temsil edilen bright soliton-benzeri dalga yayılımı mevcutken,  $\beta_1 = -1.5$  ve  $\beta_2 = -1.5$  için tabakalı yarım uzay yumuşayan özellik gösterdiğinde  $\Gamma\Delta < 0$ 'dır ve böyle bir ortamda (3.247) ile temsil edilen dark soliton benzeri dalga yayılımı mevcuttur. Şekil 3.6 ve Şekil 3.7'den sınır yüzeylerin yavaş değişen düzensizliklerinin, soliton benzeri SH dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerine etkisi de açıkça görülmektedir. Tabaka sabit kalınlıklı olmasına rağmen, sertleşen malzemeden oluşan tabakalı yarım uzayın sınır yüzeylerindeki küçük ondülasyonlar, bright soliton benzeri dalgalar üzerine iliştirilmiş küçük salınımlara sebep olmaktadır. Ayrıca kaymada yumuşayan özellik gösteren tabakalı yarım uzayın periyodik sınır yüzeylerinin etkisiyle, (3.247) ile verilen dark soliton benzeri çözümlerin periyodik olarak modüle edilmiş bir arka planda mevcut olduğu görülmektedir. Her iki durumda da sınır yüzeylerdeki küçük genlikli ondülasyonlar, maksimum dalga genliği ve dalga enerjisinde de oldukça küçük genlikte salınımlara sebep olmaktadır. Şekillerden, dalga profillerinin soliton benzeri özelliklere sahip olduğu görülmektedir.

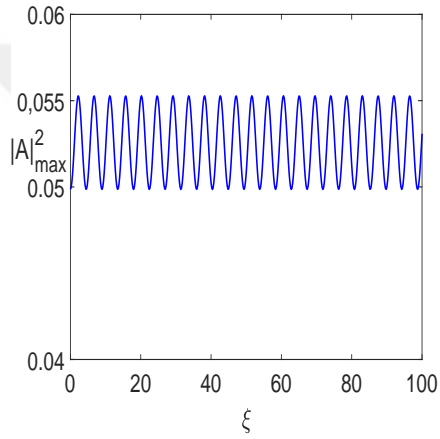
Şekil 3.8'de ise sınır yüzeylerinin düzgünlük parametresinin bright soliton ve dark soliton benzeri dalgaların genliği üzerindeki etkisi incelenmiştir. Düzgünlük parametresinin  $U = \{0, 0.01, 0.1, 0.2, 0.5\}$  değerleri için (3.241) ve (3.247) soliton benzeri çözümler hesaplanmış; düzgünlük parametresindeki artışın yani sınır yüzeylerindeki ondülasyonun genliğindeki artışın bright ve dark soliton benzeri dalgaların genliğinde de artışa sebep olduğu gözlemlenmiştir.



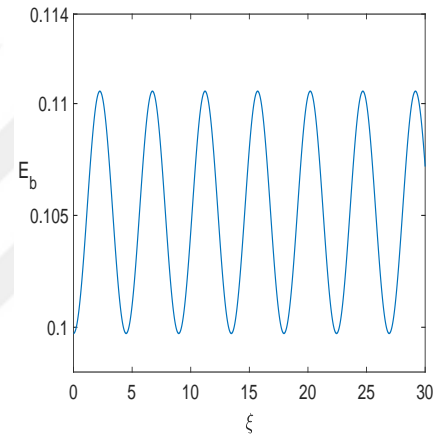
(a)



(b)

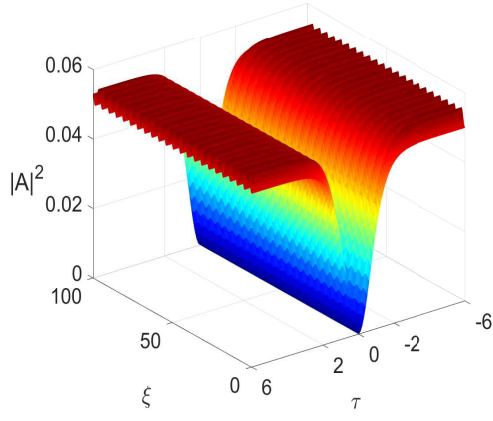


(c)

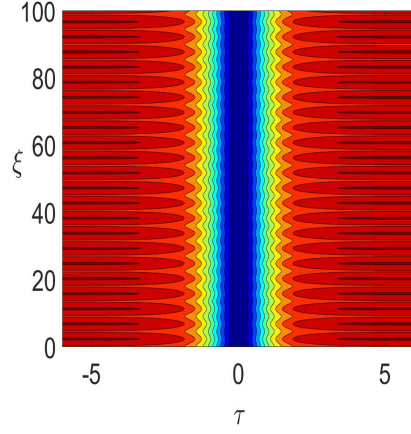


(d)

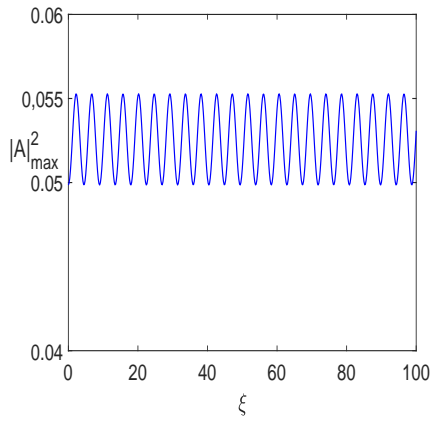
**Şekil 3.6 :**  $f_1 = f_2 = u \cos(k_1 \xi)$  için a) Bright soliton benzeri dalgaların evrimi, b) Üstten görünüşü c) Maksimum dalga genliği d) Enerji değişimi.



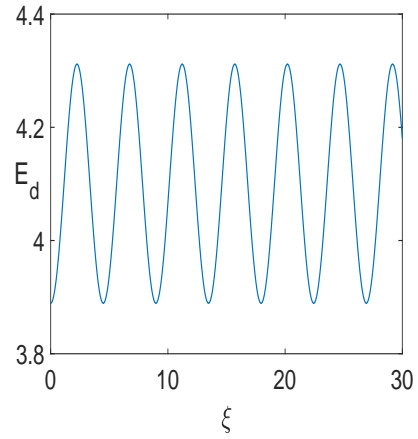
(a)



(b)

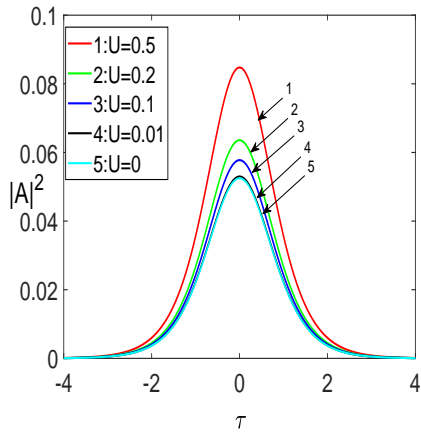


(c)

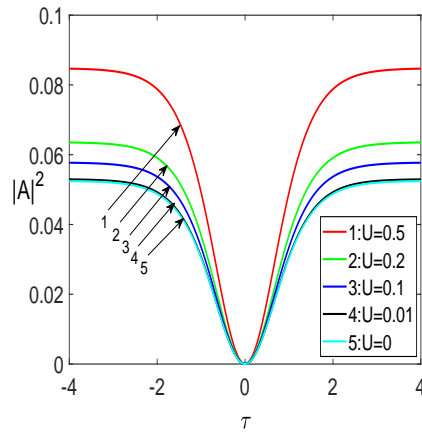


(d)

**Şekil 3.7 :**  $f_1 = f_2 = u \cos(k_1 \xi)$  için a) Dark soliton benzeri dalgaların evrimi, b) Üstten görünüşü c) Maksimum dalga genliği d) Enerji değişimi.



(a)



(b)

**Şekil 3.8 :** (a) Bright soliton benzeri dalgalar için (b) Dark soliton benzeri dalgalar için;  $\xi = 7$  seçilerek, çeşitli düzgünlük parametreleri için  $|A|^2$ 'nin  $\tau$  ile değişimi.

### 3.5.3 Periyodik sınır yüzeylere sahip değişken kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzay

Bu kısımda incelenen problemde, serbest yüzey ve arayüzeydeki düzensizlikleri temsil eden farklı genlikteki fonksiyonlar sırasıyla

$$f_1(\xi) = u \cos(k_1 \xi) \quad \text{ve} \quad f_2(\xi) = v \cos(k_1 \xi) \quad (3.260)$$

olarak seçilmiştir. Problemin geometrisi Şekil 3.9 ile gösterilmiştir.  $u$  ve  $v$  salınımların genlikleri,  $k_1$  dalga sayısı ve  $\xi$  konum parametresidir.  $f_1 \neq f_2$  olduğu için (3.253) GNLS denkleminin değişken katsayıları, (3.240) integrellenebilirlik koşulunu sağlamamaktadır. Bu durumda GNLS denkleminin çözümleri,  $u = v$  durumunda denklemin analitik çözümüyle tutarlı olması açısından  $A(0, \tau) = 0.22 \operatorname{sech}(\tau)$  başlangıç koşulu altında pseudospectral yöntem kullanılarak sayısal olarak elde edilmiştir.

Öncelikle, salınlı arayüzey ve salınlı serbest yüzeyin SH dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerine etkileri arasındaki farkı açığa çıkarabilmek için salınının sadece serbest yüzeyde ve sadece arayüzeyde olduğu iki durum ayrı ayrı incelenmiştir. Bu durumlara ait problemlerin geometrileri sırası ile Şekil 3.10(a) ve Şekil 3.10(b) ile gösterilmiştir.

İlk olarak,  $f_2 = 0$  seçildiğinde yani  $y = h + u \cos(k_1 \xi)$  periyodik serbest yüzeyi ve  $y = 0$  düzlem arayüzeyi ile sınırlı ve değişken kalınlıklı bir tabakayla kaplı yarım uzayda (Bknz. Şekil 3.10(a)) düzensiz serbest yüzeyin, bright soliton benzeri dalga yayılımı üzerindeki etkileri Şekil 3.11'de incelenmiştir. Çözümlerin hesabında, serbest yüzeydeki osilasyona ait boyutsuz salınım parametresi  $s = k_1 h$  ve boyutsuz düzensizlik parametresi  $U = u/h$  olmak üzere  $s = 1.4$ ,  $U = 0.05$  olarak seçilmiştir.  $\beta_1 = 1.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$  için yani sertleşen bir tabakayla kaplı sertleşen yarım uzayda bright soliton benzeri dalga evrimi incelenmiştir. Şekil 3.11(a) ve 3.11(b)'den tabakalı yarım uzayın serbest yüzeyindeki küçük ondülasyonların, bright soliton benzeri dalgalar üzerine iliştilmiş küçük salınımlara sebep olduğu görülmektedir. 3.11(c)-3.11(d) şekillerinden, dalga evrimi sırasında bright soliton benzeri dalganın maksimum genliğinin ve dalga enerjisinin de serbest yüzeydeki salının etkisiyle küçük ondülasyonlara sahip olduğu görülmektedir. Dikkat edilirse maksimum genliğin değişiminin genliği de oldukça küçük ve periyodikken enerjideki salının genliği sabittir. Bu da genliği artarken dalganın daraldığı, genliği azalırken dalganın genişlediği anlamına gelmektedir.

İkinci olarak,  $f_1 = 0$  seçildiğinde, yani tabaka salınımsız serbest yüzey  $y = h$  ve periyodik arayüzey  $y = v \cos(k_1 \xi)$  ile sınırlandırıldığında, arayüzeydeki salınımın dalga profili üzerindeki etkisi Şekil 3.12 ile incelenmiştir. Çözümlerin hesabında, arayüzeydeki osilasyona ait boyutsuz salınım parametresi  $s = k_1 h$  ve boyutsuz düzgünlük parametresi  $V = v/h$  olmak üzere  $s = 1.4$ ,  $V = 0.05$  olarak seçilmiştir.  $\beta_1 = 1.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$  için yani sertleşen bir tabakayla kaplı sertleşen yarım uzayda bright soliton benzeri dalga evrimi incelenmiştir. Şekil 3.12(a), 3.12(b) 'den tabakalı yarım uzayın arayüzeyindeki küçük ondülasyonların, bright soliton benzeri dalgalar üzerine iliştirilmiş küçük salınımlara sebep olduğu görülmektedir. Şekil 3.12(c) ve Şekil 3.12(d)'den dalga evrimi sırasında bright soliton benzeri dalganın maksimum genliğinin ve dalga enerjisinin de arayüzeydeki salınımın etkisiyle küçük ondülasyonlara sahip olduğu gözlemlenmiştir. Maksimum genliğin değişiminin genliği de salınımlıyken, enerji salınımının genliği sabittir. Bu da genliği artarken dalganın daraldığı, genliği azalırken dalganın genişlediği anlamına gelmektedir.

Son olarak,  $f_1 \neq 0$  ve  $f_2 \neq 0$  seçildiğinde,  $f_1(\xi) = u \cos(k_1 \xi)$  ve  $f_2(\xi) = v \cos(k_1 \xi)$  için salınımlı serbest yüzey ve salınımlı ara yüzeye ait boyutsuz düzgünlük parametrelerinin,  $U$  ve  $V$ , SH dalgalarının genliği üzerindeki etkisi incelenmiştir. Dalga genliğindeki değişim, iki sınır yüzeyinin de salınımlı olduğu durum ve sınır yüzeylerinden sadece bir tanesinin salınımlı diğerinin düzlemsel olduğu durumlar için Şekil 3.13 ve Şekil 3.14 ile gözlemlenmiştir.

Tabakanın salınımlı arayüzeyine ait düzgünlük parametresi  $V$ 'deki değişimin SH dalgalarının genliği üzerindeki etkisi, serbest yüzeyin düzlemsel ve salınımlı olduğu durumlar için sırasıyla Şekil 3.13(a) ve Şekil 3.13(b) ile gösterilmiştir.  $V = \{0, 0.05, 0.1, 0.2\}$  değerleri için çizilen grafiklerden, arayüzeyin salınımının genliği,  $V$ , arttıkça Love dalgalarının genliğinin de arttığı görülmektedir. Ayrıca tabaka sadece ara yüzeyde salınımına sahipken dalga genliği değerlerinin, hem arayüzeyde hem de serbest yüzeyde salınımına sahip tabakalı yarım uzayda yayılan dalgaların genliğinden büyük olduğu gözlemlenmektedir.

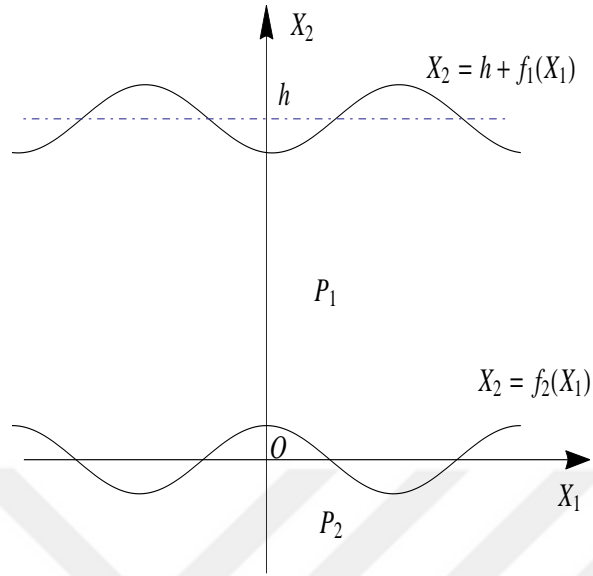
Tabakanın salınımlı serbest yüzeyine ait düzgünlük parametresi  $U$ 'daki değişimin SH dalgalarının genliği üzerindeki etkisi ise, arayüzeyin düzlemsel ve salınımlı olduğu durumlar için sırasıyla Şekil 3.14(a) ve Şeki 3.14(b) ile gözlemlenmiştir.  $U = \{0, 0.05, 0.1, 0.2\}$  değerleri için çizilen grafiklerden görülmektedir ki düzgünlük



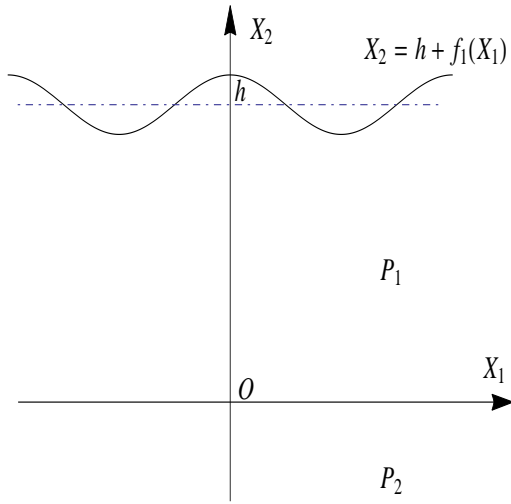
parametresi  $U$  arttıkça bright soliton benzeri dalgaların genliği de artmaktadır. Ayrıca arayüzey düzlemsel olduğunda dalga genliğinin, arayüzeyin salınlı olduğu duruma kıyasla daha büyük olduğu görülmektedir. Şekil 3.14(a)'daki beşinci eğri birinci duruma karşı gelmektedir ve GNLS denkleminin integrallenebilir olduğu bu durumda, ansatz yardımıyla analitik olarak elde edilen (3.241) bright soliton çözümüne aittir. Analitik çözüm ile pseudospectral yöntem kullanılarak elde edilen nümerik çözümün örtüştüğü görülmektedir. Her bir adımda hesaplanan analitik çözüm ile nümerik çözümlerin farkının (hata) sonsuz normu yani mutlak değerlerinin maksimumu  $2.36 \times 10^{-16}$  olarak elde edilmiştir. Şekil 3.14(b)'deki dördüncü eğri ise ikinci duruma karşı gelmektedir ve analitik olarak hesaplanan (3.241) bright soliton benzeri çözüme aittir. Bu durum için ansatz yardımıyla elde edilen analitik çözümle pseudospectral yöntem kullanılarak elde edilen nümerik çözümün örtüştüğü görülmektedir. Her bir adımda hesaplanan hata değerlerinin sonsuz normu  $2.64 \times 10^{-14}$  olarak elde edilmiştir.

İncelenen tüm grafiklerden görülmektedir ki her iki durumda da yani  $f_2 = 0$  ve  $f_1 \neq 0$  ile  $f_2 \neq 0$  ve  $f_1 = 0$  durumlarında, soliton benzeri dalgalara iliştirilmiş küçük salınımlar mevcuttur fakat sadece serbest yüzeyde salınım mevcutken bright soliton benzeri dalgaların tepesindeki salınım, sadece arayüzeyde salınımın olduğu duruma kıyasla daha belirgindir. Ayrıca, her iki durumda da sınır yüzeylerdeki küçük genlikli ondülasyonlar, maksimum dalga genliği ve dalga enerjisinde oldukça küçük genlikte salınımlara sebep olmaktadır. Maksimum genliğin değişim genliği de periyodikken, enerjideki küçük salınımın genliği sabittir.

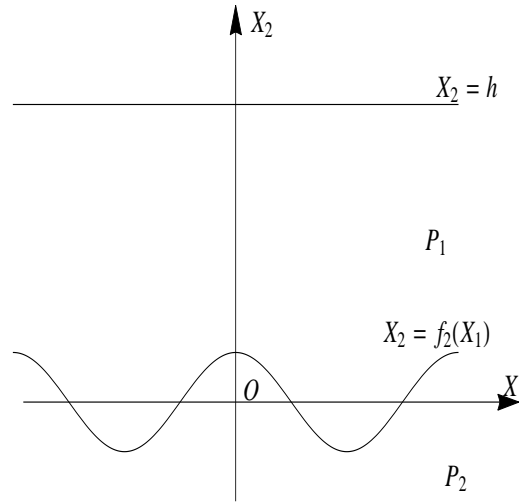
Sınır yüzeylerdeki pürüzlerin, dalga evrimi boyunca soliton enerjisi üzerindeki etkilerini daha iyi kıyaslayabilmek adına incelenen üç farklı durum için enerji grafikleri Şekil 3.15 ile verilmiştir. Bu şekilden, sadece arayüzeyde salınım mevcutken yani  $f_1 = 0$  iken dalga evrimi sırasında enerji değişiminin, serbest yüzeyde salınımın olduğu diğer durumlara göre, yani  $f_2 = 0, f_1 = u \cos(k_1 \xi)$  ve  $f_1 = f_2 = u \cos(k_1 \xi)$  durumlarına kıyasla çok daha küçük olduğu görülmektedir. Tüm gözlemlerden, serbest yüzeydeki salınımın arayüzeydeki salınımına göre dalga evrimi üzerinde daha etkili olduğu sonucu çıkarılmaktadır.



**Şekil 3.9** : Periyodik serbest yüzey ve periyodik arayüzey ile sınırlı tabakalı yarım uzay için problemin geometrisi.

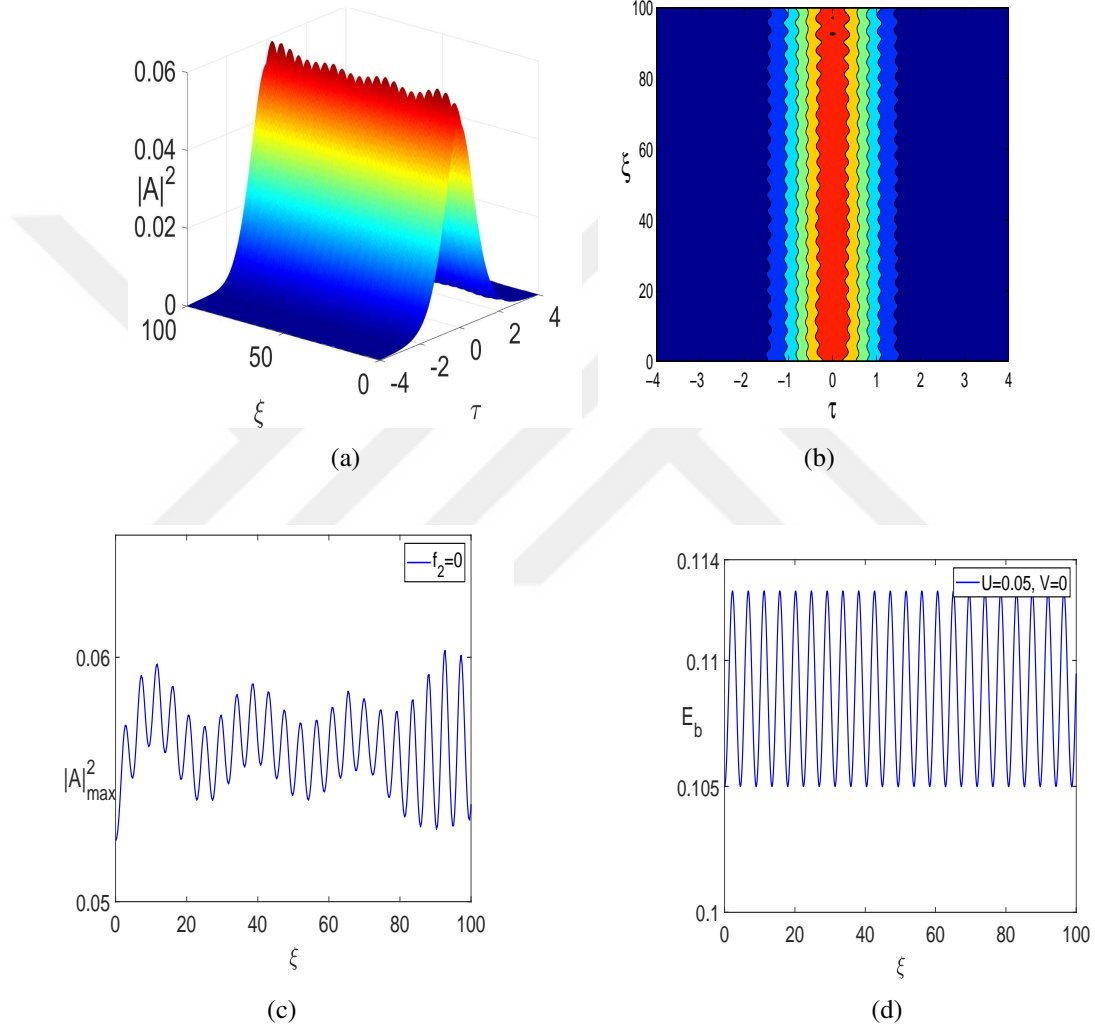


(a) Periyodik serbest yüzey ve düzlem arayüzey ile sınırlı tabakalı yarım uzay.

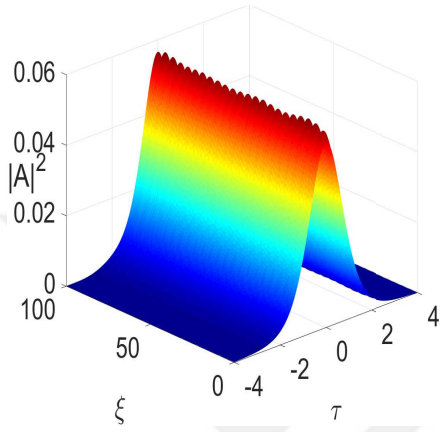


(b) Düzlem serbest yüzey ve periyodik arayüzey ile sınırlı tabakalı yarım uzay.

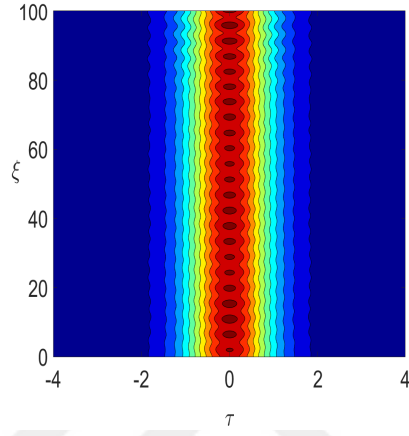
**Şekil 3.10** : Düzlem veya periyodik yüzeylerle sınırlı tabakalı yarım uzay modelleri.



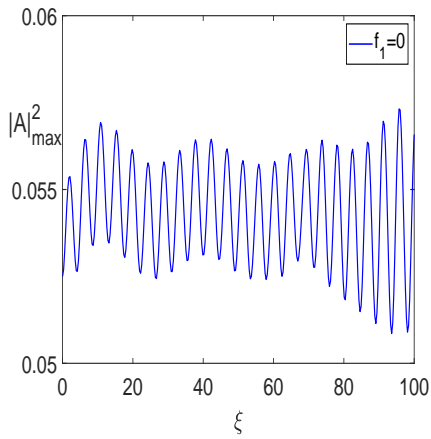
**Şekil 3.11** :  $f_1 = u \cos(k_1 \xi)$ ,  $f_2 = 0$  için a) Bright soliton benzeri dalgaların evrimi, b) Üstten görünüşü c) Maksimum dalga genliği d) Enerji değişimi.



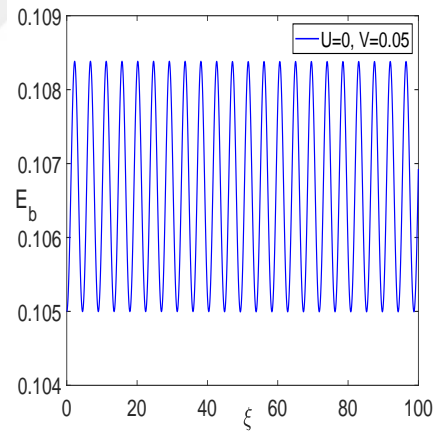
(a)



(b)

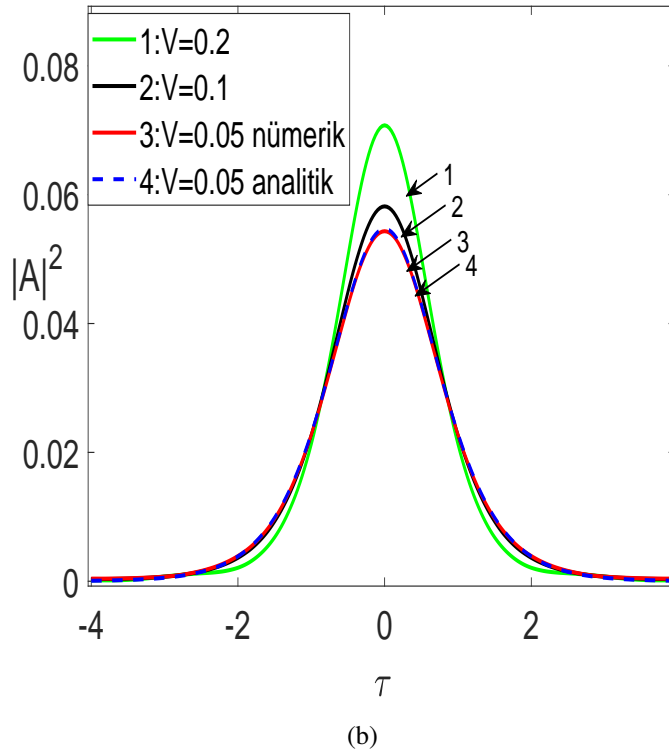
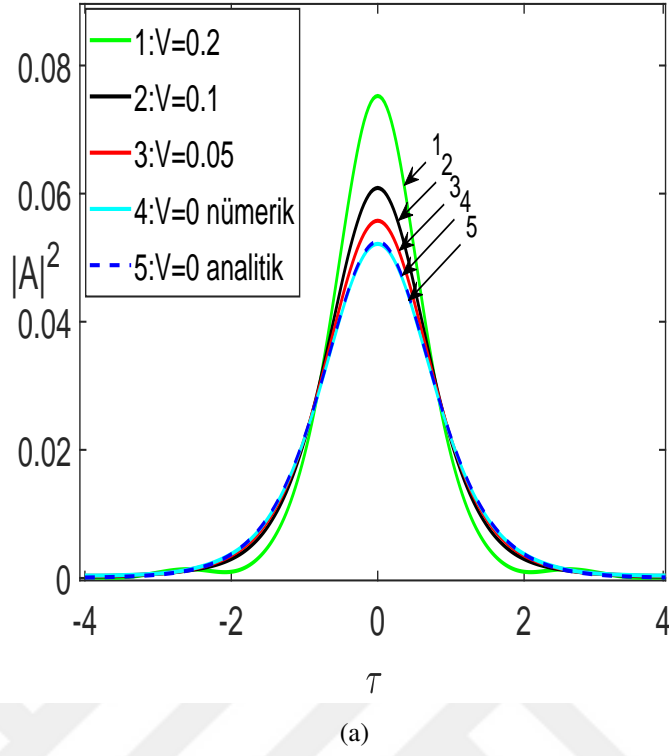


(c)

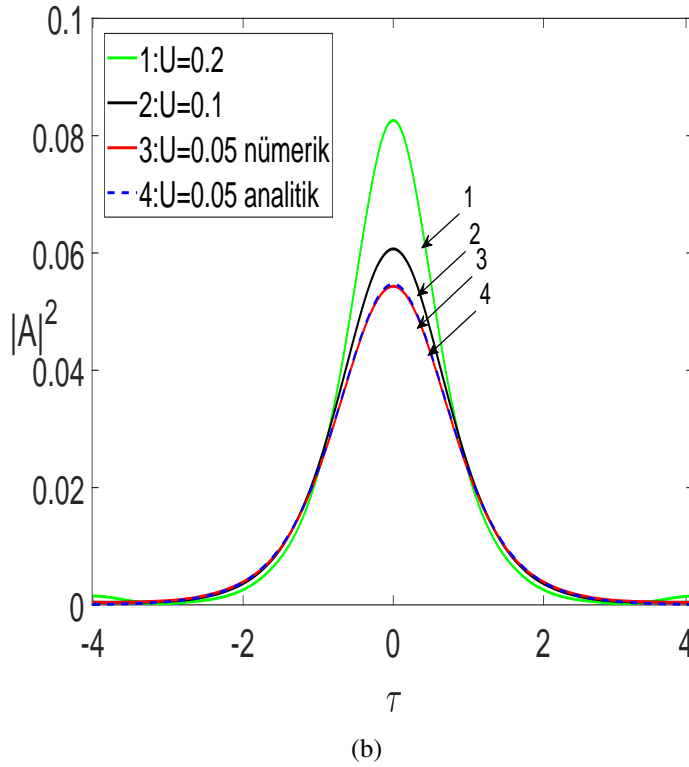
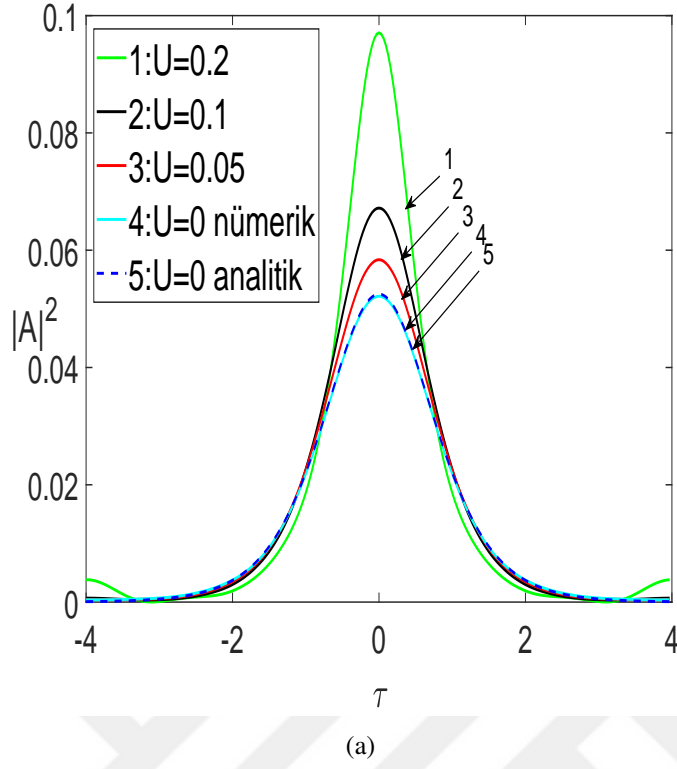


(d)

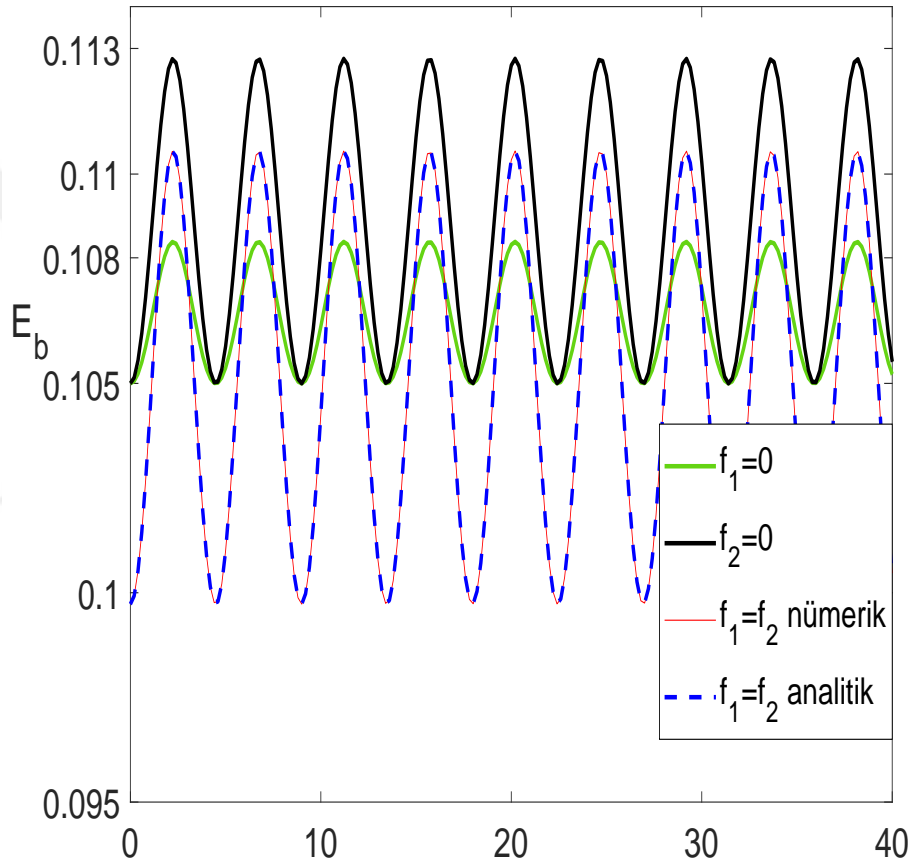
**Şekil 3.12 :**  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = v \cos(k_1 \xi)$  için a) Bright soliton benzeri dalgaların evrimi, b) Üstten görünüşü, c) Maksimum dalga genliği d) Enerji değişimi.



**Şekil 3.13** : a) Serbest yüzey düzlemselken yani  $U=0$  iken b) Serbest yüzey  $U = 0.05$  genlikli salınımına sahipken, sabitlenmiş  $s = 1.4$ ,  $\beta_1 = 1.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$ ,  $\xi = 7$  değerleri ve arayüzeyin düzgünlük parametresi  $V$ 'nin farklı değerleri için  $|A|^2$ 'nin  $\tau$  ile değişimi.



**Şekil 3.14** : a) Arayüzey düzlemselken yani  $V=0$  iken b) Arayüzey  $V = 0.05$  genlikli salınımına sahipken; sabitlenmiş  $s = 1.4$ ,  $\beta_1 = 1.5$ ,  $\beta_2 = 1.5$ ,  $\xi = 7$  değerleri ve serbest yüzeyin düzgünlük parametresi  $U$ 'nun farklı değerleri için  $|A|^2$ 'nin  $\tau$  ile değişimi.



Şekil 3.15 : Üç farklı duruma ait bright soliton benzeri dalgaların evrimi sırasında enerji değişimleri.





#### 4. SONUÇ

Tezin ilk problemi olarak, sabit kalınlıklı ve birbirinden farklı malzemelerden oluşan iki tabakayla kaplı homojen, izotrop, sıkışmaz hiperelastik bir yarım uzayda lineer olmayan küçük ama sonlu genlikli SH tipi yüzey dalgalarının yavaş modülasyonu incelenmiştir. Ara tabakanın lineer kayma hızının, üst tabakanın ve yarım uzayın lineer kayma hızlarından küçük olduğu kabul edilerek yavaş ara tabakanın lineer olmayan malzeme özelliklerinin, yüzey SH dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Çoklu ölçekler metodu kullanılarak, lineer olmayan dalga modülasyonunun genlik fonksiyonu asimptotik olarak lineer olmayan, sabit katsayılı bir Schrödinger denklemi ile karakterize edilmiştir. Bu denklemin katsayıları, lineer ve lineer olmayan malzeme parametrelerine, tabakaların kalınlıkları oranına ve ayrıca dalga sayısına bağlıdır. Sabit katsayılı NLS denkleminin çözüm özellikleri, denklemin katsayılar çarpımının işaretine bağlı olduğundan bu çarpımın işaretinin dalga sayısı ile değişimi, malzeme parametrelerine ve tabakaların kalınlıkları oranına uygun değerler verilerek hesaplanmıştır. Lineer olmayan malzemelerin katsayılar üzerindeki, dolayısıyla denklemin çözümleri üzerindeki etkisini gözlemlemek için lineer malzeme parametreleri sabit tutulurken, çeşitli lineer olmayan malzeme parametreleri için hesaplamalar yapılmıştır. İncelenen tüm modeller için dalga sayısı yaklaşık olarak  $K > 0.5$  iken zarf soliton ve dark soliton tipi dalgaların varlığının, yavaş ara tabakanın lineer olmayan malzeme özelliklerinden kuvvetli bir biçimde etkilendiği gösterilmiştir. Göreceli olarak uzun dalga boylarında yani  $K \ll 1$  için, tek tabakalı yarım uzayda yayılan Love dalgalarında olduğu gibi (Bknz. [7]) yüzey SH dalgalarının yayılma karakteristiklerinde yarım uzayın lineer olmayan özelliklerinin baskın olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca ara tabakanın kalınlığı sıfıra gittiğinde, bu çalışmada elde edilen NLS denklemi tek tabakayla kaplı bir yarım uzayda yayılan SH dalgalarını asimptotik olarak karakterize eden NLS denklemine indirgenmektedir. Tek tabakalı yarım uzay ve iki tabakalı yarım uzay modellerinde yüzey SH dalga yayılımını karakterize eden NLS denklemlerinin çözüm özellikleri karşılaştırılarak zarf soliton

tipi SH dalga yayılımının ikinci bir tabakanın varlığından kayda değer bir biçimde etkilendiği gösterilmiştir.

Bir diğer çalışma olarak, lineer olmayan malzemelerin yanı sıra kıtasal bir tabakanın düzensiz sınır yüzelerinin de yüzey SH dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerine etkileri araştırılmıştır. Sınır yüzelerinin SH dalgalarının yayılma yönünde yavaş değiştiği kabul edilen bir tabakalı yarım uzayda, yüzey SH dalgalarının lineer olmayan modülasyonunun asimptotik olarak değişken katsayılı bir GNLS denklemi ile karakterize edildiği çoklu ölçekler pertürbasyon yöntemi kullanılarak gösterilmiştir. Sınır yüzelerdeki değişim ihmal edildiğinde GNLS denklemi, düzlem sınır yüzeylere sahip tabakalı bir yarım uzayda lineer olmayan Love dalga yayılımını karakterize eden sabit katsayılı NLS denkleminde indirgenmektedir. Sabit katsayılı NLS denklemi integrallenebilirken, katsayıları lineer ve lineer olmayan malzeme parametrelerine, sınır yüzelerindeki değişimi temsil eden fonksiyonlara bağlı olan değişken katsayılı GNLS denklemi her zaman integrallenebilir değildir. Önerilen bir ansatz yardımıyla GNLS denklemi için integrallenebilirlik koşulu türetilerek bu koşul altında, dispersiyon ve lineer olmayan terimlerin çarpımı,  $\Gamma\Delta$ , pozitifken bright soliton benzeri dalgalar, negatifken dark soliton benzeri dalgalar analitik olarak elde edilmiştir. Etkileri katsayı fonksiyonlarında görülen sınır yüzelerindeki düzensizliklerin, GNLS denkleminin integrallenebilirliğine izin verdiği durumlar araştırılmıştır. Sınır yüzelerinin, kosinüs fonksiyonu şeklinde değiştiği kabul edilerek, GNLS denkleminin integrallenebilir olduğu bazı özel durumlar için elde edilen bright ve dark soliton benzeri dalgalar üzerindeki etkileri araştırılmıştır. GNLS denkleminin integrallenebilirlik koşulunun sağlanmadığı salınımlı sınır yüzeylere ait diğer özel durumlar için pseudospectral yöntem kullanılarak nümerik çözümler elde edilmiştir. Çeşitli lineer olmayan malzeme parametreleri için hesaplanan çözümlerin grafiklerinden, sınır yüzelerdeki salınımın bir sonucu olarak dark soliton dalgaların arka planının ve bright soliton dalgaların üst tarafının periyodik bir salınıma maruz kaldığı ayrıca maksimum dalga genliği ve dalga enerjisinde de küçük genlikte salınımların mevcut olduğu gözlemlenmiştir. Tabakanın sınır yüzelerindeki salınımın genliği arttıkça, soliton benzeri SH dalgalarının genliklerinin de arttığı görülmüştür. Serbest yüzeydeki salınımla arayüzeydeki salınımın lineer olmayan dalga yayılımı üzerine etkilerinin farkını açık bir şekilde ortaya çıkarmak için yüzeylerden sadece

birinde salınımın olduğu iki farklı durum incelenmiştir. Sınır yüzeylerden sadece bir tanesi salınımına sahip diğeri düzlemselken, hem arayüzeyin hem de serbest yüzeyin salınımlı olduğu duruma kıyasla dalga genliğinin daha büyük olduğu gözlemlenmiştir. Serbest yüzeyde salınım mevcutken bright soliton benzeri dalgaların tepesindeki salınımın, sadece arayüzeyde salınımın olduğu duruma kıyasla daha belirgin olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca dalga evrimi sırasında enerji değışiminin, serbest yüzey salınımına sahipken diğeri durumlara kıyasla daha büyük olduğu görülmüştür. Dalga profilleri ve enerji analizinden, serbest yüzeydeki ondülasyonun lineer olmayan dalga evrimi üzerinde arayüzeydeki ondülasyona kıyasla daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır.





## KAYNAKLAR

- [1] **Achenbach, J.** (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*, cilt 16, Elsevier.
- [2] **Ewing, W. M.** (1957). *Elastic Waves in Layered Media*, International Series in Earth Science, McGraw-Hill Inc., US; 1st edition.
- [3] **Love, A. E. H.** (1911). *Some Problems of Geodynamics: Being the Essay to which the Adams Prize in the University of Cambridge was Adjudged in 1911*, CUP Archive.
- [4] **Båth, M.** (2013). *Mathematical Aspects of Seismology: Developments in Solid Earth Geophysics*, cilt 4, Elsevier.
- [5] **Farnell, W. G.**, (1978). Types and properties of surface, *Acoustic Surface Waves*, Springer, 24, 13–60.
- [6] **Kundu, S., Gupta, S. ve Manna, S.** (2014). Propagation of Love wave in fiber-reinforced medium lying over an initially stressed orthotropic half-space, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 38(11), 1172–1182.
- [7] **Teymur, M.** (1988). Nonlinear modulation of Love waves in a compressible hyperelastic layered half space, *International Journal of Engineering Science*, 26(9), 907–927.
- [8] **F Maugin, G. ve Hadouaj, H.** (1991). Solitary surface transverse waves on an elastic substrate coated with a thin film, *Physical Review B*, 44(3), 1266.
- [9] **Teymur, M., Demirci, A. ve Ahmetolan, S.** (2014). Propagation of surface SH waves on a half space covered by a nonlinear thin layer, *International Journal of Engineering Science*, 85, 150–162.
- [10] **Jeffrey, H.** (1925). On the surface waves of earthquakes, *Geophysical Supplements to MNRAS*, 44(3), 282–292.
- [11] **Stoneley, R. ve Tillotson, E.** (1928). The effect of a double surface layer on Love waves., *Geophysical Journal International*, 1, 521–527.
- [12] **Stoneley, R.** (1950). The effect of a low-velocity internal stratum on surface elastic waves, *Geophysical Journal International*, 6, 28–35.
- [13] **Bath, M.** (1956). Some consequence of the existence of low-velocity layers, *Annals of Geophysics*, 9(4), 411–450.
- [14] **Dorman, J.** (1959). Numerical solutions for Love wave dispersion on a half-space with double surface layer, *Geophysics*, 24(1), 12–29.

- [15] **Novotný, O.** (1966). The modes of love waves in a double-layer medium, *Studia Geophysica et Geodaetica*, 10(2), 156–171.
- [16] **Avtar, P.** (1967). Love waves in a two-layered crust overlying a vertically inhomogeneous halfspace I, *Pure and Applied Geophysics*, 66(1), 48–68.
- [17] **Li, P., Jin, F. ve Lu, T.J.** (2012). A three-layer structure model for the effect of a soft middle layer on Love waves propagating in layered piezoelectric systems, *Acta Mechanica Sinica*, 28(4), 1087–1097.
- [18] **Var, H. İ.** (1997). *Tabakalı bir hiperelastik yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarının yayılması.* (Doktora Tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [19] **Ahmetolan, S. ve Teymur, M.** (2003). Non-linear modulation of SH waves in a two-layered plate and formation of surface SH waves, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 38(8), 1237–1250.
- [20] **Kayestha, P., Ferreira, E. R. ve Wijeyewickrema, A. C.** (2015). Finite-amplitude Love waves in a pre-stressed compressible elastic half-space with a double surface layer, *Wave Motion*, 56, 205–220.
- [21] **Honma, S.** (1952). Love waves in a surface layer of varying thickness, *Geophy. Mag., Tokyo*, 24(9), 9–14.
- [22] **De Noyer, J.** (1961). The effect of variations in layer thickness on Love waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 51(2), 227–235.
- [23] **Sato, R.** (1961). Love waves in case the surface layer is variable in thickness, *Journal of Physics of the Earth*, 9(2), 19–36.
- [24] **Mal, A.** (1962). On the frequency equation for Love waves due to abrupt thickening of the crustal layer, *Geofisica pura e applicata*, 52(1), 59–68.
- [25] **Ghosh, M. L.** (1963). On Love waves across the ocean, *Geophysical Journal International*, 7(3), 350–360.
- [26] **Takahashi, T.** (1964). Transmission of Love waves in a half-space with a surface layer whose thickness varies hyperbolically, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(2), 611–625.
- [27] **Paul, M. K.** (1965). The propagation of surface waves in elastic mediums with slightly curved boundaries of sinusoidal type, *Pure and Applied Geophysics PAGEOPH*, 62(1), 105–117.
- [28] **Rulf, B., Robinson, B. Z. ve Rosenau, P.** (1972). Asymptotic expansions of guided elastic waves, *Journal of Applied Mechanics*, 39(2), 378–384.
- [29] **Keller, J. B.** (1958). Surface waves on water of non-uniform depth, *Journal of Fluid Mechanics*, 4(6), 607–614.
- [30] **Wolf, B.** (1967). Propagation of Love waves in surface layers of varying thickness, *Pure and Applied Geophysics*, 67(1), 76–82.

- [31] **Wolf, B.** (1970). Propagation of Love waves in layers with irregular boundaries, *Pure and Applied Geophysics*, 78(1), 48–57.
- [32] **Gjevik, B.** (1973). A variational method for Love waves in nonhorizontally layered structures, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 63(3), 1013–1023.
- [33] **Bhattacharyya, S.** (1974). Reflection and diffraction of SH-type waves in elastic medium by a periodic curved boundary, *Pure and Applied Geophysics*, 112(5), 837–844.
- [34] **Markenscoff, X. ve Lekoudis, S.** (1976). Love waves in slowly varying layered media, *Pure and Applied Geophysics*, 114(5), 805–810.
- [35] **Ben-Hador, R. ve Buchen, P.** (1999). Love and Rayleigh waves in non-uniform media, *Geophysical Journal International*, 137(2), 521–534.
- [36] **Whitham, G.** (1965). A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian, *Journal of Fluid Mechanics*, 22(2), 273–283.
- [37] **Acharya, D. ve Roy, I.** (2009). Effect of surface stress and irregularity of the interface on the propagation of SH-waves in the magneto-elastic crustal layer based on a solid semi space, *Sadhana*, 34(2), 309–330.
- [38] **Singh, S.** (2011). Love wave at a layer medium bounded by irregular boundary surfaces, *Journal of Vibration and Control*, 17(5), 789–795.
- [39] **Kundu, S., Manna, S. ve Gupta, S.** (2014). Love wave dispersion in pre-stressed homogeneous medium over a porous half-space with irregular boundary surfaces, *International Journal of Solids and Structures*, 51(21-22), 3689–3697.
- [40] **Kawahara, T.** (1975). Derivative-expansion method for nonlinear waves on a liquid layer of slowly varying depth, *Journal of the Physical Society of Japan*, 38(4), 1200–1206.
- [41] **Bretherton, F. P. ve Garrett, C. J. R.** (1968). Wavetrains in inhomogeneous moving media, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 302(1471), 529–554.
- [42] **Djordjević, V. D. ve Redekopp, L. G.** (1978). On the development of packets of surface gravity waves moving over an uneven bottom, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 29(6), 950–962.
- [43] **Duparc, O. H. ve Maradudin, A.** (1983). Roughness-trapped shear horizontal surface acoustic waves, *Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena*, 30(1), 145–150.
- [44] **Johnson, R. S.** (1997). *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, cilt 19, Cambridge University Press.
- [45] **Turpin, F. M., Benmoussa, C. ve Mei, C. C.** (1983). Effects of slowly varying depth and current on the evolution of a Stokes wavepacket, *Journal of Fluid Mechanics*, 132, 1–23.

- [46] **Knowles, J. K.** (1977). The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids, *International Journal of Fracture*, 13(5), 611–639.
- [47] **Eringen, A.** (1967). *Mechanics of Continua*, John Wiley, New York.
- [48] **Munkres, J. R.** (1991). *Analysis on Manifolds*, Westview Press.
- [49] **Stoneley, R.** (1924). Elastic waves at the surface of separation of two solids, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 106(738), 416–428.
- [50] **Kurt, H.** (2015). *Üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz bir elastik ortamda nonlineer enine kayma (SH) dalgalarının yayılması*. (Doktora Tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [51] **Jeffrey, A. ve Kawahara, T.** (1982). Asymptotic methods in nonlinear wave theory, *Applicable Mathematics Series, Boston: Pitman, 1982*.
- [52] **Shabat, A. ve Zakharov, V.** (1972). Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Soviet Physics JETP*, 34(1), 62.
- [53] **Ablowitz, M. J. ve Clarkson, P. A.** (1991). *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, cilt149, Cambridge University Press.
- [54] **Zakharov, V. ve Shabat, A.** (1973). Interaction between solitons in a stable medium, *Sov. Phys. JETP*, 37(5), 823–828.
- [55] **Kakutani, T. ve Michihiro, K.** (1983). Marginal State of Modulational Instability—Note on Benjamin-Feir Instability—, *Journal of the Physical Society of Japan*, 52(12), 4129–4137.
- [56] **Whitham, G.** (1974). *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley.
- [57] **Mei, C.**, (1983). *The Applied Dynamics of Surface Ocean Waves*, Advanced Series on Ocean Engineering: Volume 1.
- [58] **Mei, C. C. ve Li, Y.** (2004). Evolution of solitons over a randomly rough seabed, *Physical Review E*, 70(1), 016302.
- [59] **Serkin, V. ve Hasegawa, A.** (2000). Soliton management in the nonlinear Schrödinger equation model with varying dispersion, nonlinearity, and gain, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 72(2), 89–92.
- [60] **Hao, R., Li, L., Li, Z., Xue, W. ve Zhou, G.** (2004). A new approach to exact soliton solutions and soliton interaction for the nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients, *Optics Communications*, 236(1-3), 79–86.
- [61] **Serkin, V. N. ve Belyaeva, T. L.** (2001). High-energy optical Schrödinger solitons, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 74(12), 573–577.



- [62] **Myint-U, T. ve Debnath, L.** (2007). *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Springer Science & Business Media.
- [63] **Yang, J.** (2010). *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*, cilt 16, SIAM.
- [64] **Trefethen, L. N.** (2000). *Spectral Methods in MATLAB*, cilt 10, Siam.
- [65] **Serkin, V. N. ve Belyaev T. L.** (2001). Optimal control of optical soliton parameters: Part 1. The Lax representation in the problem of soliton management, *Quantum Electronics*, 31(11), 1007-1015.
- [66] **Teymur, M.** (1996). Small but finite amplitude waves in a two-layered incompressible elastic medium, *International Journal of Engineering Science*, 34(2), 227–241.
- [67] **Eringen, A. ve Suhubi, E.** (1974). *Elastodynamics*, cilt 1, New York: Academic Press.



## **EKLER**

**EK A :** Genelleştirilmiş neo-Hookean malzemede düzlem dışı kayma dalgaları





## EK A

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen takımına göre maddesel ve uzaysal koordinatları sırasıyla  $(X_1, X_2, X_3)$  ve  $(x_1, x_2, x_3)$  olmak üzere, aşağıdaki denklemlerle tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketini diğer bir deyişle düzlem dışı hareketi göz önüne alalım:

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 + u(X_1, X_2, t). \quad (\text{A.1})$$

Burada,  $t$  zaman,  $u$  bir parçacığın  $X_3$  yönündeki yer değiştirme fonksiyonudur.  $\det x_{k,K} = 1$  olduğundan, (A.1) ile verilen genelleştirilmiş kayma hareketi izokorik bir şekil değiştirmedir ve hareket boyunca ortamın yoğunluğu,  $\rho$ , sabit kalır.

$T_{Kl}$  birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörü olmak üzere, harekete etki eden kütle kuvvetleri bulunmadığında, referans konumundaki hareket denklemleri aşağıdaki şekildedir, [47]:

$$T_{K\beta,K} = 0, \quad \beta = 1, 2; \quad T_{K3,K} = \rho \dot{u}. \quad (\text{A.2})$$

Burada, virgülden sonraki alt indis  $X_K$  koordinatına göre kısmi türevi ve büyüklüğün üzerindeki her bir nokta, zamana göre kısmi türevi göstermektedir. Tekrarlanan iki latin indisi üzerinde 1' den 3'e kadar toplam olduğu kabul edilmiştir.

Şimdi, hareketin lineer olmayan, homojen, izotrop, sıkışmaz hiperelastik malzemelerden oluştuğu ve gerilme potansiyelinin, Finger şekil değiştirme tansörünün,  $\mathbf{c}^{-1} = [x_{k,K}x_{l,K}]$ , sadece birinci invariantının bir fonksiyonu, yani  $\Sigma = \Sigma(I)$  olduğu kabul edilecektir. Bu malzemeler genelleştirilmiş neo-Heoken malzeme olarak adlandırılmaktadır, [46]. Bu tür malzemeler için gerilme bünye denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir, [67]:

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \Phi \mathbf{c}_{kl}^{-1}, \quad (\text{A.3})$$

Burada  $t_{kl}$  Cauchy gerilme tansörü,  $p(X_k, t)$  ise keyfi bir basınç fonksiyonudur ve

$$\Phi = 2 \frac{d\Sigma}{dI} > 0. \quad (\text{A.4})$$

(A.1) ile verilen genelleştirilmiş kayma hareketi için şekil değiştirme gradyanı ve Finger şekil değiştirme tansörü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$[x_{k,K}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{,1} & u_{,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{,1} \\ 0 & 1 & u_{,2} \\ u_{,1} & u_{,2} & 1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

$\mathbf{c}^{-1}$  Finger şekil değiştirme tansörünün asal invariantları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$I = \text{tr} \mathbf{c}^{-1}, \quad 2II = (\text{tr} \mathbf{c}^{-1})^2 - \text{tr} \mathbf{c}^{-2}, \quad III = \det \mathbf{c}^{-1}. \quad (\text{A.6})$$

Bu asal invariantlar aşağıdaki gibi bulunur:

$$I = II = 3 + u_{,\Delta}u_{,\Delta}, \quad III = 1. \quad (\text{A.7})$$

Burada tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde 1'den 2'ye kadar toplam olduğu kabul edilmiştir.  $j = \det(x_{k,K}) = 1$  olmak üzere,  $T_{Kl}$  birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörü ile  $t_{kl}$  Cauchy gerilme tansörü arasında  $T_{Kl} = jX_{K,k}t_{kl}$  bağıntısı kullanılarak birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörünün bileşenleri aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{22} = T_{33} &= -p + \Phi, & T_{12} = T_{21} &= 0, \\ T_{13} = \Phi u_{,1}, & T_{23} = \Phi u_{,2}, & T_{31} = pu_{,1}, & T_{32} = pu_{,2}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ve (A.2) hareket denklemleri aşağıdaki formu alır:

$$\begin{aligned} (-p + \Phi)_{,1} + (pu_{,1})_{,3} &= 0, \\ (-p + \Phi)_{,2} + (pu_{,2})_{,3} &= 0, \\ (\Phi u_{,1})_{,1} + (\Phi u_{,2})_{,2} - \rho \ddot{u} &= p_{,3}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Yukarıdaki son denklemin sol tarafı sadece  $X_1, X_2$  ve  $t$ 'nin fonksiyonu olduğu için

$$p_{,3} = \kappa_0(X_1, X_2, t) \quad (\text{A.10})$$

yazılabilir. Bu denklem  $X_3$ 'e göre integre edilirse,  $\kappa_0$  ve  $\kappa_1$  keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$p = \kappa_0(X_1, X_2, t)X_3 + \kappa_1(X_1, X_2, t) \quad (\text{A.11})$$

elde edilir. Yukarıdaki  $p$  fonksiyonu (A.9)'daki ilk iki hareket denkleminde yerine konulursa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} -\kappa_{0,1}X_3 - \kappa_{1,1} + \Phi_{,1} + \kappa_0 u_{,1} &= 0, \\ -\kappa_{0,2}X_3 - \kappa_{1,2} + \Phi_{,2} + \kappa_0 u_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

(A.12) denklemlerinin her  $X_3$  için sağlanması için:

$$\kappa_{0,1} = 0 \quad \text{ve} \quad \kappa_{0,2} = 0 \quad (\text{A.13})$$

olması gerektiği açıktır. Buradan  $f, t$ 'nin keyfi bir fonksiyonu olmak üzere

$$\kappa_0 = f(t) \quad (\text{A.14})$$

olarak bulunur. Sonuç olarak (A.9)'daki ilk iki hareket denklemini aşağıdaki formu alır:

$$\begin{aligned} -\kappa_{1,1} + \Phi_{,1} + f(t)u_{,1} &= 0, \\ -\kappa_{1,2} + \Phi_{,2} + f(t)u_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Bu denklemlerden ilkinin  $X_1$ 'e göre integre edersek:

$$\kappa_1 = \Phi + uf(t) - g(X_2, t) \quad (\text{A.16})$$

elde edilir.  $\kappa_1$ , (A.15)'in ikinci denkleminde yerine yazılırsa:

$$g_{,2} = 0 \quad (\text{A.17})$$

bulunur. Buradan  $g(t)$  keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$g = g(t) \quad (\text{A.18})$$

olduğu görülmektedir. Böylece

$$\kappa_1 = \Phi + f(t)u - g(t) \quad (\text{A.19})$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak basınç fonksiyonu için (A.11) bağıntısı aşağıdaki şekli alır:

$$p = f(t)X_3 + \Phi + f(t)u - g(t). \quad (\text{A.20})$$

Elde edilen basınç fonksiyonu (A.3) gerilme bünye bağıntısında kullanılarak, gerilme bileşenleri aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} t_{11} &= t_{22} = -f(t)X_3 - f(t)u + g(t), \\ t_{12} &= t_{21} = 0, \\ t_{\alpha 3} &= \Phi u_{,\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \\ t_{33} &= -f(t)X_3 - f(t)u + g(t) + \Phi[(u_{,1})^2 + (u_{,2})^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Burada  $|X_3| \rightarrow \infty$  için  $t_{11}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{33}$  sonsuza gider yani sınırsız olarak büyür. Bu, fiziksel anlamı olmayan bir durumdur çünkü  $|X_3| \rightarrow \infty$  için gerilme bileşenleri sınırlı kalmalıdır. Bu yüzden

$$f(t) = 0 \quad (\text{A.22})$$

olmalıdır. Ayrıca hareketin olmadığı doğal durum gerilmesiz kabul edildiğinden yani,  $u = 0$  için gerilme bileşenlerinin sıfır olduğu kabulünden,

$$g(t) = 0 \quad (\text{A.23})$$

olması gerekir ve  $p$  için de (A.20)'den

$$p = \Phi = 2 \frac{d\Sigma}{dI} \quad (\text{A.24})$$

elde edilir. Bu durumda (A.21)'deki Cauchy gerilme tansörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} t_{11} &= t_{22} = t_{12} = t_{21} = 0, \\ t_{\alpha 3} &= t_{3\alpha} = \Phi u_{,\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \\ t_{33} &= \Phi[(u_{,1})^2 + (u_{,2})^2] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

olarak elde edilir ve (A.8)'den birinci tür Piola-Kirchoff tansörünün  $T_{Kl}$  bileşenleri de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{22} = T_{12} = T_{21} = T_{33} = 0, \\ T_{13} &= T_{31} = \Phi u_{,1}, \quad T_{23} = T_{32} = \Phi u_{,2}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Böylece (A.2)'deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir, [66]:

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left( \Phi \frac{\partial u}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \Phi \frac{\partial u}{\partial X_2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (\text{A.27})$$

Böylelikle genelleştirilmiş neo-Hookeen malzemedan oluşan bir ortamda, (A.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketi, kütle kuvvetlerine ihtiyaç duyulmadan yaratılabilir. Bu çalışmada sadece genelleştirilmiş neo-Hookeen malzeme göz önüne

alınmıştır. Genellikle, izotropik sıkışabilir ya da sıkışmaz diğer malzemelerde,  $\Sigma$  gerilme potansiyeli fonksiyonu üzerine bazı kısıtlamalar koymadan (A.2)'deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanmaz. Bu malzemelerle kaplı ortamlar için [7]'deki çalışmada yapılan benzer kısıtlamalar altında paralel bir analiz yürütülebilir.

Şimdi

$$\tau = \sqrt{t_{13}^2 + t_{23}^2} \quad (\text{A.28})$$

bağıntısı ile bir kayma gerilmesi tanımlansın. Bu bağıntıda (A.25), (A.24) ile birlikte kullanılırsa

$$\tau = 2 \frac{d\Sigma}{dI} \sqrt{(u_{,1})^2 + (u_{,2})^2} \quad (\text{A.29})$$

elde edilir.  $K = \sqrt{(u_{,1})^2 + (u_{,2})^2}$  kayma deformasyonunu temsil etmektedir. Bu terimin katsayısı kayma modülü olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{\mu} = 2 \frac{d\Sigma}{dI} \quad (\text{A.30})$$

Bu çalışmada küçük ama sonlu genlikli dalga yayılımı problemi incelendiği için hareket denklemlerinin yaklaşık formları kullanılabilir. Bu yaklaşık denklemleri türetmek için, gerilme potansiyeli  $\Sigma$ 'nın,  $[3, \infty)$  aralığında  $I$ 'nin analitik fonksiyonu olduğu kabul edilerek, bu fonksiyon gerilmesiz doğal durum,  $I = 3$ , civarında Taylor serisine açılır:

$$\Sigma(I) = \Sigma'(3)(I-3) + \frac{1}{2!} \Sigma''(3)(I-3)^2 + \dots \quad (\text{A.31})$$

Bu açılım  $\Phi = 2 \frac{d\Sigma}{dI}$  olduğu dikkate alınarak (A.27) denkleminde yerine konulup, üçüncü ve daha yüksek mertebeden lineer olmayan terimler ihmal edildiğinde aşağıdaki hareket denklemi elde edilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} \right) = n \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u}{\partial X_1} K^2 \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial u}{\partial X_2} K^2 \right) \right\}, \quad (\text{A.32})$$

Burada  $c^2 = \Phi(3)/\rho$  olmak üzere  $c$  lineer kayma dalgalarının yayılma hızını,  $n = \frac{d\Phi}{dI}(3)/\rho$  lineer olmayan malzeme parametrelerini temsil etmektedir. (A.31) açılımı, (A.30) eşitliğinde kullanılırsa

$$\tilde{\mu} = \rho(c^2 + nK^2) \quad (\text{A.33})$$

olarak elde edilir.  $c^2 > 0$  olduğundan, eğer  $n > 0$  ise  $K$  arttıkça  $\tilde{\mu}$  monoton olarak artacak,  $n < 0$  ise monoton olarak azalacaktır. Dolayısıyla,  $n > 0$  ise ortam kayma hareketinde sertlesen davranış,  $n < 0$  ise yumuşayan davranış gösterir, [46].

Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial X_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (\text{A.34})$$

ve

$$x_3 = X_3 + u(X_1, X_2, t) \triangleq X_3 + \hat{u}(x_1, x_2, t). \quad (\text{A.35})$$

olmak üzere, (A.27) hareket denklemi Eulerian koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \Phi \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \Phi \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}. \quad (\text{A.36})$$

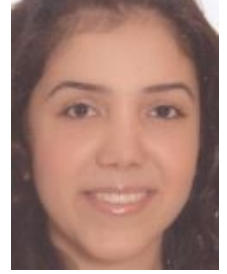


## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Ekin Deliktaş

**Doğum Tarihi ve Yeri:** İzmir, 29/09/1987

**E-Posta:** edeliktas@itu.edu.tr



### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2008, Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2011, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

### MESLEKİ DENEYİMLER :

- 2010-2018, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi

### DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR VE SUNUMLAR :

- **Deliktas E.,** Teymur M., (2018). Surface shear horizontal waves in a double-layered nonlinear elastic half space, *IMA, Journal of Applied Mathematics*, 83, 471-495. Doi: 10.1093/imamat/hxy009
- **Deliktas E.,** Teymur M., (2016). Propagation of surface SH waves on a nonlinear half space coated with a layer of nonuniform thickness. *AIP Conference Proceeding for International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2016)*, Rodos, Greece, 19-25 Eylül 2016. Doi:10.1063/1.4992746
- **Deliktas E.,** Teymur M., (2016). Düzgün Kalınlıklı Elastik İki Tabakayla Kaplı Bir Yarım Uzayda Doğrusal Olmayan Yüzey SH Dalgalarının Yayılması, *Konferans Bildirisi, XIX Ulusal Mekanik Kongresi, Karadeniz Teknik Üniversitesi*, 24-28 Ağustos 2015.
- **Deliktas E.,** Teymur M., (2015). Effect of Slow Layer on the Propagation of Surface Elastic SH Waves in a Double Layered Nonlinear Elastic Half Space *International Conference Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology, Izmir University*, 2-7 Ağustos, 2015.
- Var H.İ., **Deliktas E.,** Teymur M., (2015). Nonlinear Modulation of Surface SH Waves in a Two Layered Hyperelastic Half Space, *International Conference on Scientific Computation And Differential Equations, University of Potsdam*, 14-18 Eylül, 2015.

- **Deliktas E.**, Teymur M., (2016). Propagation of love waves on a half space covered by a layer of slowly varying thickness, *International Congress on Fundamental and Applied Sciences (ICFAS 2016)* , 22 – 26 Ağustos 2016.
- **Deliktas E.**, Teymur M., (2017). Nonlinear Modulation of Love Waves on a Slowly Varying Layered Media, *International Conference on Symmetries, Differential Equations and Applications (SDEA-III)* , 14 – 17 Ağustos 2017.
- **Deliktas E.**, Teymur M., (2018). Nonlinear Surface Waves in a Half Space Covered by an Uneven Layer, *10th European Solid Mechanics Conference, Bologna, Italy* , 2-6 Temmuz, 2018.

#### **DİĞER YAYINLAR VE SUNUMLAR :**

- Mehr AD., Kahya E., Bagheri F., **Deliktas E.**, (2014). Successive-station monthly streamflow prediction using neuro-wavelet technique, *Earth Sci. Inform.*, 7, 217–229. Doi: 10.1007/s12145-013-0141-3S
- Pınar Z., **Deliktas E.**, Ozis T., (2014). The Exact Solutions to Analytical Model of Tsunami Generation by Sub-Marine Landslides, *Proceedings of the Seventh International Conference on Management Science and Engineering Management, Lecture Notes in Electrical Engineering*, 242, 1009-1017.
- **Deliktas E.**, Ozis T., (2014). A Space Extension for Exponentially Fitted Runge-Kutta-Nystrom Methods, *The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems Differential Equations and Applications* , 7-11 Temmuz 2014, Madrid.
- Pınar, Z., **Deliktas, E.**, (2016). Solution Behaviors in Coupled Schrödinger Equations with Full-Modulated Nonlinearities, *AIP Conference Proceeding for TFD32*, 32. *Uluslararası Fizik Kongresi* 6-9 Eylül 2016, Bodrum-Muğla. Doi: 10.1063/1.4976451