İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK VE YARI-HİPERBOLİK UZAYLARDA SONLU TİPTEN GENELLEŞTİRİLMİŞ GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLAR

DOKTORA TEZİ

Rüya ŞEN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

ŞUBAT 2016

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK VE YARI-HİPERBOLİK UZAYLARDA SONLU TİPTEN GENELLEŞTİRİLMİŞ GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLAR

DOKTORA TEZİ

Rüya ŞEN
(509112076)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Uğur DURSUN

ŞUBAT 2016

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509112076 numaralı Doktora Öğrencisi Rüya ŞEN, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "HİPERBOLİK VE YARI-HİPERBOLİK UZAYLARDA SONLU TİPTEN GENELLEŞTİRİLMİŞ GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLAR" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Uğur DURSUN** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Elif CANFES** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Füsun ZENGİN ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR ....
Uludağ Üniversitesi

Prof. Dr. Salim YÜCE ....
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 18 Ocak 2016
Savunma Tarihi : 12 Şubat 2016

Aileme,

ÖNSÖZ

Doktora çalışmasının her aşamasında beni her konuda destekleyen, akademik olarak gelişebilmem için hertürlü fedakarlığı gösteren, motive eden, öğreten çok değerli hocam Prof. Dr. Uğur Dursun'a tüm özverisi için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması boyunca her dönem kıymetli vakitlerini ayırarak beni dinleyen, tez ile ilgili öneriler sunan tez izleme komitesi üyeleri hocalarım Prof. Dr. Ertuğrul Özdamar ve Doç. Dr. Elif Özkara Canfes'e ilgilerinden dolayı teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca bana hep güvenen, destek veren, varlıklarıyla güç bulduğum annem Öznur Yeğin, babam Selahattin Yeğin ve abim Çağlar Yeğin'e tüm fedakarlıkları için minnetlerimi sunuyorum.

Çalışmalarımda beni hep pozitif yönde motive eden, güvenen ve destekleyen eşim Anıl Şen'e tüm katkılarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması "Tübitak 2211-A Genel Yurt içi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Tübitak'a desteğinden dolayı teşekkür ederim.

Şubat 2016

Rüya ŞEN
(Yüksek Matematikçi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER

$\tilde{g}$	: Çevreleyen uzayın metrik tensörü
g	: Alt manifoldun metrik tensörü
$\mathbf{H}_s^{\mathbf{m-1}}(-c)$	: $(m-1)$-boyutlu, s indeksli, $-c$ eğrilikli yarı-hiperbolik uzay
$\mathbf{S}_s^{\mathbf{m-1}}(c)$	: $(m-1)$-boyutlu, s indeksli, c eğrilikli yarı-küre
$\chi(\mathbf{M})$	: M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
$\mathbf{C}^\infty(\mathbf{M};\mathbf{R})$	: M'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı C^∞ sınıfından fonksiyonların uzayı
ind M	: M manifoldunun indeksi
div	: Diverjans
grad	: Gradiyent
Δ	: Laplas operatörü
$\mathbf{T_pM}$	: $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı
$\widetilde{\nabla}$	: Çevreleyen uzayın Riemann konneksiyonu
∇	: Alt manifoldun Riemann konneksiyonu
$\widetilde{\mathbf{R}}$	: Çevreleyen uzayın eğrilik tensörü
$\mathbf{R}$	: Alt uzayın uzayın eğrilik tensörü
$\mathbf{G}(\mathbf{n},\mathbf{m})$	: Grassmaniyen manifoldu
h	: İkinci esas form
S	: Skaler eğrilik
A	: Şekil operatörü
K	: Kesit eğriliği
D	: Normal konneksiyon
$\tilde{\nu}$	: Genelleştirilmiş Gauss Tasviri
Im h	: Birinci normal uzay

HİPERBOLİK VE YARI-HİPERBOLİK UZAYLARDA SONLU TİPTEN GENELLEŞTİRİLMİŞ GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLAR

ÖZET

Öklid uzaylarında sonlu tipten alt manifoldlar kavramı 1970'lerin sonlarında B.-Y. Chen tarafından verilmiştir. Öklid veya yarı-Öklid uzaylarında kompakt bir Riemann alt manifoldunun yer vektörü, alt manifold üzerinde metrik tarafından indirgenen Laplace operatörünün sonlu sayıda özvektörlerinin toplamı olarak yazılabiliyorsa, alt manifolda sonlu tipten bir alt manifold denir. Bu özvektörler, Laplace operatörünün k tane ayrık özdeğerine karşı geliyorsa alt manifolda k-tipinden bir alt manifold denir. Öklid ve yarı-Öklid uzaylarında sonlu tipten alt manifoldlarının sınıflandırılması ve karakterizasyonu ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Daha sonra, sonlu tipten alt manifold kavramı, kompakt manifoldlardan Öklid uzayı veya yarı-Öklid uzayı içine tanımlanan düzgün tasvirlere, özellikle alt manifoldların Gauss tasvirlerine genişletilmiştir ve sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldların sınıflandırılması ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

Küresel bir alt manifold aynı zamanda Öklid uzayının bir alt manifoldu olduğundan, küresel alt manifoldlar için Gauss tasviri, klasik Gauss tasvirinden farklı değildir ve Obata küresel alt manifoldların Gauss tasvirinde değişiklik yaparak genelleştirilmiş (küresel veya hiperbolik) Gauss tasvirini tanımlamıştır. $\mathbf{x} : M^n \to \widetilde{M}^m$, n-boyutlu yönlendirilebilir bir M^n Riemann manifoldundan, m-boyutlu bir $\widetilde{M}^m$ uzay formuna izometrik bir daldırma olmak üzere, M^n manifoldunun her p noktasını, $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M^n)$ manifolduna teğet olan $\widetilde{M}^m$ manifoldunun bir n-boyutlu tümden jeodezik uzayına götüren tasvire Obata anlamında genelleştirilmiş Gauss tasviri denir. $\widetilde{M}^m$ manifoldunun $\mathbb{S}^m(1)$ birim küresi (ya da $\mathbb{H}^m(-1)$ hiperbolik uzay) olması durumunda genelleştirilmiş Gauss tasvirine küresel Gauss (ya da hiperbolik Gauss) tasviri denir.

Son zamanlarda, sonlu tipten küresel (veya hiperbolik) Gauss tasvirine sahip küresel (veya hiperbolik) alt manifoldların bazı sınıflandırılması ve karakterizasyonu yapılmıştır.

Bu çalışmada, hiperbolik ve yarı-hiperbolik uzayların sonlu tipten genelleştirilmiş Gauss tasvirine sahip alt manifoldları incelenmiştir. İlk olarak, yarı-hiperbolik uzayların alt manifoldları için Obata anlamında genelleştirilmiş Gauss tasviri tanımlanmıştır. Ardından, hiperbolik ve yarı-hiperbolik uzaylarda sonlu tipten hiperbolik ve yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldların bazı karakterizasyonları verilmiş ve sınıflandırılması yapılmıştır.

Tezin birinci bölümünde, literatür araştırmasına yer verilmiştir. Bugüne kadar yapılmış olan çalışmalar ve içerikleri açıklanmıştır. Ayrıca, tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılan bazı temel tanımlar ve denklemler yarı-Riemann manifoldlarının yarı-Riemann alt manifoldları düşünülerek verilmiştir. n-boyutlu, t indeksli ve yönlendirilebilir bir M^n_t yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m_s$ yarı-Öklid uzayına tanımlanmış bir daldırma için klasik Gauss tasvirinden bahsedilmiştir.

Üçünde bölümde ise, ilk olarak Obata anlamında Gauss tasviri detaylı olarak açıklanmıştır. Obata anlamında Gauss tasviri kullanılarak hiperbolik ve yarı-hiperbolik Gauss tasvirleri tanımlanmıştır. Ayrıca, yarı-hiperbolik Gauss tasvirinin Laplace operatörü hesaplanmıştır. Son olarak, M^n_t yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m_s$ yarı-Öklid uzayı içine tanımlanmış sonlu tipten düzgün bir tasvir için minimal polinom kriteri verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, hiperbolik uzaylarda sonlu tipten hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar incelenmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır.

İlk kısımda, hiperbolik uzaylarda 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar için bir karakterizasyon verilmiştir. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik $\mathbb{H}^n(-1)$ hiperbolik uzayının 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip yegane minimal izoparametrik hiperyüzey olduğu gösterilmiştir. $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}^m_1$ hiperbolik uzayı içindeki bir yüzeyin 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}^m_1$ hiperbolik uzayı içinde spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar sınıflandırılmıştır.

İkinci kısmında ise, hiperbolik uzaylarda 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal hiperyüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde bir horohiperkürenin biharmonik Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bu bölümde, 3-boyutlu hiperbolik uzayın tümden ombilik olmayan, sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli 2-tipinde hiperbolik Gauss tasvirine sahip yüzeyleri sınıflandırılmıştır.

Son bölümde ise, yarı-hiperbolik uzaylarda sonlu tipten yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar incelenmiştir. Bu bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır.

İlk kısımda, $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$ yarı-hiperbolik uzayında 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yarı-Riemann alt manifoldlar için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. $\mathbb{H}^{m-1}_2(-1) \subset \mathbb{E}^m_3$ yarı-hiperbolik uzayı içinde maksimal yüzeyler için sınıflandırma yapılmıştır. Ayrıca, $\mathbb{H}^4_1(-1) \subset \mathbb{E}^5_2$ yarı-hiperbolik uzayı içinde ışıksal ortalama eğrilik vektörüne sahip uzaysal ve 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yüzeyler sınıflandırılmıştır. Bununla birlikte, $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$ yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu t indeksli, ışıksal olmayan ortalama eğrilik vektörüne sahip ve yönlendirilebilir bir M^n_t yarı-Riemann manifoldunun spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir.

İkinci kısımda ise, indeksi 1 ya da 2 olan yarı-hiperbolik uzaylarda 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal alt manifoldlar araştırılmıştır. $\mathbb{H}^{n+1}_1(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal, sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli bir hiperyüzeyin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. $\mathbb{H}^3_1(-1) \subset \mathbb{E}^4_2$ yarı-hiperbolik uzayın tümden ombilik olmayan, sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli, 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyleri sınıflandırılmıştır. Ayrıca, hiperbolik Veronese yüzeyinin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Son olarak, tamamen $\mathbb{H}_2^4(-1) \subset \mathbb{H}_2^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal maksimal, 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yegane yüzeyin hiperbolik Veronese yüzeyi olduğu ispatlanmıştır.

SUBMANIFOLDS OF HYPERBOLIC AND PSEUDO-HYPERBOLIC SPACES WITH FINITE TYPE GENERALIZED GAUSS MAP

SUMMARY

The notion of finite type submanifolds of a Euclidean space was introduced by B.-Y. Chen in late 1970's. Since then the finite type submanifolds of Euclidean spaces or pseudo-Euclidean spaces have been studied extensively, and many important results have been obtained. A Riemannian submanifold of a Euclidean space or pseudo-Euclidean space is said to be of finite type if its position vector can be written as a sum of finitely many eigenvectors of the Laplace operator. If these eigenvectors are corresponding to k distinct eigenvalues of the Laplace operator, then the submanifold is said to be of k-type.

For an isometric immersion $\mathbf{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{E}^m$ of a compact Riemannian manifold M^n into an Euclidean space $\mathbb{E}^m$, the constant vector $\mathbf{x_0}$ in the spectral decomposition is exactly the center of mass of M^n in $\mathbb{E}^m$, where $\mathbf{x_0}$ is the eigenfunction of the Laplacian with eigenvalue $\lambda_0 = 0$. A spherical finite type map $\mathbf{x}$ of a Riemannian manifold M^n into the unit sphere $\mathbb{S}^{m-1}(1)$ centered at the origin of $\mathbb{E}^m$ is called mass-symmetric if the vector $\mathbf{x_0}$ in its spectral decomposition is the center of $\mathbb{S}^{m-1}(1)$.

Finite type non-compact submanifolds of Euclidean spaces and pseudo-Euclidean spaces are studied by many researcher. When M^n is compact, the component $\mathbf{x_0}$ in the spectral decomposition is a constant vector. However, when M^n is non-compact the component $\mathbf{x_0}$ is not necessary a constant vector. If M^n is not compact, we can not make the spectral decomposition of a map on M^n in general. But, it is possible to define the notion of a map of finite type on a non-compact manifold.

Finite type submanifolds of Euclidean spaces and pseudo-Euclidean spaces have been studied by many geometers, and also many classifications and characterizations of finite type submanifolds have been obtained.

Later, the notion of finite type was extended to differentiable maps on compact manifolds, in particular to Gauss map of submanifolds. And many results have been obtained on the classification of submanifolds of Euclidean spaces and pseudo-Euclidean spaces with finite type Gauss map.

Since a spherical submanifold can be viewed as a submanifold of a Euclidean space the Gauss map of the spherical submanifold can be determined in the ordinary sense. For the Gauss map to reflect the properties of submanifolds in sphere instead of Euclidean space, Obata modified the definition of Gauss map appropriately as follows:

Let $\mathbf{x} : M^n \to \widetilde{M}^m$ be an oriented isometric immersion from a Riemannian n-manifold M^n into a space form $\widetilde{M}^m$ of constant curvature. The generalized Gauss map in the Obata's sense is a map which assigns to each $p \in M^n$ the totally geodesic n-space of $\widetilde{M}^m$ tangent to $\mathbf{x}(M^n)$ at $\mathbf{x}(p)$. In the case, $\widetilde{M}^m = \mathbb{S}^m(1)$ (or resp. $\widetilde{M}^m = \mathbb{H}^m(-1)$ the

hyperbolic space) the generalized Gauss map is also called the spherical Gauss map (or resp. the hyperbolic Gauss map).

Recently, spherical (or hyperbolic) submanifolds with finite type spherical (or hyperbolic) Gauss map have been characterized and classified in some papers. It is known that the geometric behavior of classical and spherical Gauss map are different. For example, the classical Gauss map of every compact Euclidean submanifold is mass-symmetric; but the spherical Gauss map of a spherical compact submanifold is not mass-symmetric in general.

In this thesis, submanifolds of hyperbolic spaces and pseudo-hyperbolic spaces with finite type generalized Gauss maps are studied. Firstly, the definition of pseudo-hyperbolic Gauss map of pseudo-hyperbolic submanifolds in the Obata's sense is given, and then characterization and classification of submanifolds of hyperbolic space and pseudo-hyperbolic space with finite type generalized Gauss map are obtained.

In the first chapter, it is mentioned about a review of literature. And then, results obtained this thesis are summarized.

In the second chapter, it is introduced some fundamental definitions and equations of pseudo-Riemannian submanifolds of pseudo-Riemannian manifolds. It is mentioned about the classical Gauss map from an oriented pseudo-Riemannian manifold into a pseudo-Euclidean space.

In the third chapter, firstly, by using the definition of generalized Gauss map in Obata's sense, the definition of hyperbolic Gauss map and pseudo-hyperbolic Gauss map are given. Laplacian of pseudo-hyperbolic Gauss map of the pseudo-Riemannian n-submanifold M^n_t with index t in a pseudo-hyperbolic $(m-1)$-space $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$ with index s is obtained. Then, the minimal polynomial criteria is given for a finite type differentiable map from the pseudo-Riemannian n-submanifold M^n_t with index t to $\mathbb{E}^m_s$ pseudo-Euclidean space.

In the fourth chapter, submanifolds of hyperbolic spaces with finite type hyperbolic Gauss map are investigated. This chapter contains two sections.

In the first section, the characterization and classification of submanifolds of hyperbolic space with 1-type hyperbolic Gauss map are obtained. It is concluded that a totally geodesic hyperbolic space $\mathbb{H}^n(-1)$ is the only minimal isoparametric hypersurface in $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ with 1-type hyperbolic Gauss map. Also, it is proved that an oriented surface M in $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}^m_1$ has 1-type hyperbolic Gauss map if and only if M is an open part of a totally geodesic hyperbolic 2-space $\mathbb{H}^2(-1)$ in $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$. Moreover, a classification theorem is given for a submanifold of $\mathbb{H}^m(-1) \subset \mathbb{E}^m_1$ with 1-type hyperbolic Gauss map such that its spectral decomposition contains a non-zero constant component.

In the second section, the necessary and sufficient condition for hypersurfaces with non-zero constant mean curvature of hyperbolic space having 2-type hyperbolic Gauss map is obtained. A horohypersphere in $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ is introduced and then, it is showed that the horohypersphere in $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ has biharmonic hyperbolic Gauss map. It is also obtained that the standard product $\mathbb{H}^k(-\frac{1}{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\frac{1}{r^2})$ in $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ is the only isoparametric hypersurface in $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ with 2-type hyperbolic Gauss map. Finally, it is proved that a non-totally umbilical surface with non-zero constant mean curvature in $\mathbb{H}^3(-1) \subset \mathbb{E}^4_1$ has 2-type hyperbolic Gauss map if and only if it is an open portion of the product surface $\mathbb{S}^1(a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2})$ in $\mathbb{H}^3(-1)$.

In the last chapter, the pseudo-Riemannian submanifolds of pseudo-hyperbolic spaces with finite type pseudo-hyperbolic Gauss map are studied. It contains two sections.

In the first section, a characterization of pseudo-Riemannian submanifold of a pseudo-hyperbolic space $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1)$ with 1-type pseudo-hyperbolic Gauss map is obtained. It is given some examples of surfaces in $\mathbb{H}^3_1(-1) \subset \mathbb{E}^4_2$ and in $\mathbb{H}^4_1(-1) \subset \mathbb{E}^5_2$ such that they have finite type pseudo-hyperbolic Gauss map. Then, the classification of maximal surfaces in $\mathbb{H}^{m-1}_2(-1) \subset \mathbb{E}^m_3$ with 1-type pseudo-hyperbolic Gauss map is obtained. A classification theorem on space-like oriented surfaces in the anti-de Sitter 4-space with null mean curvature vector and 1-type pseudo-hyperbolic Gauss map is given. Finally, pseudo-Riemannian submanifolds in $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$ with 1-type pseudo-hyperbolic Gauss map having non-zero constant component in its spectral decomposition are classified.

In the second section, a characterization of space-like hypersurfaces with 2-type pseudo-hyperbolic Gauss map lying in $\mathbb{H}^{m-1}_1(-1) \subset \mathbb{E}^m_2$ is obtained. It is proved that a non-totally umbilical, space-like, oriented hypersurface M^n with non-zero constant mean curvature in $\mathbb{H}^{n+1}_1(-1) \subset \mathbb{E}^{n+2}_2$ has 2-type pseudo-hyperbolic Gauss map if and only if it has constant scalar curvature. A classification is obtained for space-like oriented surfaces with constant mean curvature in $\mathbb{H}^3_1(-1) \subset \mathbb{E}^4_2$ having 2-type pseudo-hyperbolic Gauss map. Moreover, it is proved that hyperbolic Veronese surface in $\mathbb{H}^4_2(-1)$ is the only maximal surface fully lying in $\mathbb{H}^4_2(-1) \subset \mathbb{H}^{m-1}_2(-1)$, $m \geq 5$ with 2-type pseudo-hyperbolic Gauss map. Finally, it is concluded that there is no minimal space-like surface lying fully in $\mathbb{H}^4(-1) \subset \mathbb{E}^5_1$ with 2-type hyperbolic Gauss map and there is no maximal space-like surface lying fully in $\mathbb{H}^4_1(-1) \subset \mathbb{E}^5_2$ with 2-type pseudo-hyperbolic Gauss map.

1. GİRİŞ

Öklid uzaylarında sonlu tipten alt manifold kavramı 1970'lerin sonlarında B.-Y. Chen tarafından verilmiştir. Birçok matematikçi sonlu tipten alt manifoldlar konusuna ilgi duymuş ve bu konu üzerine çalışmıştır. B.-Y. Chen, 1984 yılında bu konuyla ilgili yapmış olduğu çalışmaları içeren bir kitap yazmıştır, [1]. 1996 yılına kadar bu alanda yapılmış olan çalışmalar yine B.-Y. Chen tarafından derlenerek bir rapor halinde yayınlanmıştır, [2].

Chen, Morvan ve Nore, sonlu tipten kavramını Öklid uzayının alt manifoldları üzerinde tanımlı düzgün tasvirlere genişletmiştir ve özellikle sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar için bazı topolojik özellikler elde etmişlerdir, [3].

1987 yılında ise Chen ve Piccinni, Öklid uzayının sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlarını çalışmıştır. $\phi : M^n \to \mathbb{E}^m$, n-boyutlu bir M^n Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayına tanımlanmış düzgün bir tasvir olsun. c sabit bir vektör, $\phi_1, \ldots, \phi_k$'ler $\mathbb{E}^m$-değerli tasvirler, Δ Riemann metriği tarafından indirgenmiş Laplace operatörü ve $\Delta\phi_i = \lambda_{p_i}\phi_i$, $\lambda_{p_i} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, ϕ tasviri

$$\phi = c + \phi_1 + \cdots + \phi_k \tag{1.1}$$

olacak şekilde sonlu spektral açılıma sahip ise ϕ tasvirine sonlu tipten bir tasvir denir. $\lambda_{p_1}, \ldots, \lambda_{p_k}$ özdeğerlerinin hepsi birbirinden farklı ise ϕ tasvirine k-tipinden bir tasvir denir. ϕ tasviri özel olarak bir daldırma alınırsa, M^n manifoldu sonlu tipten bir alt manifold olur. Kompakt bir M^n manifoldu için spektral açılımdaki sabit c vektörü manifoldun kütle merkezidir. Ayrıca, bu çalışmada, Chen ve Piccinni tarafından $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayında sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar sınıflandırılmış ve bazı uygulamalar verilmiştir, [4].

$\mathbb{S}^{m-1}(1)$, merkezi orijinde olan bir birim hiperküre ve $\mathbf{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}(1) \subset \mathbb{E}^m$ kompakt M^n manifoldundan $\mathbb{S}^{m-1}(1)$ birim küresine tanımlanmış küresel sonlu tipten izometrik bir daldırma olsun. $\mathbf{x}$ tasvirinin spektral açılımındaki c vektörü $\mathbb{S}^{m-1}(1)$ hiperküresinin merkezi ise, yani c sıfır ise, $\mathbf{x}$ tasvirine kütlesel simetrik bir tasvir denir.

Daha sonra, B.-Y. Chen, Öklid uzayının kompakt olmayan alt manifoldları üzerinde sonlu tipten kavramını çalışmıştır. $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayının kompakt olmayan M^n alt manifoldu üzerindeki bir tasvir için genel olarak spektral açılım yapılamamaktadır. Ancak, kompakt olmayan bu manifoldlar üzerinde tanımlı tasvirler için sonlu tipten kavramını benzer şekilde tanımlamak mümkündür, [2]. Kompakt olmayan bir manifold üzerinde Laplace operatörünün $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık gelen tasvir, sabit olmayan bir tasvir de olabilmektedir.

Sonlu tipten alt manifold ve tasvir kavramları yarı-Öklid uzayları içinde tanımlanmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir, [1, 5, 6].

Günümüze kadar, Gauss tasviri geometriciler tarafından üzerinde yoğun olarak çalışılan bir tasvir olmuştur. Literatürde, Gauss tasvirinin farklı uzaylarda ya da farklı biçimlerde ifade edildiği görülmektedir, [4, 7–9].

Küresel alt manifoldlar aynı zamanda Öklid uzayının alt manifoldu olduğundan, küresel alt manifoldların Gauss tasviri, klasik Gauss tasvirinden farklı değildir. Bu yüzden, Gauss tasviri kürenin özellikleri yerine Öklid uzayının özelliklerini yansıtmaktadır. Bundan dolayı, Obata küresel alt manifoldların Gauss tasvirini aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir, [7].

$\mathbf{x} : M^n \to \widetilde{M}^m$, n-boyutlu yönlendirilebilir bir M^n Riemann manifoldundan, m-boyutlu bir $\widetilde{M}^m$ uzay formuna izometrik bir daldırma olmak üzere, M^n manifoldunun her p noktasını, $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M^n)$ manifolduna teğet olan $\widetilde{M}^m$ manifoldunun bir n-boyutlu tümden jeodezik uzayına götüren tasvire Obata anlamında genelleştirilmiş Gauss tasviri denir. $\widetilde{M}^m$ manifoldunun $\mathbb{S}^m(1)$ birim küresi (ya da $\mathbb{H}^m(-1)$ hiperbolik uzay) olması durumunda genelleştirilmiş Gauss tasvirine küresel Gauss (ya da hiperbolik Gauss) tasviri denir.

T. Ishihara, yarı-Riemann uzaylarının alt manifoldları için Gauss tasvirinin bir genelleştirilmesini yapmıştır ve özel durumda bu genelleştirme, Obata anlamında Gauss tasvirini vermektedir, [8].

2004 yılında Kim ve Yoon, $\mathbb{E}^m_s$ yarı-Öklid uzayının alt manifoldları için klasik Gauss tasviri tanımını vermiştir, [9].

2007 yılında ise Chen ve Lue, sonlu tipten küresel Gauss tasvirine sahip küresel alt manifoldlara çalışmışlardır, [10]. Gauss tasviri ile küresel Gauss tasvirinin geometrik davranışlarının birbirinden farklı olduğu bilinmektedir. Örneğin, Öklid uzayının her kompakt alt manifoldunun Gauss tasviri kütlesel simetrik iken, küresel kompakt alt manifoldların küresel Gauss tasviri genel olarak kütlesel simetrik değildir. Aynı makalede, Chen ve Lue küresel Gauss tasvirine sahip küresel alt manifoldlar için bazı sınıflandırma teoremleri vermiştir. Veronese yüzeyi ve eşit yüzlü minimal torus yüzeyinin $\mathbb{S}^{m-1}(1)$ birim küresi içinde 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip yegane yüzeyler olduğunu ispatlamışlardır.

Bektaş ve Dursun, $\mathbb{S}^{m-1}(1)$ birim küresi içinde kütlesel simetrik olmayan 1-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar için sınıflandırma teoremi vermiştir. Ayrıca, $\mathbb{S}^3(1)$ birim küresi içinde sabit ortalama eğrilikli kütlesel simetrik 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip yüzeyleri sınıflandırmışlardır, [11].

Hiperbolik, yarı-hiperbolik ve yarı-küresel uzayların sonlu tipten alt manifoldları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır, [2, 6, 12]. Dursun, tarafından hiperbolik uzaylarda 1-tipinden Gauss tasvirine sahip hiperyüzeyler çalışılmıştır. Ayrıca, bu çalışmada $\mathbb{E}^m_1$ Lorentz-Minkowski uzayına daldırılan bir hiperbolik uzayın, en fazla iki asal eğriliğe ve 1-tipinden Gauss tasvirine sahip hiperyüzeyleri için sınıflandırma teoremi verilmiştir, [13].

Bu tez çalışmasında, hiperbolik ve yarı-hiperbolik uzayların sonlu tipten genelleştirilmiş Gauss tasvirine sahip alt manifoldları incelenmiştir. Tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılan bazı temel kavramlar ve yarı-Riemann alt manifoldları için alt manifoldlar teorisindeki temel denklemler verilmiştir. Ayrıca, yarı-Öklid uzayının yönlendirilebilir yarı-Riemann alt manifoldlarında klasik Gauss tasviri tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde, ilk olarak Obata anlamında Gauss tasvirinden detaylı olarak bahsedilmiştir. Obata anlamında Gauss tasviri kullanılarak tez çalışmasında üzerinde çalıştığımız genelleştirilmiş Gauss tasviri, yani, hiperbolik ve yarı-hiperbolik Gauss tasviri tanımı verilmiştir ve bu tasvirin Laplace operatörü hesaplanmıştır. Hiperbolik Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. Son olarak, M^n_t yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m_s$ yarı-Öklid uzayına tanımlanmış sonlu tipten düzgün tasvirler için minimal polinom kriteri verilmiştir.

Tez çalışmasının dördüncü bölümünde ise, hiperbolik uzaylarda sonlu tipten hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar çalışılmıştır, [14]. Bu bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır.

İlk kısımda öncelikle, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayı içinde 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik $\mathbb{H}^n(-1)$ hiperbolik uzayının 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip yegane minimal izoparametrik hiperyüzey olduğu gösterilmiştir. $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayı içinde yönlendirilebilir bir M yüzeyinin 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ içinde kalan tümden jeodezik $\mathbb{H}^2(-1)$ hiperbolik uzayının açık bir parçası olması gerektiği ispatlanmıştır. Son olarak, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayı içinde spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar sınıflandırılmıştır.

İkinci kısımda ise, hiperbolik uzaylarda 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip hiperyüzeyler araştırılmıştır. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğrilikli, tümden ombilik olmayan bir hiperyüzeyin 2-tipinden olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde bir horohiperkürenin tanımı verilmiştir ve $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde bir horohiperkürenin biharmonik Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Son olarak bu bölümde, 3-boyutlu hiperbolik uzayın tümden ombilik olmayan sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli 2-tipinde hiperbolik Gauss tasvirine sahip yüzeyleri sınıflandırılmıştır.

Beşinci bölümde, yarı-hiperbolik uzaylarda sonlu tipten yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar incelenmiştir. Bu bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır.

İlk kısımda, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayında bir yarı-Riemann alt manifoldunun 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. $\mathbb{H}_1^3(-1)$ ve $\mathbb{H}_1^4(-1)$ yarı-hiperbolik uzaylarında sonlu tipten yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yüzey örnekleri verilmiştir. $\mathbb{H}_2^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_3^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde maksimal yüzeyler için sınıflandırma yapılmıştır. Ayrıca, $\mathbb{H}_1^4(-1) \subset \mathbb{E}_2^5$ yarı-hiperbolik uzayı içinde ışıksal ortalama eğrilik vektörüne sahip uzaysal ve 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yüzeyler sınıflandırılmıştır. Son olarak, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde spektral açılımında sabit vektörü olan ve 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yarı-Riemann alt manifoldları sınıflandırılmıştır.

İkinci kısımda ise, indeksi 1 ya da 2 olan yarı-hiperbolik uzaylarda 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal alt manifoldlar incelenmiştir. $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal, sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli bir hiperyüzeyin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için bir karakterizasyon teoremi verilmiştir. $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ yarı-hiperbolik uzayında tümden ombilik olmayan, sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyler sınıflandırılmıştır. Ardından, Hiperbolik Veronese yüzeyinin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, tamamen $\mathbb{H}_2^4(-1) \subset \mathbb{H}_2^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal maksimal, 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yegane yüzeyin hiperbolik Veronese yüzeyi olduğu ispatlanmıştır. Son olarak, bu teoremden iki önemli sonuç elde edilmiştir.

Altıncı bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan bazı temel kavramlar ve teoremlerden bahsedilmiştir. Tez çalışmasının genelinde yarı-Riemann manifoldlarının uzaysal alt manifoldları üzerine çalışılmıştır. Dolayısıyla bu bölümde, yarı-Riemann manifoldlarının yarı-Riemann alt manifoldları düşünülerek gerekli kavramlar verilmiştir. Bu kavramlar, Riemann manifoldlarının alt manifoldlarına kolayca indirgenebilir. Ayrıca, bu bölümde yarı-Öklid uzayının yarı-Riemann alt manifoldlarının klasik Gauss tasvirinden bahsedilmiştir.

2.1 Yarı-Riemann Manifoldlarının Alt Manifoldları

Bu kısımda, temel tanımlar ve yarı-Riemann manifoldlarının alt manifoldları için temel denklemler verilmiştir.

Tanım 2.1. *V reel bir vektör uzayı olsun. $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için*

(i) $B(u,v) = B(v,u)$

(ii) $B(au+bv,w) = aB(u,w)+bB(v,w)$
$B(u,av+bw) = aB(u,v)+bB(u,w)$

özelliklerine sahip ise B dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik iki-lineer form denir.

Tanım 2.2. *B, V reel vektör uzayı üzerinde simetrik iki-lineer bir form olsun.*

(i) $\forall v \in V$ *ve* $v \neq 0$ *için* $B(v,v) > 0$ *ise B simetrik iki-lineer formuna pozitif tanımlı,*

(ii) $\forall v \in V$ *ve* $v \neq 0$ *için* $B(v,v) < 0$ *ise B simetrik iki-lineer formuna negatif tanımlı,*

(iii) $\forall v \in V$ *ve* $v \neq 0$ *için* $B(v,v) \geq 0$ *ise B simetrik iki-lineer formuna pozitif yarı tanımlı,*

(iv) $\forall v \in V$ *ve* $v \neq 0$ *için* $B(v,v) \leq 0$ *ise* B *simetrik iki-lineer formuna negatif yarı tanımlı,*

(v) $\forall w \in V$ *için* $B(v,w) = 0$ *iken* $v = 0$ *ise* B *simetrik iki-lineer formuna dejenere olmayan, aksi durumda dejenere iki-lineer form denir.*

Tanım 2.3. *V reel bir vektör uzayı ve $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, simetrik iki-lineer bir form olsun. B iki-lineer formunun, negatif tanımlı olacak şekilde, en büyük boyutlu bir $W \subset V$ alt uzayının boyutuna, B formunun indeksi denir.*

Tanım 2.4. *V reel bir vektör uzayı olmak üzere, V üzerinde tanımlı dejenere olmayan simetrik iki-lineer forma, V reel vektör uzayı üzerinde skaler bir çarpım denir. Ayrıca, V üzerinde pozitif tanımlı bir skaler çarpıma iç çarpım denir. V vektör uzayı üzerinde g skaler bir çarpım ise (V,g) ikilisine skalar çarpımlı vektör uzayı denir.*

Tanım 2.5. *Skaler çarpımlı bir $(V,\ g)$ reel vektör uzayı üzerinde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal baz vektörleri için $g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$, $\varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$ sağlanır ve $\forall v \in V$ vektörü*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i \tag{2.1}$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir. Burada, δ_{ij} Kronecker deltasını göstermektedir.

Tanım 2.6. *M^n, diferansiyellenebilir bir manifold olsun. M^n manifoldu üzerindeki bir p noktasının tanjant uzayı T_pM^n olmak üzere,*

$$g : T_pM^n \times T_pM^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_p, y_p) \longrightarrow g(x_p, y_p)$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, dejenere olmayan, simetrik (0,2) tensörüne M^n manifoldu üzerinde bir indefinite metrik tensörü denir.

Tanım 2.7. *M^n, diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere, M^n manifoldu bir g indefinite metrik tensörüne sahip ise M^n manifolduna yarı-Riemann manifoldu denir. Bir M^n yarı-Riemann manifoldunun g metrik tensörünün indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir ve $t = \operatorname{ind} M^n$ olmak üzere yarı-Riemann manifoldu M_t^n ile gösterilir.*

İndeks t olmak üzere $0 \leq t \leq \dim M^n$ gerçeklenir. Özel olarak, t indeksi sıfır alınırsa $\forall p \in M^n$ için g, T_pM^n üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan M^n Riemann manifoldu olur. $t = 1$ ve $\dim M^n = n \geq 2$ ise M_1^n manifolduna bir Lorentz manifoldu denir.

Tanım 2.8. *M_t^n, diferensiyellenebilir bir yarı-Riemann manifoldu ve M_t^n üzerindeki C^∞ vektör alanlarının kümesi $\chi(M_t^n)$ olmak üzere*

$$\nabla : \chi(M_t^n) \times \chi(M_t^n) \longrightarrow \chi(M_t^n)$$
$$(X,Y) \longrightarrow \nabla_X(Y)$$

dönüşümü, $\forall f,g \in C^\infty(M_t^n, \mathbb{R})$ ve $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M_t^n)$ için

(i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(ii) $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özelliklerini sağlıyorsa ∇'ya M_t^n üzerinde bir afin konneksiyon ve $\nabla_X Y$ de Y'nin X doğrultusundaki kovaryant türevi denir.

M_t^n yarı-Riemann manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M_t^n)$ için

(iv) $[Y,Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y$ ve

(v) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

koşullarını da sağlıyor ise, ∇ afin konneksiyonuna Levi-Civita konneksiyonu denir. Bu konneksiyon yarı-Riemann manifoldu üzerinde tek türlü belirlenir.

Tanım 2.9. *Levi-Civita konneksiyonu ∇ olan bir yarı-Riemann manifoldu M_t^n olsun. $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M_t^n)$ için*

$$R : \chi(M_t^n) \times \chi(M_t^n) \times \chi(M_t^n) \longrightarrow \chi(M_t^n)$$

$$(X,Y,Z) \longrightarrow R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlı $(1,3)$ tipindeki R tensörüne M_t^n yarı-Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü denir.

$\phi : M_t^n \longrightarrow \widetilde{M}_s^m$ n-boyutlu t indeksli bir M_t^n yarı-Riemann manifoldundan m-boyutlu s indeksli bir $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifolduna izometrik bir daldırma olsun. X, Y, M_t^n yarı-Riemann manifoldu üzerinde teğet vektör alanları ve ξ, M_t^n yarı-Riemann manifoldu üzerinde normal vektör alanı olmak üzere, M_t^n yarı-Riemann manifoldunun Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.2}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{2.3}$$

şeklindedir. Burada, ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla, M_t^n ve $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonlarını göstermektedir. Ayrıca, A_ξ, M_t^n yarı-Riemann manifoldunun ξ doğrultusundaki şekil operatörü ve D ise M_t^n yarı-Riemann manifoldunun normal konneksiyonudur.

M_t^n yarı-Riemann manifoldunun herhangi bir X teğet vektörü için $D_X \xi = 0$ gerçekleniyorsa, ξ normal vektör alanına paralel vektör alanı denir.

M_t^n manifoldunun herhangi X,Y,Z,W teğet vektör alanları için Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri, sırasıyla,

$$\widetilde{R}(X,Y;Z,W) = R(X,Y;Z,W) + g(h(X,Z),h(Y,W)) - \tilde{g}(h(X,W),h(Y,Z)), \tag{2.4}$$

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z), \tag{2.5}$$

ve

$$R^D(X,Y;\xi,\eta) = \widetilde{R}(X,Y;\xi,\eta) + g(\left[A_\xi, A_\eta\right] X, Y) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, g ve $\tilde{g}$, sırasıyla, M_t^n ve $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldlarının metrik tensörlerini göstermektedir. Ayrıca, $R(X,Y;Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$,

$$\left[A_\xi, A_\eta\right] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$$

ve ikinci temel formun kovaryant türevi $\bar{\nabla} h$

$$\bar{\nabla}_X h(Y,Z) = D_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,\ Z) - h(Y,\ \nabla_X Z) \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlanır. $\bar{\nabla} h = 0$ ise M_t^n yarı-Riemann manifolduna paralel bir alt manifold denir.

R ve $\widetilde{R}$, sırasıyla, M_t^n ve $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldlarının Riemann eğrilik tensörlerini, R^D ise D normal konneksiyonu ile tanımlanan eğrilik tensörünü göstermektedir ve

$$R^D(X,Y)\xi = D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X,Y]}\xi \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır.

Çevreleyen uzayın sabit c eğrilikli olması durumunda (2.4), (2.5) ve (2.6) denklemleri

$$\begin{aligned} R(X,Y;Z,W) =& c\,(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)) \\ &+ \tilde{g}(h(X,W),h(Y,Z)) - \tilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)), \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z) \tag{2.10}$$

ve

$$R^D(X,Y;\xi,\eta) = g(\left[A_\xi, A_\eta\right] X, Y) \tag{2.11}$$

haline indirgenir.

Tanım 2.10. *M_t^n bir yarı-Riemann manifoldu ve $p \in M_t^n$ olsun. p noktasında $T_pM_t^n$ teğet uzayındaki 2-boyutlu her Π düzlemi için $K_p(\Pi)$ kesitsel eğriliği*

$$K_p(\Pi) = -\frac{g(R(X,Y)X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, X_p, Y_p vektörleri p noktasında Π düzlemine ait lineer bağımsız vektörlerdir. Ayrıca, $K_p(\Pi)$ kesitsel eğriliği seçilen X_p, Y_p vektörlerinden bağımsızdır. Eğer, M_t^n yarı-Riemann manifolduna ait bütün p noktalarında ve $T_pM_t^n$ teğet uzayı içindeki bütün Π, 2-düzlemleri için $K_p(\Pi)$ sabit ise, M_t^n'ye sabit kesitsel eğrilikli uzay denir. $K_p(\Pi)$ sabiti sıfır ise M_t^n yarı-Riemann manifolduna düz manifold denir. M_t^n yarı-Riemann manifoldunun düz olması için gerek ve yeter koşul her noktadaki R eğrilik tensörünün sıfır olmasıdır.

Tanım 2.11. *$e_1, \ldots, e_n$ vektör alanları n-boyutlu M_t^n yarı-Riemann manifoldu üzerinde ortonormal bir baz alanı olsun. M_t^n yarı-Riemann manifoldu üzerinde*

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle R(e_i,X)Y, e_i \rangle \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanan $(0,2)$ tipinden tensöre, Ricci tensörü denir.

Tanım 2.12. *$e_1,\ldots,e_n$ vektör alanları, M_t^n yarı-Riemann manifoldu üzerinde ortonormal bir baz olmak üzere*

$$S = \sum_{i<j} K(e_i, e_j) \tag{2.14}$$

fonksiyonuna M_t^n yarı-Riemann manifoldunun skaler eğriliği denir. M_t^n yarı-Riemann manifoldu üzerinde S skaler eğriliği sabit ise, M_t^n yarı-Riemann manifolduna sabit eğrilikli manifold denir.

Tanım 2.13. *Sabit eğrilikli, basit bağlantılı, tam olan bir yarı-Riemann manifolduna indefinit uzay formu denir.*

$0 \leq s < m$ olmak üzere $\mathbb{E}_s^m$ ile metrik tensörü

$$\widetilde{g} = \langle , \rangle = \sum_{i=1}^{m-s} d{x_j}^2 - \sum_{j=m-s+1}^{m} d{x_j}^2 \tag{2.15}$$

şeklinde verilen m-boyutlu, s indeksli bir yarı-Öklid uzayı gösterilir. Burada $(x_1,\ldots,x_m)$, $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayının kartezyen koordinat sistemidir. $s=0$ olması durumunda $\mathbb{E}_0^m = \mathbb{E}^m$ bir Öklid uzayıdır. $s=1$ olması durumunda ise $\mathbb{E}_1^m$ yarı-Öklid uzayına, m-boyutlu Minkowski uzayı denir. Tez çalışmasında, $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayının yarı-Riemann alt manifoldları üzerine, $\widetilde{g} = \langle , \rangle$ metriği tarafından indirgenen g metriği için de $\langle , \rangle$ notasyonu kullanılmaktadır.

$\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayında $\mathbb{S}_s^{m-1}(x_0,c)$ yarı-küresi ve $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(x_0,-c)$ yarı-hiperbolik uzayı, sırasıyla,

$$\mathbb{S}_s^{m-1}(x_0,c) = \{x = (x_1,x_2,\ldots,x_m) \in \mathbb{E}_s^m | \langle x-x_0, x-x_0 \rangle = \frac{1}{c}\} \tag{2.16}$$

ve

$$\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(x_0,-c) = \{x = (x_1,x_2,\ldots,x_m) \in \mathbb{E}_s^m | \langle x-x_0, x-x_0 \rangle = -\frac{1}{c}\} \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, c pozitif reel bir sayı ve $x_0 \in \mathbb{E}_s^m$ ise ilgili uzayların merkezidir. $\mathbb{S}_s^{m-1}(x_0,c)$ ve $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(x_0,-c)$, sırasıyla, c ve $-c$ eğrlikli, tam olan yarı-Riemann manifoldlarıdır. $x_1 > 0$ olmak üzere $\mathbb{H}_0^{m-1}(x_0,-c) = \mathbb{H}^{m-1}(x_0,-c)$, merkezi x_0 olan hiperbolik uzayıdır. Notasyonu kısaltmak adına x_0 merkezi orijin olan bu yarı-Riemann manifoldları, sırasıyla, $\mathbb{S}_s^{m-1}(c)$ ve $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(-c)$ şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, $\mathbb{E}_s^m$, $\mathbb{S}_s^{m-1}(c)$ ve $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(-c)$ yarı-Riemann manifoldlarına indefinit uzay formları denir. Özel olarak, genel görelilik kuramında $\mathbb{E}_1^m$, $\mathbb{S}_1^{m-1}(c)$ ve $\mathbb{H}_1^{m-1}(-c)$ uzayları sırasıyla, Minkowski, de Sitter ve anti-de Sitter uzayları olarak adlandırılır.

$n < m$ ve $0 \leq t \leq s$ olmak üzere,

$$\mathbb{S}_t^n(c) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0, x_{s+1}, \ldots, x_{n+1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}_s^m(c)\}$$

şeklinde tanımlanan sabit c eğrilikli, t indeksli bu uzay, $\mathbb{S}_s^m(c)$ yarı-küresinin tümden jeodezik bir yarı-Riemann alt manifoldudur. Tümden jeodezik bu alt manifolda, $\mathbb{S}_s^m(c)$ yarı-küresinin n-boyutlu bir yarı alt küresi denir. Benzer şekilde,

$$\mathbb{H}_t^n(-c) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0, x_{s+1}, \ldots, x_{n+1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{H}_s^m(-c)\}$$

şeklinde tanımlanan sabit $-c$ eğrilikli, t indeksli bu uzay, $\mathbb{H}_s^m(-c)$ yarı-hiperbolik uzayının tümden jeodezik bir yarı-Riemann alt manifolddur. Bu manifolda da $\mathbb{H}_s^m(-c)$ yarı-hiperbolik uzayının n-boyutlu yarı-hiperbolik bir alt uzayı denir.

M_t^n, m-boyutlu s indeksli bir $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldunun, n-boyutlu, t indeksli bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. g metrik tensörü de $\widetilde{M}_s^m$ üzerindeki $\widetilde{g}$ metrik tensörünün, M_t^n alt manifolduna indirgenmesiyle elde edilen metrik tensörü, yani $g = \widetilde{g}|_{M_t^n}$ olsun. Ayrıca, g metrik tensörünün indeksinin M_t^n üzerindeki her noktada t olduğu kabul edilsin. $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}, \ldots, e_m$ vektöleri M_t^n yarı-Riemann alt manifoldu üzerinde tanımlı ortonormal bir baz alanı ve $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ bu vektörlerin işaretleri olsun. Öyle ki $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektör alanları M_t^n yarı-Riemann manifolduna teğet ve $e_{n+1}, \ldots, e_m$ ise $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldu içinde M_t^n alt manifolduna normal olsunlar. Bu $e_1, \ldots, e_n$ vektörlerine karşı gelen dual baz alanı $\omega_1, \ldots, \omega_n$ ile gösterilsin. Bundan sonraki kısımda kullanılan indislerin aralıkları aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$1 \leq A, B, C, \ldots, \leq m; \quad 1 \leq i, j, k, \ldots, \leq n; \quad n+1 \leq r, s, t, \ldots, \leq m.$$

Seçilen baz takımına göre $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldunun bir M_t^n yarı-Riemann alt manifoldu için Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_{e_k} e_i = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_{ij}(e_k) e_j + \sum_{r=n+1}^{m} \varepsilon_r h_{ik}^r e_r \tag{2.18}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_{e_k} e_s = -\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j h_{jk}^s e_j + \sum_{r=n+1}^{m} \varepsilon_r \omega_{sr}(e_k) e_r \tag{2.19}$$

şeklinde yazılır. Burada, $\widetilde{\nabla}$ ile $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu, h_{ik}^r ile ikinci esas formunun bileşenleri ve ω_{sr} ile normal konneksiyon formlarının bileşenleri gösterilmiştir. Ayrıca, ω_{AB} konneksiyon formları,

$$\omega_{AB}(X) = \langle \widetilde{\nabla}_X e_A, e_B \rangle \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanır ve $\omega_{AB} + \omega_{BA} = 0$ eşitliğini sağlar. Buna ek olarak, M_t^n alt manifoldunun H ortalama eğrilik vektörü ve $\|h\|^2$ ikinci esas formun normunun karesi, sırasıyla,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{r=n+1}^{m} \varepsilon_r \mathrm{tr} A_r e_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m} \varepsilon_i \varepsilon_r h_{ii}^r e_r \tag{2.21}$$

ve

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_r h_{ij}^r h_{ji}^r \tag{2.22}$$

şeklinde tanımlanır.

Çevreleyen uzayın sabit eğrilikli olması durumunda, M_t^n alt manifoldunun $e_1, \ldots, e_m$ bazına göre Codazzi ve Ricci denklemleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} h_{ij;k}^r &= h_{ik;j}^r \\ h_{ij;k}^r &= e_k(h_{ij}^r) - \sum_{\ell=1}^{n} \varepsilon_\ell (h_{i\ell}^r \omega_{j\ell}(e_k) + h_{j\ell}^r \omega_{i\ell}(e_k)) + \sum_{s=n+1}^{m} \varepsilon_s h_{ij}^s \omega_{sr}(e_k) \end{aligned} \tag{2.23}$$

ve

$$R^D(e_j, e_k; e_r, e_s) = \langle [A_r, A_s] e_j, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (h_{ki}^r h_{ij}^s - h_{ji}^r h_{ik}^s) \tag{2.24}$$

olarak verilir. Çevreleyen $\widetilde{M}_s^m$ uzayı yerine özel olarak $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayı alınırsa, M_t^n alt manifoldunun $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayı içindeki skaler eğriliği,

$$S = n^2 |H|^2 - \|h\|^2 \tag{2.25}$$

şeklinde bulunur. Burada, $|H|$ ve $\|h\|^2$, sırasıyla, M_t^n alt manifoldunun $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayındaki H ortalama eğrilik vektörünün uzunluğu ve h ikinci esas formunun uzunluğunun karesidir.

Çevreleyen uzayın $\mathbb{H}_s^{m-1}(-c)$ olması durumunda ise M_t^n yarı-Riemann alt manifoldunun $\mathbb{H}_s^{m-1}(-c)$ yarı-hiperbolik uzayı içindeki skaler eğriliği

$$S = -cn(n-1) + n^2 \left|\hat{H}\right|^2 - \|\hat{h}\|^2 \tag{2.26}$$

şeklinde olur. Burada, $\left|\hat{H}\right|$ ve $\|\hat{h}\|^2$, sırasıyla, M_t^n yarı-Riemann manifoldunun $\mathbb{H}_s^{m-1}(-c)$ yarı-hiperbolik uzayı içindeki $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörünün uzunluğu ve $\hat{h}$ ikinci esas formunun uzunluğunun karesidir.

Diğer taraftan, $\mathbb{H}_{s-1}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_s^m$ yarı-hiperbolik uzayının M_t^n alt manifoldu için

$$H = \hat{H} + \mathbf{x}, \qquad h(X,Y) = \hat{h}(X,Y) + \langle X,Y \rangle \mathbf{x} \tag{2.27}$$

ilişkiler sağlanır.

$\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayına ait bir v vektörüne, eğer $v = 0$ veya $\langle v,v \rangle > 0$ ise uzaysal, $\langle v,v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise ışıksal, $\langle v,v \rangle < 0$ ise zamansal vektör denir.

$\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayının $\mathscr{LC}$ ışık konisi

$$\mathscr{LC} = \{v \in \mathbb{E}_s^m : \langle v,v \rangle = 0\} \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.14. *M_t^n yarı-Riemann manifoldu ve $f \in C^\infty(M_t^n;\mathbb{R})$ olsun. f fonksiyonunun Laplace operatörü*

$$\Delta f = -\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörleri M_t^n yarı-Riemann manifoldunun ortonormal bir baz alanına göre f fonksiyonunun Laplace operatörü

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (e_i e_i(f) - \nabla_{e_i} e_i(f)) \tag{2.30}$$

şeklinde yazılır.

$\widetilde{M}_s^{n+1}$ yarı-Riemann manifoldunun karşıt boyutu 1 olan bir M_t^n yarı-Riemann alt manifolduna hiperyüzey denir. M_t^n hiperyüzeyinin e_{n+1} normal vektörü için $\langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle < 0$, yani, $\varepsilon_{n+1} = -1$ ise $t = s-1$ ve $\langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle > 0$, yani, $\varepsilon_{n+1} = 1$ ise $t = s$ gerçeklenir.

Tanım 2.15. *M_t^n yarı-Riemann alt manifoldunun $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayındaki $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörü özdeş olarak sıfır olsun. $t = s = 0$ için M^n Riemann manifolduna $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayının minimal bir alt manifoldu denir. $t = 0$ ve $s \geq 1$ için M^n Riemann manifolduna, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayının maksimal bir alt manifoldu denir.*

Tanım 2.16. *$\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldunun bir M_t^n yarı-Riemann alt manifoldu için h ikinci esas formu özdeş olarak sıfır ise M_t^n yarı-Riemann manifolduna tümden jeodezik bir alt manifold denir.*

Tanım 2.17. *M_t^n yarı-Riemann manifoldunun herhangi X ve Y teğet vektörleri için*

$$h(X,Y) = g(X,Y)H \tag{2.31}$$

ise M_t^n yarı-Riemann alt manifolduna, $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldunun tümden ombilik bir alt manifoldu denir.

Tanım 2.18. *M_t^n, $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Bir $p \in M_t^n$ için M_t^n manifoldunun normal uzayının,*

$$Imh_p = span\{h(X,Y)|X,Y \in T_pM_t^n\} \tag{2.32}$$

şeklinde tanımlanmış alt uzayına, birinci normal uzay denir.

Tanım 2.19. *$\phi : M_t^n \longrightarrow \widetilde{M}_s^m$, M_t^n yarı-Riemann manifoldundan $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifolduna tanımlanmış izometrik bir daldırma ve σ, M_t^n yarı-Riemann manifoldu üzerindeki herhangi p,q noktalarını birleştiren bir eğri olsun. Birinci normal uzayının normal vektörleri Imh_p'den Imh_q'ya σ eğrisi boyunca normal demetin konneksiyonuna göre paralel öteleniyorsa, birinci normal uzaya paralel denir.*

Teorem 2.1. ***Erbacher-Magid İndirgeme Teoremi***

$\phi : M_t^n \longrightarrow \mathbb{E}_s^m$, n-boyutlu, t indeksli bir M_t^n yarı-Riemann manifoldundan, m-boyutlu, s indeksli $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayına tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. k-boyutlu birinci normal uzay, Imh, paralel ise $\phi(M_t^n) \subset E^*$ olacak şekilde tümden jeodezik ve $n+k$-boyutlu bir E^* yarı-Öklid alt manifoldu vardır.

Tanım 2.20. *M_t^n, $\widetilde{M}_s^m$ yarı-Riemann manifoldunun bir alt manifoldu ve her $p \in M_t^n$ noktasındaki X teğet vektörü için $\langle h(X,X),\, h(X,X)\rangle$ sabit ise p noktasına M_t^n yarı-Riemann manifoldunun izotropik noktası denir. Her noktası izotropik olan manifolda da izotropik bir manifold denir.*

Tanım 2.21. *M_t^n, $\widetilde{M}_s^{n+1}$ yarı-Riemann manifoldunun yarı-Riemann bir hiperyüzeyi olsun. M_t^n manifoldunun her noktasındaki ortonormal baz alanına göre A_ξ şekil operatörünün matrisi, reel köşegenleştirilmiş bir matris ise M_t^n'ye has bir yarı-Riemann hiperyüzeyi denir. Burada, ξ birim normal vektörüdür.*

Tanım 2.22. *$\widetilde{M}_s^{n+1}$ yarı-Riemann manifoldunun bir M_t^n has hiperyüzeyinin şekil operatörünün özdeğerleri sabit ise M_t^n hiperyüzeyine izoparametrik hiperyüzey denir.*

Tez çalışmasının genelinde uzaysal alt manifoldlarla ilgili çalışılmıştır. M_t^n yarı-Riemann alt manifoldları için verilmiş bu tanım ve formüller $t = 0$ için uzaysal alt manifoldlarda da geçerlidir. Bu yüzden, uzaysal alt manifoldlar için bu kavram ve formüller tekrarlanmayacaktır.

Bu bölümde verilen tanımlar, denklemler ve teoremler için genel olarak B.-Y. Chen'in kitabından yararlanılmıştır, [15].

2.2 Klasik Gauss Tasviri

Bu kısımda, yarı-Öklid uzayının yarı-Riemann alt manifoldunun klasik Gauss tasvirinden bahsedilmiştir.

Yarı-Öklid uzayının yarı-Riemann alt manifoldu için klasik Gauss tasviri, Kim ve Yoon tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır, [9].

$\mathbf{x} : M_t^n \longrightarrow \mathbb{E}_s^m$, n-boyutlu, t indeksli ve yönlendirilebilir bir M_t^n yarı-Riemann manifoldundan m-boyutlu, s indeksli bir $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayına izometrik bir daldırma olsun. $G(n,m)$, $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayının merkezinden geçen yönlendirilmiş bütün n-boyutlu düzlemleri içeren Grassmaniyen manifoldunu ve $\wedge^n \mathbb{E}_s^m$ ise, $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayının n tane vektörlerinin dış çarpımlarından oluşan vektör uzayını göstersin. q bir tamsayı ve $N = \binom{m}{n}$ olmak üzere $\wedge^n \mathbb{E}_s^m$ dış çarpım uzayı bir $\mathbb{E}_q^N$ yarı-Öklid uzayı ile tanımlanabilir. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörleri M_t^n yarı-Riemann manifoldu üzerinde teğet uzayının ortonormal bir bazı olmak üzere

$$\nu : M_t^n \longrightarrow G(n,\, m) \subset \mathbb{E}_q^N$$

$$\nu(p) = (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)(p),$$

şeklinde tanımlanan tasvire M_t^n yarı-Riemann manifoldunun (klasik) Gauss tasviri denir. Bu tasvir, M_t^n yarı-Riemann alt manifoldunun bir p noktasının o noktadaki teğet uzayının $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayının orijinine paralel kaydırılması ile elde edilen yönlendirilmiş n-düzleme götüren, diferansiyellenebilir bir tasvirdir.

t ve s indeksleri özel olarak sıfır alınırsa, $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayının M^n Riemann alt manifoldu için klasik Gauss tasviri elde edilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ GAUSS TASVİRİ VE TEMEL TEOREMLER

Bu bölümde, Obata anlamında Gauss tasviri kullanılarak hiperbolik ve yarı-hiperbolik Gauss tasvirleri tanımlanmıştır. Ardından, yarı-hiperbolik Gauss tasvirinin Laplace operatörü hesaplanmıştır. Ayrıca, M_t^n yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayı içine tanımlanmış sonlu tipten düzgün bir tasvir için minimal polinom kriteri verilmiştir.

Günümüze kadar, Gauss tasviri birçok geometrici tarafından çalışılmıştır. Literatürde, Gauss tasvirinin farklı uzaylarda ya da farklı şekillerde tanımlandığı görülmektedir, [4, 7–9].

3.1 Obata Anlamında Genelleştirilmiş Gauss Tasviri

$\mathbf{x}$, M^n Riemann manifoldundan $(m-1)-$boyutlu $\mathbb{S}^{m-1}(1)$ birim küresine izometrik bir daldırma olsun. $\mathbb{S}^{m-1}(1) \subset \mathbb{E}^m$ olduğundan bu küresel daldırmaya karşılık gelen Gauss tasviri, klasik Gauss tasviri gibi tanımlanır. Ancak, Gauss tasvirinin Öklid uzayı yerine kürenin özelliklerini yansıtması için Obata, küresel alt manifoldların Gauss tasvirini aşağıdaki gibi değiştirmiştir, [7].

$\mathbf{x} : M^n \to \widetilde{M}^m$, n-boyutlu bir M^n Riemann manifoldundan sabit eğrilikli, basit bağlantılı ve tam olan m-boyutlu $\widetilde{M}^m$ uzayı içine izometrik bir daldırma olsun. Obata anlamında genelleştirilmiş Gauss tasviri M^n üzerinde bir tasvirdir öyle ki, M^n manifoldunun her p noktasını, $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M^n)$ manifolduna teğet olan $\widetilde{M}^m$ manifoldunun bir n-boyutlu tümden jeodezik uzayına götürür. $\widetilde{M}^m$ manifoldu yerine özel olarak $\mathbb{S}^m(1)$ birim küresi (ya da $\mathbb{H}^m(-1)$ hiperbolik uzayı) alınırsa genelleştirilmiş Gauss tasviri küresel Gauss tasviri (ya da hiperbolik Gauss tasviri) olarak adlandırılır.

3.2 Yarı-Riemann Alt Manifoldlarının Genelleştirilmiş Gauss Tasviri

T. Ishihara da yarı-Riemann manifoldlarının yarı-Riemann alt manifoldları için genelleştirilmiş anlamda Gauss tasviri tanımını vermiştir. Bu genelleştirmeden, Obata anlamında Gauss tasviri de elde edilmektedir, [8].

$\widetilde{M}_s^{m-1}$, $\mathbb{S}_s^{m-1}(1) \subset \mathbb{E}_s^m$ birim yarı-küre ya da $\mathbb{H}_s^m(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzay olsun. $\mathbf{x} : M_t^n \longrightarrow \widetilde{M}_s^{m-1}$, n-boyutlu, t indeksli yönlendirilmiş bir M_t^n yarı-Riemann manifoldundan $(m-1)$-boyutlu, s indeksli ve sabit eğrilikli $\widetilde{M}_s^{m-1}$ uzayı içine izometrik bir daldırma olsun. M_t^n manifoldunun her p noktasını, $\widetilde{M}_s^{m-1}$ uzayında $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M_t^n)$ manifolduna teğet olan n-boyutlu tümden jeodezik alt uzaya götüren tasvire $\mathbf{x}$ daldırmasına karşılık gelen Obata anlamında genelleştirilmiş Gauss tasviri denir. $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M_t^n)$ manifolduna teğet olan $\widetilde{M}_s^{m-1}$ uzayının n-boyutlu tümden jeodezik alt uzayları $\mathbb{S}_t^n(1)$ birim yarı-küresi ya da $\mathbb{H}_t^n(-1)$ yarı-hiperbolik uzayıdır ve bu uzayları içeren yönlendirilmiş tek $(n+1)$-boyutlu düzlem vardır. Bu yüzden, $\hat{\nu}$ Obata anlamında genelleştirilmiş Gauss tasviri $G(n+1,\, m)$ Grassmaniyen manifoldlarına genişletilebilir. $\hat{\nu}$ ve $i : G(n+1,\, m) \longrightarrow \mathbb{E}_q^N$ içine tasvirinin birleşimi olan $\widetilde{\nu} = i \circ \hat{\nu}$ tasvirine, sırasıyla, $\widetilde{M}_s^{m-1} = \mathbb{S}_s^{m-1}(1)$ ise yarı-küresel Gauss tasviri ya da $\widetilde{M}_s^{m-1} = \mathbb{H}_s^m(-1)$ ise yarı-hiperbolik Gauss tasviri denir.

Chen ve Lue, Obata anlamında Gauss tasviri tanımını kullanarak küresel Gauss tasvirini tanımlamışlardır, [10]. Gauss tasviri ile küresel Gauss tasvirinin geometrik davranışlarının birbirinden farklı olduğu bilinmektedir. Örneğin, Öklid uzayının her kompakt alt manifoldunun Gauss tasviri kütlesel simetrik iken, küresel kompakt alt manifoldların küresel Gauss tasviri genel olarak kütlesel simetrik değildir. Aynı makalede, Chen ve Lue sonlu tipten küresel Gauss tasvirine sahip küresel alt manifoldlara çalışmışlar ve bazı sınıflandırma teoremleri vermişlerdir. Ayrıca, Veronese yüzeyi ve eşit yüzlü minimal torus yüzeyinin $\mathbb{S}^{m-1}(1)$ birim küresi içinde 2-tipinden küresel Gauss tasvirine sahip yegane yüzeyler olduğunu ispatlamışlardır.

3.3 Hiperbolik ve Yarı-Hiperbolik Gauss Tasviri

Bu kısımda, Obata'nın tanımladığı genelleştirilmiş Gauss tasviri tanımı kullanılarak, hiperbolik ve yarı-hiperbolik uzayların alt manifoldları için hiperbolik ve yarı-hiperbolik Gauss tasvirleri verilmiştir.

$\mathbf{x} : M_t^n \longrightarrow \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$, n-boyutlu, t indeksli bir M_t^n yarı-Riemann manifoldundan $(m-1)$-boyutlu, s indeksli $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içine yönlendirilmiş izometrik bir daldırma olsun. $\mathbf{x}$ daldırmasına karşı gelen Obata anlamında yarı-hiperbolik Gauss tasviri, M_t^n yarı-Riemann manifoldunun her p noktasını $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayın $\mathbf{x}(p)$ noktasında $\mathbf{x}(M_t^n)$ manifolduna teğet olan n-boyutlu tümden jeodezik $\mathbb{H}_t^n(-1)$ yarı-hiperbolik uzayına götüren bir tasvirdir. Bununla birlikte, Obata anlamında yarı-hiperbolik Gauss tasviri aşağıdaki açıklamadan dolayı, M_t^n yarı-Riemann manifoldundan $G(n+1,\ m)$ Grassmaniyen manifolduna bir tasvirdir. $\mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-Öklid uzayının merkezinden geçen $(n+1)$-boyutlu düzlemlerin $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı ile kesişimleri, n-boyutlu tümden jeodezik $\mathbb{H}_t^n(-1)$ yarı-hiperbolik uzaylar belirlediğinden veya tersine olarak $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayının n-boyutlu tümden jeodezik $\mathbb{H}_t^n(-1)$ uzayları, $\mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-Öklid uzayının merkezinden geçen $(n+1)$-boyutlu düzlemler belirlediğinden dolayı, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayının bütün n-boyutlu tümden jeodezik $\mathbb{H}_t^n(-1)$ yarı-hiperbolik uzayları, $\mathbb{E}_{s+1}^m$ uzayının merkezinden geçen yönlendirilmiş $(n+1)$-boyutlu düzlemlerin Grassmaniyen manifoldu ile tanımlanabilir. Yani, n-boyutlu tümden jeodezik $\mathbb{H}_t^n(-1)$ yarı-hiperbolik uzayları, $(n+1)$-boyutlu lineer alt uzaylar tarafından tek türlü belirlendiğinden $\hat{v}$, Obata anlamında yarı-hiperbolik Gauss tasviri $G(n+1,\ m)$ Grassmaniyen manifoldlarına genişletilebilir.

Diğer taraftan, $G(n+1,\ m)$ Grassmaniyen manifoldu, $N=\binom{m}{n+1}$ ve q bir tamsayı olmak üzere, $\mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı- Öklid uzayının $n+1$ vektörlerinin dış çarpımlarının oluşturduğu bir $\bigwedge^{n+1}\mathbb{E}_{s+1}^m \cong \mathbb{E}_q^N$ yarı-Öklid uzayına doğal olarak daldırılabildiğinden, $\hat{v}$ tasviri ile $i : G(n+1,\ m) \longrightarrow \mathbb{E}_q^N$ içine tasvirinin birleşimi olan $\tilde{v} = i \circ \hat{v}$ tasvirine de yarı-hiperbolik Gauss tasviri denir.

$e_1,\ldots,e_n$ vektörleri M_t^n manifoldunun bir p noktasında $T_pM_t^n$ teğet uzayının ortonormal bir bazı olsun. $\mathbf{x}(p),e_1,\ldots,e_n$ vektörleri $\mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-Öklid uzayı içinde $(n+1)$-boyutlu lineer bir alt uzay belirler. Bu $(n+1)$-boyutlu lineer alt uzay ve $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayının kesişimi ile n-boyutlu tümden jeodezik bir $\mathbb{H}_t^n(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı elde edilir.

$\{f_{i_1},\ldots,f_{i_m}\}$ ve $\{g_{i_1},\ldots,g_{i_m}\}$, $\mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-Öklid uzayının ortonormal iki bazı olmak üzere, $f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_{n+1}}$ ve $g_{i_1}\wedge\cdots\wedge g_{i_{n+1}}$ $\bigwedge^{n+1}\mathbb{E}_{s+1}^m$ dış çarpım uzayında iki vektör olsun. $\bigwedge^{n+1}\mathbb{E}_{s+1}^m$ dış çarpım uzayında bir iç çarpım $\ll,\gg$

$$\ll f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_{n+1}}, g_{i_1}\wedge\cdots\wedge g_{i_{n+1}} \gg = \det(\langle f_{i_\ell}, g_{j_k}\rangle)$$

şeklinde tanımlansın. Dolayısıyla $\bigwedge^{n+1}\mathbb{E}^m_{s+1}$ dış çarpım uzayı bir $\mathbb{E}^N_q$ yarı-Öklid uzayı olarak tanımlanır, [9].

Tanım 3.1. $\mathbf{x} : M^n_t \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$ *, n-boyutlu, t indeksli bir* M^n_t *yarı-Riemann manifoldundan* $(m-1)$*-boyutlu, s indeksli* $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1)$ *yarı-hiperbolik uzayı içine yönlendirilmiş izometrik bir daldırma olsun.* $\mathbf{x}$ *daldırmasına karşılık gelen* $\hat{v}$*, Obata anlamında yarı-hiperbolik Gauss tasviri*

$$\hat{v} : M^n_t \longrightarrow G(n+1,\, m)$$

$$\hat{v}(p) = (\mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)(p)$$

şeklindedir. $G(n+1,\, m)$ *Grassmaniyen manifoldu bir* $\mathbb{E}^N_q$ *yarı-Öklid uzayı içine doğal olarak daldırılabildiğinden* $\hat{v}$ *ve* $i : G(n+1,\, m) \longrightarrow \mathbb{E}^N_q$ *içine tasvirlerinin bileşkesi olan* $\mathbf{x}$ *daldırmasıyla bağlantılı* $\tilde{v}$ *yarı-hiperbolik Gauss tasviri*

$$\tilde{v} = \mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n : M^n_t \longrightarrow G(n+1,\, m) \subset \mathbb{E}^N_q \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıklama. $\mathbf{x} : M^n_t \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$ daldırmasında t ve s indeksleri özel olarak sıfır alınırsa, bu daldırmaya karşılık gelen genelleştirilmiş Gauss tasvirine hiperbolik Gauss tasviri denir.

(3.1) ile tanımlanan yarı-hiperbolik Gauss tasvirinin Laplace operatörü (2.30) formülü kullanılarak hesaplanabilir. Bunun için ilk olarak $\tilde{v}$ tasvirinin e_i doğrultusundaki türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
e_i(\tilde{v}) =& e_i(\mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\\
=& \tilde{\nabla}_{e_i}\mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_j}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n\\
=& e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\\
&+ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{jk}(e_i)e_k + \sum_{r=n+1}^{m} \varepsilon_r h^r_{ij} e_r\Big)}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n\\
=& \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_r h^r_{ij}\mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.2) denkleminin e_i doğrultusundaki türevi hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
e_ie_i(\tilde{\nu}) =& e_i(\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_r h_{ij}^r \mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n) \\
=& \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_r e_i(h_{ij}^r)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_r h_{ij}^r e_i\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_\ell\varepsilon_r h_{ij}^r\omega_{k\ell}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \qquad (3.3)\\
&+\sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s h_{ij}^r h_{ik}^s\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&-\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{j,k=1}^{n}\varepsilon_k\varepsilon_r h_{ij}^r h_{ik}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_k}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&+\sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s h_{ij}^r\omega_{rs}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.2) ifadesi kullanılarak $\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\tilde{\nu}$ türevi

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\tilde{\nu} &= \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\omega_{ik}(e_i)e_k(\tilde{\nu}) \\
&= \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{j,k=1}^{n}\varepsilon_k\varepsilon_r\omega_{ik}(e_i)h_{kj}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

(2.30) formülünde (3.3) ve (3.4) ifadeleri gözönüne alınırsa yarı-hiperbolik Gauss tasvirinin Laplace operatörü

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{\nu} =& \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{i,j,k=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_k\varepsilon_r\omega_{ik}(e_i)h_{kj}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&-\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_r e_i(h_{ij}^r)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\
&-\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_r h_{ij}^r e_i\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{i,j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_\ell\varepsilon_r h_{ij}^r\omega_{k\ell}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-\sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{i,j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_r\varepsilon_s h_{ij}^r h_{ik}^s\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{i,j,k=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_k\varepsilon_r h_{ij}^r h_{ik}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_k}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-\sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_r\varepsilon_s h_{ij}^r\omega_{rs}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}\tag{3.5}
$$

şeklinde bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.5) denkleminden

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{\nu}=&nH\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n+\|h\|^2\tilde{\nu}\\
&-n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}H}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-\sum_{\substack{i,j,k\\ j\neq k}}\sum_{r,s}\varepsilon_i\varepsilon_r\varepsilon_s h_{ik}^s h_{ij}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}\tag{3.6}
$$

olur. Ayrıca, $D_{e_k}H=D_{e_k}\hat{H}$ ve $\|h\|^2=\|\hat{h}\|^2-n$'dir. O halde, (3.6) denkleminden $\tilde{\nu}$ yarı-hiperbolik Gauss tasvirinin Laplace operatörü

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{\nu}=&\|\hat{h}\|^2\tilde{\nu}+n\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R_{sjk}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

şeklinde hesaplanır. Burada $R_{sjk}^r=R^D(e_j,e_k;e_r,e_s)$'dir.

B.-Y. Chen, m-boyutlu bir $\mathbb{E}_t^m$ yarı-Öklid uzayının, $(m-1)$-boyutlu bir $\mathbb{S}_t^{m-1}(1)$ birim yarı-kürenin ve $(m-1)$-boyutlu bir $\mathbb{H}_{t-1}^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayının kompakt olmayan sonlu tipten alt manifoldlarına çalışmıştır, [6].

Kompakt olmayan alt manifoldlar için sonlu tipten tasvirlerin tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir, [13].

Tanım 3.2. *$\phi: M_t^n\to\mathbb{S}_s^{m-1}(1)\subset\mathbb{E}_s^m$ (ya da, $\phi: M_t^n\to\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)\subset\mathbb{E}_{s+1}^m$), n-boyutlu bir M_t^n yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{S}_s^{m-1}(1)$ birim yarı-küresine (ya da, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayına) tanımlanmış düzgün bir tasvir olsun. $\phi_1,\ldots,\phi_k$'ler,*

$\mathbb{E}^m_{s+1}$-değerli tasvirler ve

$$\Delta\phi_i = \lambda_{p_i}\phi_i, \quad \lambda_{p_i} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, k \tag{3.8}$$

olmak üzere, ϕ tasviri

$$\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_k \tag{3.9}$$

olacak şekilde sonlu spektral açılıma sahip ise ϕ tasvirine $\mathbb{S}^{m-1}_s(1)$ birim yarı-küre (ya da, $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1)$ yarı-hiperbolik uzay) içinde sonlu tipten bir tasvir denir. $\lambda_{p_1}, \ldots, \lambda_{p_k}$ özdeğerlerinin hepsi birbirinden farklı ise ϕ tasvirine k-tipinden bir tasvir denir. λ_{p_k} özdeğerlerinden biri sıfır ve bu özdeğere karşılık gelen ϕ_k sabit olmayan bir tasvir ise ϕ'ye sıfırlı k-tipinden bir tasvir denir.

Bu açılımda, ϕ_i tasvirlerinden biri sabit tasvir olabilir. ϕ tasviri bir daldırma ise M^n_t alt manifolduna veya daldırmaya sırasıyla sonlu tipten bir alt manifold veya sonlu tipten bir daldırma denir.

Sonlu tipten alt manifoldlar ve kompakt Riemann manifoldundan Öklid uzayı içine tanımlanan tasvirler için minimal polinom kriteri Chen ve Piccinni tarafından [4] makalesinde verilmiştir.

B.-Y. Chen'in [15] nolu çalışmasında Teorem 7.2 ve Teorem 7.3 gözönüne alınarak M^n_t yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m_s$ yarı-Öklid uzayı içine tanımlanmış sonlu tipten düzgün bir tasvir için minimal polinom kriteri aşağıdaki şekilde ifade edilir ve bu teoremin ispatı bahsedilen teoremlerin ispatlarına benzer şekilde gösterilebilir, [14].

Teorem 3.1. *$\phi : M^n_t \longrightarrow \mathbb{E}^m_s$, n-boyutlu t indeksli bir M^n_t yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{E}^m_s$ yarı-Öklid uzayına tanımlanmış düzgün bir tasvir ve bu tasvirin gerilim alanı* $\tau =$div$(d\phi)$ olsun. Bu durumda

(i) $Q(\Delta)\tau = 0$ koşulunu sağlayan sabit olmayan bir $Q(t)$ polinomu var ise ϕ tasviri sonsuz tiptendir ya da sonlu k-tipindendir ve $k \leq deg(Q) + 1$'dir;

(ii) $P(\Delta)\tau = 0$ koşulunu sağlayan sabit olmayan ve basit kökleri olan bir $P(t)$ polinomu var ise ϕ tasviri sonlu k-tipindendir ve $k \leq deg(P)$'dir.

4. HİPERBOLİK UZAYLARDA SONLU TİPTEN HİPERBOLİK GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLAR

Bu bölümde, hiperbolik uzayın sonlu tipten hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldları incelenmiştir. Bu bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır. Öncelikle, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayında 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar araştırılmıştır. Ardından, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayı içinde 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip hiperyüzeyler incelenmiştir.

4.1 Hiperbolik Uzaylarda 1-Tipinden Hiperbolik Gauss Tasvrine Sahip Alt Manifoldlar

Bu kısımda, hiperbolik uzayın alt manifoldlarının $\tilde{\nu}$ hiperbolik Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Ardından, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayının yönlendirilebilir bir M^n alt manifoldunun 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. Ayrıca, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayında yönlendirilebilir bir M^n alt manifoldunun hiperbolik Gauss tasvirinin 1-tipinden ve spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terime sahip olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Son olarak, $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde bir horohiperkürenin biharmonik Gauss tasvirine sahip olduğu ispatlanmıştır.

ϕ, iki Riemann manifoldu arasında düzgün bir tasvir olsun. ϕ tasvirinin gerilim alanı $\tau = \operatorname{div}(d\phi)$ özdeş olarak sıfır ise ϕ tasvirine harmonik tasvir denir. Öncelikle, hiperbolik Gauss tasvirinin harmonik olması ile ilgili aşağıdaki önerme elde edilmiştir.

Önerme 4.1. $\mathbf{x} : (M^n,\, g) \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$, *n-boyutlu yönlendirilebilir bir* M^n *Riemann manifoldundan* $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ *hiperbolik uzayına tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. Bu durumda,*

(i) $\hat{\nu} : (M^n,\, g) \longrightarrow G(n+1,\, m)$ *Obata tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul,* $\mathbf{x} : (M^n,\, g) \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ *izometrik daldırmasının minimal olmasıdır;*

(ii) $\tilde{v} : (M^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{E}^N_q$ *hiperbolik Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul,* $\mathbf{x} : (M^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ *izometrik daldırmasının tümden jeodezik olmasıdır. Burada,* $N = \binom{m}{n+1}$ *ve* $q = \binom{m}{n}$ *pozitif tamsayılardır.*

İspat.

(i) $e_r \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ ve $\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_r \wedge \cdots \wedge e_n,\ r = n+1, \ldots, m,$ ayrıştırılabilir $(n+1)$-vektörleri $G(n+1,\ m)$ Grassmaniyen manifoldunun teğet uzayının bir bazını oluşturur. $\hat{v}$ Obata tasviri harmonik ise (3.7) denkleminde bu baz vektörlerini içeren ifadeler sıfır olmalıdır, yani $\hat{H} = 0$'dır. O halde, $\mathbf{x} : (M^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ izometrik daldırması minimaldir.

Tersine, $\mathbf{x} : (M^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ izometrik daldırması minimal bir daldırma, yani $\hat{H} = 0$ olsun. (3.7) denklemi gözönüne alınırsa, $e_r \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ ve $\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_r \wedge \cdots \wedge e_n$ vektörlerini içeren ifadeler sıfırdır. Bu $(n+1)$-vektörler $G(n+1,\ m)$ Grassmaniyen manifoldunun teğet uzayının bir bazını oluşturdukları için $\hat{v} : (M^n,\ g) \longrightarrow G(n+1,\ m)$ tasviri harmoniktir.

(ii) $\tilde{v}$ yarı-hiperbolik Gauss tasviri harmonik olsun. $\tilde{v}$ yarı-hiperbolik Gauss tasviri $\mathbb{E}^N_q$ yarı-Öklid uzayına tanımlandığı gözönüne alınırsa (3.7) denklemi özdeş olarak sıfırdır. Bu durumda, $\hat{h} = 0$, yani, $\mathbf{x} : (M^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ izometrik daldırması tümden jeodeziktir.

Tersine, $\mathbf{x} : (M^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ izometrik daldırması tümden jeodezik, yani, $\hat{h} = 0$ olsun. Bu durumda $\|\hat{h}\|^2 = \hat{H} = D\hat{H} = R^D = 0$ olarak bulunur. (3.7) denklemi gözönüne alınırsa $\Delta\tilde{v} = 0$ gerçeklenir. Dolayısıyla, $\tilde{v} : (M^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{E}^N_q$ yarı-hiperbolik Gauss tasviri harmoniktir. $\square$

Sonuç 4.1. $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ *hiperbolik uzayının tümden jeodezik alt manifoldlarının hiperbolik Gauss tasviri harmonik olduğundan 1-tipindendir.*

$\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}^m_1$ hiperbolik uzayının yönlendirilebilir bir alt manifoldu 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahipse (3.9) denkleminden $\lambda_p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\Delta\tilde{v} = \lambda_p \tilde{v}$ gerçeklenir.

Teorem 4.1. $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ *hiperbolik uzayının yönlendirilebilir bir alt manifoldunun 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul bu alt manifoldun sabit skaler eğrilikli, düz normal konneksiyona sahip ve* $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ *hiperbolik uzayının minimal bir alt manifoldu olmasıdır.*

İspat. M^n, $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayında 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip yönlendirilebilir bir alt manifold olsun. O halde, M^n manifoldunun hiperbolik Gauss tasviri $\tilde{v}$

$$\Delta\tilde{v} = \lambda_p \tilde{v} \tag{4.1}$$

denklemini sağlar. Burada, $0 \neq \lambda_p \in \mathbb{R}$'dir. Ayrıca, (3.7) ve (4.1) denklemleri kıyaslanırsa M^n alt manifoldunun 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $\hat{H} = R^r_{sjk} = 0$ ve $\|\hat{h}\|^2$'nin sabit olmasıdır. Yani, M^n manifoldu $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayının düz normal konneksiyona sahip minimal bir alt manifoldudur. Ayrıca, (2.26) formülünden M^n alt manifoldu sabit skaler eğriliğe sahiptir. Böylece ispat tamamlanır. □

E. Cartan, [16], $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayının izoparametrik hiperyüzeylerini araştırmıştır. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ içinde izoparametrik bir M^n hiperyüzeyinin en fazla iki tane farklı asal eğriliğe sahip olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca, aynı çalışmada M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ içinde tümden ombilik $\mathbb{H}^n(-1)$ hiperbolik uzayının ya da $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ içinde $\mathbb{S}^{n-k}(\frac{1}{r^2}) \times \mathbb{H}^k(-\frac{1}{1+r^2})$, $r > 0$, standart çarpım uzayının açık bir parçası olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla, $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ içinde minimal izoparametrik bir M^n hiperyüzeyi, tümden jeodezik $\mathbb{H}^n(-1) \subset \mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayının açık bir parçasıdır. O halde, Teorem 4.1 gözönüne alındığında aşağıdaki sonuç doğrudan elde edilir.

Sonuç 4.2. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ *hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik* $\mathbb{H}^n(-1)$ *hiperbolik uzayı 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip minimal izoparametrik yegane hiperyüzeydir.*

Teorem 4.2. *M,* $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ *hiperbolik uzayının yönlendirilebilir bir yüzeyi olsun. M yüzeyinin 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter şart* $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ *içinde tümden jeodezik* $\mathbb{H}^2(-1)$ *hiperbolik uzayının açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. M, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ içinde 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip yönlendirilebilir bir yüzey olsun. O halde, Teorem 4.1'den M yüzeyi $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ içinde minimal, sabit skaler eğrilikli ve düz normal konneksiyona sahiptir. Ayrıca, (2.26) denkleminden $\|\hat{h}\|^2$ sabittir.

M yüzeyinin $\mathbb{E}_1^m$ içindeki yer vektörü $\mathbf{x}$ olsun. M yüzeyi $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ içinde minimal olduğundan M üzerinde $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ortonormal bir baz alanı seçilebilir, öyle ki e_1, e_2 vektörleri M yüzeyine teğet, $e_3, \ldots, e_{m-1}, e_m = \mathbf{x}$ ise M yüzeyine normal ve

$$A_3 = \begin{pmatrix} h_{11}^3 & 0 \\ 0 & -h_{11}^3 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & h_{12}^4 \\ h_{12}^4 & 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \cdots = A_{m-1} = 0,\ A_m = -I$$

gerçeklensin. Burada I, 2×2 birim matristir. O halde,

$$\|\hat{h}\|^2 = 2(h_{11}^3)^2 + 2(h_{12}^4)^2 \tag{4.2}$$

olur. Ayrıca, (2.24) denkleminden $R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) = -2h_{11}^3 h_{12}^4 = 0$, yani, $h_{11}^3 = 0$ ya da $h_{12}^4 = 0$ olur.

Durum (a) : $h_{12}^4 = 0$ olsun. O halde, (4.2) denkleminden h_{11}^3 sabittir. M yüzeyi düz normal konneksiyona sahip olduğundan (2.23) Codazzi denkleminden $j = 1, 2$ için $\omega_{12}(e_j) h_{11}^3 = 0$ olur. Yani,

$$h_{11}^3 = 0 \quad \text{ya da} \quad \omega_{12}(e_j) = 0. \tag{4.3}$$

$h_{11}^3 \neq 0$ ve $\omega_{12} = 0$ olsun. Bu durumda R eğrilik tensörü sıfırdır, yani, M yüzeyi düzdür. O halde, Gauss eğriliği $K = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = 0$ olarak bulunur. Ayrıca, Gauss denkleminden

$$K = -1 + \det A_3 = -(1 + (h_{11}^3)^2) \neq 0$$

gerçeklenir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\omega_{12} \neq 0$ ve $h_{11}^3 = 0$ gerçeklenir. M yüzeyi minimal olduğundan $h_{22}^3 = 0$ bulunur. Bu durumda, $A_3 = A_4 = 0$ olur. Öyleyse, M yüzeyi $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzay içinde tümden jeodeziktir. O halde, M yüzeyi, $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ içinde tümden jeodezik $\mathbb{H}^2(-1)$ hiperbolik uzayının açık bir parçasıdır.

Durum (b) : $h_{11}^3 = 0$ olsun. Durum (a)'nın ispatına benzer olarak ispat devam ettirilirse M yüzeyinin $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ içinde tümden jeodezik $\mathbb{H}^2(-1)$ hiperbolik uzayının açık bir parçası olduğu görülür.

Tersine, M yüzeyi $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzay içinde tümden jeodezik $\mathbb{H}^2(-1)$ hiperbolik uzayının açık bir parçası olsun. Bu durumda $A_3 = A_4 = \cdots = A_{m-1} = 0$

ve $A_m = -I$ olur. O halde, (3.7) denkleminden $\Delta\tilde{v} = 0$, yani, M yüzeyinin $\tilde{v}$ hiperbolik Gauss tasviri harmonik ve 1-tipinden bir tasvirdir. □

Yardımcı Teorem 4.1. *M^n, $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$ hiperbolik uzayında bir hiperyüzey olsun. M^n üzerinde tanımlı $\bar{v} = e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ tasvirinin Laplace operatörü*

$$\Delta\bar{v} = -n\hat{\alpha}\tilde{v} - n\bar{v} \tag{4.4}$$

olarak hesaplanır. Burada, $\hat{\alpha}$, M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içindeki ortalama eğriliğidir.

İspat. $\mathbf{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$, n-boyutlu bir M^n Riemann manifoldundan $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içine tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. $M^n \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$ üzerinde $e_1, e_2, \ldots, e_{n+2}$ ortonormal bir baz alanı seçilebilir, öyle ki, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörleri M^n manifolduna teğet, e_{n+1}, $e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri ise M^n manifolduna normal olsun. $e_{n+2} = \mathbf{x}$ yer vektörü normal uzayda paralel ve $\mathbb{E}_1^{n+2}$ içinde karşıt boyut iki olduğundan e_{n+1} vektörü de normal uzayda paraleldir.

$\bar{v}$ tasvirinin e_i doğrultusundaki türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} e_i\bar{v} &= e_i(e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ &= \tilde{\nabla}_{e_i} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + \sum_{j=1}^{n} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i} e_j}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned}$$

olur. Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} e_i\bar{v} =& \Big(-\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{n+1} e_j + \sum_{r=n+1}^{n+2} \varepsilon_r \omega_{(n+1)r}(e_i) e_r \Big) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ \sum_{j=1}^{n} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_{jk}(e_i) e_k + \sum_{r=n+1}^{n+2} \varepsilon_r h_{ij}^r e_r \Big)}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. $i = 1, \ldots, n$ için $e_i \wedge e_i = 0$ ve M^n hiperyüzeyinin normal konneksiyonunun düz, yani, $\omega_{rs} = 0$ olduğu (4.5) denkleminde kullanılırsa,

$$e_i\bar{v} = e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \tag{4.6}$$

gerçeklenir. Diğer taraftan, $\nabla_{e_i} e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(e_i) e_j$ olduğundan

$$(\nabla_{e_i} e_i)\bar{v} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(e_i) e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \tag{4.7}$$

şeklindedir. (4.6) denkleminin e_i doğrultusunda türevi hesaplanırsa,

$$e_ie_i(\bar{v}) = \bar{v} + h_{ii}^{n+1}\tilde{v} - \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji}(e_i)e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \tag{4.8}$$

olarak elde edilir. (2.30) denklemi, $n\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}$ ve $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ olması gözönüne alınırsa doğrudan hesaplamalar sonucunda

$$\begin{aligned}\Delta\bar{v} &= -n\hat{\alpha}\tilde{v} - n\bar{v} + \sum_{i,j=1}^{n} (\omega_{ij}(e_i) + \omega_{ji}(e_i))e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= -n(\hat{\alpha}\tilde{v} + \bar{v}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır. □

Tanım 4.1. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ *hiperbolik uzayı içinde tam, düz ve tümden ombilik olan hiperyüzeye horohiperküre denir.*

Açıklama. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içindeki tümden ombilik hiperyüzeyler, $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı ile $\mathbb{E}_1^{n+2}$ yarı-Öklid uzayındaki afin hiperdüzlemlerin kesişimi ile elde edilir. Bu hiperdüzlemlerin karakterine bağlı olarak üç çeşit hiperyüzey oluşur. $\tau \in \mathbb{R}$, b, $\mathbb{E}_1^{n+2}$ içinde sıfırdan farklı sabit bir vektör ve $\langle b,b\rangle \in \{-1,0,1\}$ olsun. $\langle b,b\rangle + \tau^2 > 0$ olmak üzere $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde bir hiperyüzey

$$M_\tau = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n+1}(-1) : \langle \mathbf{x}, b\rangle = \tau\}$$

şeklinde tanımlansın.

(i) $\langle b,b\rangle = 0$ olsun. O halde, M_τ hiperyüzeyi b noktasında ışık konisine paraleldir. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde bu M_τ hiperyüzeyine horohiperküre denir. Horohiperkürenin, $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliği sabittir ve $|\hat{\alpha}| = 1$ sağlanır.

(ii) $\langle b,b\rangle = 1$ olsun. O halde, M_τ hiperyüzeyi $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde sabit $-\frac{1}{1+\tau^2}$ eğrilikli $\mathbb{H}^n\big(-\frac{1}{1+\tau^2}\big)$ hiperbolik uzayıdır.

(iii) $\langle b,b\rangle = -1$ olsun. O halde, M_τ hiperyüzeyi $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde sabit $\frac{1}{\tau^2-1}$ eğrilikli $\mathbb{S}^n\big(\frac{1}{\tau^2-1}\big)$ küresidir. Burada $|\tau| > 1$'dir, [17].

Sonraki teoremde, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayında yönlendirilebilir bir M^n alt manifoldunun hiperbolik Gauss tasvirinin 1-tipinden ve spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terime sahip olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir.

Teorem 4.3. *M^n, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayının n-boyutlu yönlendirilebilir bir alt manifoldu olsun. M^n manifoldunun hiperbolik Gauss tasvirinin 1-tipinden ve spektral açılımda sıfırdan farklı sabit terime sahip olması için gerek ve yeter koşul, M^n manifoldunun tümden jeodezik $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik olmayan, tümden ombilik ve ortalama eğriliğinin mutlak değeri $|\hat{\alpha}| \neq 1$ olan hiperyüzeyin açık bir parçası olmasıdır; yani M^n, $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, $-c$ $(0 < c < 1)$ eğrilikli $\mathbb{H}^n(-c)$ hiperbolik uzayının açık bir parçası ya da $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, c $(c > 0)$ eğrilikli $\mathbb{S}^n(c)$ küresinin açık bir parçasıdır.*

İspat. $\mathbf{x} : M^n \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$, n-boyutlu yönlendirilebilir bir M^n Riemann manifoldundan $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içine tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. M^n manifoldunun, $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayında spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip bir alt manifold olduğu varsayılsın. Bu durumda, $\tilde{\nu}$ hiperbolik Gauss tasviri

$$\Delta\tilde{\nu} = \lambda_p(\tilde{\nu} - \tilde{c})$$

eşitliğini sağlar. Burada $\tilde{c}$, $\mathbb{E}_q^N$ yarı-Öklid uzayında sıfırdan farklı sabit bir vektör ve $0 \neq \lambda_p \in \mathbb{R}$'dir. O halde,

$$(\Delta\tilde{\nu})_i = \lambda_p(\tilde{\nu})_i \tag{4.10}$$

gerçeklenir; burada $(.)_i = e_i(.)$'dir. Öncelikle $\Delta\tilde{\nu}$ ifadesinin e_i doğrultusundaki türevi hesaplansın. Bu kısımda kullanılan indislerin aralıkları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$1 \leq A, B, C, \ldots, \leq m; \quad 1 \leq i, j, k, \ldots, \leq n; \quad n+1 \leq r, s, t, \ldots, \leq m.$$

(3.7) denklemindeki terimlerin e_i doğrultusundaki türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} e_i(\|\hat{h}\|^2\tilde{\nu}) =& (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 e_i(\tilde{\nu}) \\ =& (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} h_{ik}^r \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde elde edilir.

$$
\begin{aligned}
e_i(n\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n) =& n\tilde{\nabla}_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n+\sum_{k=1}^{n} n\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_k}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
=& n(-A_{\hat{H}}(e_i)+D_{e_i}\hat{H})\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{k=1}^{n} n\hat{H}\wedge\cdots\wedge\underbrace{(\nabla_{e_i}e_k+h(e_i,e_k))}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
=& nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{k=1}^{n} n\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{(\sum_{j=1}^{n}\omega_{kj}(e_i)e_j+\sum_{r=n+1}^{m}\varepsilon_r h^r_{ik}e_r)}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
$$

olmak üzere gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
e_i(n\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n) =& nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+n\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} h^r_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-n\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_m\delta_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

olarak bulunur. Benzer şekilde işlemler yapılarak

$$
\begin{aligned}
&e_i(n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n)\\
=&-nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+n\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}\omega_{j\ell}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} h^r_{ij}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-n\sum_{k=1}^{n}\left\langle A_{D_{e_k}\hat{H}}(e_i),e_k\right\rangle\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n+n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_i}D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

elde edilir. Bununla beraber

$$
\begin{aligned}
&e_i\Big(\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\Big)\\
=&\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\tilde{\nabla}_{e_i}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j,k,\ell\neq}}^{n} R^r_{sjk}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_\ell}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
=&\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}+R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell,h=1\\ j,k,\ell\neq}}^{n} R^r_{sjk}\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_h}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\\
&\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s,t=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j,k,\ell\neq}}^{n} R^r_{sjk}h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\\
&\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s,t=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}h^r_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s,t=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\omega_{rt}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
=&\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}+R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j,k,\ell\neq}}^{n} R^r_{sjk}\{\sum_{h=1}^{n}\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_h}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\\
&\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{t=n+1}^{m-1} h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_t}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\}\\
&-\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\ \sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\ \sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}h^r_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_\ell}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s,t=n+1\\ s<r}}^{m-1}\ \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_t}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s,t=n+1\\ s<r}}^{m-1}\ \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\omega_{rt}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_t}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

olarak elde edilmektedir. Yukarıdaki denklemde bazı ifadeler düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
&e_i\Big(\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\ \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\Big)\\
=&\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\ \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}+R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\ \sum_{\substack{j,k,\ell\\ j,k,\ell\neq}}^{n} R^r_{sjk}\{\sum_{h=1}^{n}\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_h}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\\
&\wedge \underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\}\\
&+\sum_{t=n+1}^{m-1} h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_t}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\}\\
&-\sum_{r,s=n+1}^{m-1}\ \sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{r,s,t=n+1}^{m-1}\ \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_t}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

elde edilir. O halde, (4.11), (4.12), (4.13) ve (4.15) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
e_i(\Delta\tilde{\nu}) =&(\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu}+\|\hat{h}\|^2\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+2nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n+n\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} h^r_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+n\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\omega_{jk}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_k}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1}h^r_{ij}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+n\sum_{k=1}^{n}\left\langle A_{D_{e_k}\hat{H}}(e_i),e_k\right\rangle\tilde{\nu}-n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge D_{e_i}D_{e_k}\hat{H}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}+R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell\\ j,k,\ell\neq}}^{n}R^r_{sjk}\{\sum_{h=1}^{n}\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_h}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\\
&\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{t=n+1}^{m-1}h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\}\\
&-\sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{r,s,t=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Durum (a) : $\hat{H}=0$ olsun. Bu durumda, (4.16) denklemi

$$
\begin{aligned}
e_i(\Delta\tilde{\nu})=&(\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu}+\|\hat{h}\|^2\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}+R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j,k,\ell\neq}}^{n}R^r_{sjk}\{\sum_{h=1}^{n}\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_h}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\\
&\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{t=n+1}^{m-1}h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\}
\end{aligned}
$$

$$- \sum_{r,s=n+1}^{m-1} \sum_{\substack{j,k,\ell=1 \\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk} h^s_{i\ell} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_\ell}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n$$

$$+ \sum_{r,s,t=n+1}^{m-1} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk} \omega_{st}(e_i) \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_t}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \quad (4.17)$$

şekline indirgenir. (3.2), (4.10) ve (4.17) denklemleri kıyaslanırsa,

$$\|\hat{h}\|_i^2 = R^r_{sjk} = 0$$

olur. Bu durumda, $\|\hat{h}\|^2$ sabittir ve M^n manifoldunun normal konneksiyonu düzdür. Ayrıca, (2.26) denkleminden M^n manifoldunun skaler eğriliği sabittir. O halde, Teorem 4.1'den M^n manifoldunun $\tilde{\nu}$ hiperbolik Gauss tasviri 1-tipindendir ve $\tilde{c} = 0$ olur. Ancak teoremin kabulünden bu bir çelişkidir. Bu durumda, $\hat{H} = 0$ olamaz.

Durum (b) : $\hat{H} \neq 0$ olsun. (4.16) denklemi gözönüne alınırsa $D_{e_i}\hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ terimi $(\Delta\tilde{\nu})_i$ ifadesinde bulunmakta fakat $e_i(\tilde{\nu})$ ifadesinde bulunmamaktadır. Bu durumda, (3.2), (4.10) ve (4.16) denklemleri kıyaslanırsa $D\hat{H} = 0$ olur. Yani, M^n manifoldu $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde sıfırdan farklı paralel ortalama eğriliğe sahiptir. Dolayısıyla, (4.16) denklemi

$$\begin{aligned}
e_i(\Delta\tilde{\nu}) =& (\|\hat{h}\|^2)_i \tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} h^r_{ik} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
& + n \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} h^r_{ik} \hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
& + n \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
& + \sum_{\substack{r,s=n+1 \\ s<r}}^{m-1} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} \{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x} + R^r_{sjk} e_i\} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
& + \sum_{\substack{r,s=n+1 \\ s<r}}^{m-1} \sum_{\substack{j,k,\ell=1 \\ j,k,\ell\neq}}^{n} R^r_{sjk} \{ \sum_{h=1}^{n} \omega_{\ell h}(e_i) \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_h}_{\ell-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{k-inci} \wedge \cdots \\
& \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
& + \sum_{t=n+1}^{m-1} h^t_{i\ell} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_t}_{\ell-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{r,s=n+1}^{m-1} \sum_{\substack{j,k,\ell=1 \\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk} h^s_{i\ell} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_\ell}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{r,s,t=n+1}^{m-1} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk} \omega_{st}(e_i) \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_t}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

şekline indirgenir. (3.2), (4.10) ve (4.18) denklemleri kıyaslanırsa, $\|\hat{h}\|^2_i = 0$, yani $\|\hat{h}\|^2$ sabittir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&\|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} h^r_{ik} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ n \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&- \sum_{r,s=n+1}^{m-1} \sum_{\substack{j,k,\ell=1 \\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk} h^s_{i\ell} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_\ell}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&= \lambda_p \sum_{r=n+1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} h^r_{ij} \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&n \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} h^r_{ik} \hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1 \\ s<r}}^{m-1} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} R^r_{sjk} e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n = 0
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

gerçeklenir. $\langle \hat{H}, \hat{H} \rangle$ sabit olduğundan $\hat{\alpha} = |\hat{H}|$ olmak üzere $\hat{H} = \hat{\alpha} e_{n+1}$ olarak alınabilir. O halde, (4.20) denkleminden $r, s \geq n+2$ ve $j, k = 1, \ldots, n$ için $R^r_{sjk} = 0$ olur. Ayrıca, $D\hat{H} = 0$ olduğundan, $R^D(e_j, e_k) e_{n+1} = 0$ ve

$$
\left\langle R^D(e_j, e_k) e_{n+1}, e_s \right\rangle = R^{n+1}_{sjk} = 0
$$

bulunur. Öyleyse, $r, s \geq n+1$ ve $j, k = 1, \ldots, n$ için $R^r_{sjk} = 0$'dır ve M^n manifoldunun $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde normal konneksiyonu düzdür. Bu durumda, (4.20) denklemi

$$
n \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+2}^{m-1} \hat{\alpha} h^r_{ik}\, e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n = 0 \tag{4.21}
$$

şekline indirgenir. (4.21) denkleminden $r \geq n+2$ ve $i, k = 1, \ldots, n$ için $h^r_{ik} = 0$ bulunur. Ayrıca, (4.21) denkleminden $h^{n+1}_{ik} \neq 0$ olduğundan M^n manifoldunun birinci normal uzayı Imh, e_{n+1} vektörü tarafından gerilir. O halde, Erbacher-Magid İndirgeme

Teoreminden, M^n manifoldu $\mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik olan bir $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde kalmaktadır. Diğer taraftan, $r \geq n+2$ ve $i,k = 1,\dots,n$ için $h^r_{ik} = 0$ olduğundan (4.19) denkleminden

$$\left(\|\hat{h}\|^2 - \lambda_p\right) h^{n+1}_{ik} = n\hat{\alpha}\delta_{ik} \tag{4.22}$$

bulunur. $\lambda_p = \|\hat{h}\|^2$ ise (4.22) denkleminden $\hat{\alpha} = 0$ bulunur; bu ise bir çelişkidir. Öyleyse, $\lambda_p \neq \|\hat{h}\|^2$ olmalıdır. (4.22) denkleminde $i = k$ için i, 1'den n'ye kadar taraf tarafa toplanırsa $n\hat{\alpha}(\|\hat{h}\|^2 - n - \lambda_p) = 0$ elde edilir. Böylece, $\lambda_p = \|\hat{h}\|^2 - n$ ve (4.22) denkleminden $h^{n+1}_{ik} = \hat{\alpha}\delta_{ik}$ bulunur. O halde, M^n manifoldu tümden jeodezik $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde tümden ombilik bir hiperyüzeydir. Diğer taraftan, $h^{n+1}_{ik} = \hat{\alpha}\delta_{ik}$ ve $\hat{\alpha}^2 \neq 1$ olduğu için $\lambda_p = \|\hat{h}\|^2 - n = n(\hat{\alpha}^2 - 1) \neq 0$ gerçeklenir. Sonuç olarak, M^n manifoldu tümden jeodezik $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik olmayan, tümden ombilik ve ortalama eğriliğinin büyüklüğü $|\hat{\alpha}| \neq 1$ olan hiperyüzeyin açık bir parçasıdır; yani, M^n manifoldu $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, $-c$ $(0 < c < 1)$ eğrilikli $\mathbb{H}^n(-c)$ hiperbolik uzayının açık bir parçası ya da M^n manifoldu $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, c $(c > 0)$ eğrilikli $\mathbb{S}^n(c)$ küresinin açık bir parçasıdır.

Tersine, M^n hiperyüzeyi tümden jeodezik $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik olmayan, tümden ombilik ve ortalama eğriliğinin mutlak değeri $|\hat{\alpha}| \neq 1$ olan hiperyüzeyin açık bir parçası olsun. Genelliği bozmadan, M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}^{n+2}_1$ uzayı içinde olduğu varsayılsın. M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{E}^{n+2}_1$ içindeki yer vektörü $\mathbf{x}$ ve $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri de $M^n \subset \mathbb{E}^{n+2}_1$ üzerinde yerel ortonormal bir baz alanı olsun, öyle ki, $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektörleri M^n hiperyüzeyine teğet, $e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri M^n hiperyüzeyine normal olsun. $e_{n+2} = \mathbf{x}$ yer vektörü normal uzayda paralel ve karşıt boyut iki olduğundan e_{n+1} vektörü de normal uzayda paraleldir. Dolayısıyla, M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{E}^{n+2}_1$ yarı-Öklid uzayı içindeki normal demeti düzdür, yani, $R^D = 0$ olur. Ayrıca, M^n hiperyüzeyi tümden ombilik olduğundan M^n'nin $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içindeki ortalama eğriliği $\hat{\alpha}$ olmak üzere $\hat{H} = \hat{\alpha}e_{n+1}$ vektörü $\mathbb{E}^{n+2}_1$ yarı-Öklid uzayı içinde paraleldir. Böylece, (3.7) denklemi

$$\Delta\tilde{v} = \|\hat{h}\|^2\tilde{v} + n\hat{\alpha}e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \|\hat{h}\|^2\tilde{v} + n\hat{\alpha}\bar{v} = n\hat{\alpha}^2\tilde{v} + n\hat{\alpha}\bar{v} \tag{4.23}$$

şekline indirgenir. (4.23) denkleminin Laplace operatörü alınırsa

$$\begin{aligned}
\Delta^2\tilde{v} &= \Delta(\|\hat{h}\|^2\tilde{v} + n\hat{\alpha}\bar{v}) \\
&= \Delta(\|\hat{h}\|^2\tilde{v}) + \Delta(n\hat{\alpha}\bar{v}) \\
&= \|\hat{h}\|^2\Delta\tilde{v} + n\hat{\alpha}\Delta\bar{v} \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.4) ifadesi (4.24) denkleminde yerine yazılır ve (4.23) tekrar kullanılırsa

$$\Delta^2\tilde{v} - n(\hat{\alpha}^2 - 1)\Delta\tilde{v} = 0 \qquad (4.25)$$

elde edilir. M^n hiperyüzeyinin Laplace operatörü için $P(\Delta)\tilde{v} = 0$ olacak şekilde 2. dereceden bir $P(\lambda)$ polinomu bulunmuş olur. O halde, M^n hiperyüzeyi spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden ya da sıfırlı 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahiptir.

Eğer $\hat{\alpha} = 1$ olsaydı $\Delta^2\tilde{v} = 0$ gerçeklenirdi. Ayrıca, $\Delta\tilde{v} \neq 0$ olduğudan $\tilde{v}$ tasviri biharmonik bir tasvir olurdu. Ancak, $|\hat{\alpha}| \neq 1$ olarak varsayılmıştır.

$|\hat{\alpha}| \neq 1$ olduğundan $P(\lambda) = \lambda^2 - n(\hat{\alpha}^2 - 1)\lambda = 0$ polinomunun kökleri $\lambda_p = 0$ ve $\lambda_q = n(\hat{\alpha}^2 - 1)$ olur. $\Delta\tilde{v}_p = \lambda_p\tilde{v}_p$ ve $\Delta\tilde{v}_q = \lambda_q\tilde{v}_q$ olacak şekilde $\tilde{v} = \tilde{v}_p + \tilde{v}_q$ spektral açılımı vardır. Öyleyse, λ_p ve λ_q özdeğerlerine karşılık gelen $\tilde{v}_p$ ve $\tilde{v}_q$ tasvirleri belirlenebilir. Bu tasvirler $\tilde{v}$ ve $\bar{v}$ tasvirlerinin lineer birleşimi olarak düşünülürse,

$$\tilde{v}_p = a_1\tilde{v} + a_2\bar{v}, \qquad (4.26)$$

$$\tilde{v}_q = b_1\tilde{v} + b_2\bar{v} \qquad (4.27)$$

olarak yazılabilir. O halde, a_1, a_2, b_1 ve b_2 katsayıları aşağıdaki denklemler yardımıyla doğrudan aşağıdaki şekilde hesaplanır. (4.26) denkleminde eşitliğin her iki tarafının Laplace operatörü alınırsa

$$\Delta\tilde{v}_p = a_1\Delta\tilde{v} + a_2\Delta\bar{v} \qquad (4.28)$$

olur. $\Delta\tilde{v}_p = \lambda_p\tilde{v}_p$ ve $\lambda_p = 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\Delta\tilde{v}_p = a_1\Delta\tilde{v} + a_2\Delta\bar{v} = 0 \qquad (4.29)$$

bulunur. (4.29) denkleminde (4.4) ve (4.23) denklemleri kullanılırsa

$$a_1(n\hat{\alpha}^2\tilde{v} + n\hat{\alpha}\bar{v}) - a_2(n\hat{\alpha}\tilde{v} + n\bar{v}) = 0$$

olur. Buradan,

$$n\hat{\alpha}^2 a_1 - n\hat{\alpha} a_2 = 0 \tag{4.30}$$

ve

$$n\hat{\alpha} a_1 - n a_2 = 0 \tag{4.31}$$

denklemleri elde edilir. Benzer şekilde, (4.27) denkleminde eşitliğin her iki tarafının Laplace operatörü alınırsa

$$\Delta\tilde{v}_q = b_1 \Delta\tilde{v} + b_2 \Delta\bar{v} \tag{4.32}$$

olur. $\Delta\tilde{v}_q = \lambda_q \tilde{v}_q$ olduğu düşünülürse

$$b_1 \Delta\tilde{v} + b_2 \Delta\bar{v} = \lambda_q \tilde{v}_q \tag{4.33}$$

sağlanır. (4.33) denkleminde (4.4) ve (4.23) denklemleri kullanılırsa

$$b_1(n\hat{\alpha}^2 \tilde{v} + n\hat{\alpha}\bar{v}) - b_2(n\hat{\alpha}\tilde{v} + n\bar{v}) = \lambda_q(b_1\tilde{v} + b_2\bar{v})$$

olur. Buradan,

$$n\hat{\alpha}^2 b_1 - n\hat{\alpha} b_2 = \lambda_q b_1 \tag{4.34}$$

ve

$$n\hat{\alpha} b_1 - n b_2 = \lambda_q b_2 \tag{4.35}$$

denklemleri elde edilir. Diğer taraftan, $\tilde{v} = \tilde{v}_p + \tilde{v}_q$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= (a_1\tilde{v} + a_2\bar{v}) + (b_1\tilde{v} + b_2\bar{v}) \\ &= (a_1 + b_1)\tilde{v} + (a_2 + b_2)\bar{v} \end{aligned}$$

gerçeklenir ve $a_1 + b_1 = 1$, $a_2 + b_2 = 0$ olacak şekilde iki tane daha denklem elde edilir. Elde edilen denklemler kullanılılarak a_1, a_2, b_1 ve b_2 katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1-\hat{\alpha}^2}, & a_2 &= \frac{\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha}^2} \\ b_1 &= -\frac{\hat{\alpha}^2}{1-\hat{\alpha}^2}, & b_2 &= -\frac{\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha}^2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda $\tilde{v}_p$ ve $\tilde{v}_q$ tasvirleri sırasıyla

$$\tilde{v}_p = \frac{1}{1-\hat{\alpha}^2}(\tilde{v} + \hat{\alpha}\bar{v}), \tag{4.36}$$

$$\tilde{v}_q = -\frac{\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha}^2}(\hat{\alpha}\tilde{v} + \bar{v}) \tag{4.37}$$

olur. $\lambda_p = 0 \quad ve \quad \lambda_q = n(\hat{\alpha}^2 - 1)$ olmak üzere

$$\Delta\tilde{v}_p = 0 \qquad ve \qquad \Delta\tilde{v}_q = \Delta\tilde{v} = n(\hat{\alpha}^2 - 1)\tilde{v}_q$$

sağlanır.

Ayrıca, $i = 1,2$ için

$$\begin{aligned} e_i(\tilde{v}_p) =& \frac{1}{1-\hat{\alpha}^2}(e_i(\tilde{v}) + \hat{\alpha}e_i(\bar{v})) \\ =& \frac{1}{1-\hat{\alpha}^2}(\hat{\alpha}\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_{n+1}}_{i-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\ & + \hat{\alpha}e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci} \wedge \cdots \wedge e_n) = 0 \end{aligned}$$

olur, yani, $\tilde{v}_p = \frac{1}{1-\hat{\alpha}^2}(\tilde{v} + \hat{\alpha}\bar{v})$ sabit bir vektördür. Dolayısıyla, $\tilde{v}$ hiperbolik Gauss tasviri $\tilde{v} = \tilde{c} + \tilde{v}_q$ ve $\tilde{c} = \tilde{v}_p$ olmak üzere $\Delta\tilde{v}_q = \Delta\tilde{v} = n(\hat{\alpha}^2 - 1)\tilde{v}_q$ gerçeklenir. Yani, M^n hiperyüzeyi spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahiptir. □

Tanım 4.2. *M^n, $\mathbb{E}^m_1$ Minkowski uzayının bir alt manifoldu olsun. M^n manifoldunun hiperbolik Gauss tasviri $\tilde{v}$,*

$$\Delta\tilde{v} \neq 0 \quad ve \quad \Delta^2\tilde{v} = 0$$

koşullarını gerçekliyorsa, M^n manifoldu biharmonik hiperbolik Gauss tasvirine sahiptir denir, [15].

Teorem 4.4. *M^n hiperyüzeyi $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}^{n+2}_1$ hiperbolik uzayı içinde bir horohiperküre olsun. M^n horohiperküresinin hiperbolik Gauss tasviri biharmoniktir.*

İspat. b, $\mathbb{E}^{n+2}_1$ Minkowski uzayı içinde ışıksal bir vektör olsun; yani $\langle b, b\rangle = 0$ ve $b \neq 0$. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde bir M^n horohiperküresi

$$M^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}^{n+2}_1 : \langle \mathbf{x}, b\rangle = \tau\}, \tau \neq 0 \tag{4.38}$$

şeklinde tanımlanır. M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde birim normal vektörü $e_{n+1} = \frac{1}{\tau}(b + \tau\mathbf{x})$ şeklinde alınabilir. O halde, $A_{n+1} = A_{\mathbf{x}} = -I$, $\hat{\alpha} = -1$ ve $\|\hat{h}\|^2 = n$ olarak bulunur. Bu durumda (3.7) denklemi

$$\Delta\tilde{v} = n\tilde{v} - ne_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{4.39}$$

haline indirgenir. Diğer taraftan (4.4) denkleminden

$$\Delta(e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = n\tilde{v} - ne_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \Delta\tilde{v} \tag{4.40}$$

bulunur. Dolayısıyla, (4.39) ve (4.40) denklemleri gözönüne alınırsa

$$\Delta^2\tilde{v} = n\Delta\tilde{v} - n\Delta(e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = n\Delta\tilde{v} - n\Delta\tilde{v} = 0$$

elde edilir. Böylece, M^n horohiperküresinin $\tilde{v}$ hiperbolik Gauss tasviri biharmoniktir.

$\square$

4.2 Hiperbolik Uzaylarda 2-Tipinden Hiperbolik Gauss Tasvrine Sahip Hiperyüzeyler

Bu kısımda, $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde bir hiperyüzeyin 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip izoparametrik yegane hiperyüzeyin $\mathbb{S}^{n-k}(\frac{1}{r^2}) \times \mathbb{H}^k(-\frac{1}{1+r^2})$ standart çarpım uzayı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, 3-boyutlu hiperbolik uzayının tümden ombilik olmayan, sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip yüzeyleri için sınıflandırma teoremi verilmiştir.

Teorem 4.5. *M^n, $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$ hiperbolik uzayının sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip, tümden ombilik olmayan ve yönlendirilebilir bir hiperyüzeyi olsun. M^n hiperyüzeyinin 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul M^n hiperyüzeyinin sabit skaler eğriliğe sahip olmasıdır.*

İspat. M^n, $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$ hiperbolik uzayının sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliğe sahip, tümden ombilik olmayan ve yönlendirilebilir bir hiperyüzeyi olsun. Ayrıca, M^n hiperyüzeyinin skaler eğriliği sabit olsun. Bu durumda, M^n hiperyüzeyinin 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilecektir.

M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{E}_1^{n+2}$ içindeki yer vektörü $\mathbf{x}$ ve $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri de $M^n \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$ üzerinde yerel ortonormal bir baz alanı olsun; öyle ki $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörleri M^n hiperyüzeyine teğet, $e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri M^n hiperyüzeyine normal olsun. $e_{n+2} = \mathbf{x}$ yer vektörü $\mathbb{E}_1^{n+2}$ uzayındaki normal uzayda paralel ve karşıt boyut iki olduğundan e_{n+1} vektörü de normal uzayda paraleldir. Dolayısıyla, M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{E}_1^{n+2}$ içindeki normal demeti düzdür; yani, $R^D = 0$ gerçeklenir. M^n hiperyüzeyinin

$\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içindeki $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliği sabit olduğundan $\hat{H} = \hat{\alpha} e_{n+1}$ vektörü $\mathbb{E}_1^{n+2}$ içinde paraleldir. Ayrıca, M^n hiperyüzeyinin $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliği ve S skaler eğriliği sabit olduğundan (2.26) denkleminden $\|\hat{h}\|^2$ sabit olarak bulunur. $R^D = 0$ ve $\hat{H} = \hat{\alpha} e_{n+1}$ ortalama eğrilik vektörünün paralel olduğu düşünülürse (3.7) denklemi

$$\Delta \tilde{v} = \|\hat{h}\|^2 \tilde{v} + n\hat{\alpha} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{4.41}$$

şekline indirgenir.

$i = 1, 2, \ldots, n$ için $A_{n+1}(e_i) = h_{ii}^{n+1} e_i$ ve $i \neq j$ olmak üzere $h_{ij}^{n+1} = 0$ olacak şekilde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal bir baz takımı seçilebilir. Bu durumda, M^n tümden ombilik olmadığından

$$\begin{aligned}
n(\|\hat{h}\|^2 - n\hat{\alpha}^2) =& n(h_{11}^{n+1})^2 + n(h_{22}^{n+1})^2 + \cdots + n(h_{nn}^{n+1})^2 - (h_{11}^{n+1} + h_{22}^{n+1} + \cdots + h_{nn}^{n+1})^2 \\
=& n(h_{11}^{n+1})^2 + n(h_{22}^{n+1})^2 + \cdots + n(h_{nn}^{n+1})^2 - (h_{11}^{n+1})^2 - \cdots - (h_{nn}^{n+1})^2 \\
& - 2h_{11}^{n+1} h_{22}^{n+1} + \cdots - 2h_{(n-1)(n-1)}^{n+1} h_{nn}^{n+1} \\
=& (n-1)(h_{11}^{n+1})^2 + \cdots + (n-1)(h_{nn}^{n+1})^2 \\
& - 2h_{11}^{n+1} h_{22}^{n+1} - \cdots - 2h_{(n-1)(n-1)}^{n+1} h_{nn}^{n+1} \\
=& \sum_{i<j} \left(h_{ii}^{n+1} - h_{jj}^{n+1} \right)^2 > 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

eşitsizliği sağlanır. $D_0 = \left(\|\hat{h}\|^2 - n\right)^2 + 4n\left(\|\hat{h}\|^2 - n\hat{\alpha}^2\right) > 0$ olsun. $\hat{\alpha}$ ve $\|\hat{h}\|^2$ sabit olduğundan D_0 da sabittir. O halde, (4.42) denkleminden

$$\|\hat{h}\|^2 - n - \sqrt{D_0} = \frac{\left(\|\hat{h}\|^2 - n\right)^2 - D_0}{\|\hat{h}\|^2 - n + \sqrt{D_0}} = \frac{-4n(\|\hat{h}\|^2 - n\hat{\alpha}^2)}{\|\hat{h}\|^2 - n + \sqrt{D_0}} < 0$$

olduğu kolayca elde edilir. $\tilde{v}_p$ ve $\tilde{v}_q$ tasvirleri sırasıyla

$$\tilde{v}_p = -\left(\frac{\|\hat{h}\|^2 + n - \sqrt{D_0}}{2\sqrt{D_0}} \right) \tilde{v} - \frac{n\hat{\alpha}}{\sqrt{D_0}} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \tag{4.43}$$

$$\tilde{v}_q = \left(\frac{\|\hat{h}\|^2 + n + \sqrt{D_0}}{2\sqrt{D_0}} \right) \tilde{v} + \frac{n\hat{\alpha}}{\sqrt{D_0}} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{4.44}$$

olarak alınırsa, $\tilde{v} = \tilde{v}_p + \tilde{v}_q$ gerçeklenir. Ayrıca (4.4) ve (4.41) denklemleri kullanılarak $\Delta \tilde{v}_p = \lambda_p \tilde{v}_p$ ve $\Delta \tilde{v}_q = \lambda_q \tilde{v}_q$ gerçeklendiği görülebilir. Burada, λ_p ve λ_q sabitleri sırasıyla

$$\lambda_p = \frac{\|\hat{h}\|^2 - n - \sqrt{D_0}}{2} < 0$$

ve

$$\lambda_q = \frac{\|\hat{h}\|^2 - n + \sqrt{D_0}}{2} > 0$$

olur. Dolayısıyla, $\tilde{\nu}$ hiperbolik Gauss tasviri 2-tipindendir.

Tersine, M^n hiperyüzeyi 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olsun. Bu durumda, $\tilde{\nu}$ tasviri,

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_p + \tilde{\nu}_q, \quad \Delta\tilde{\nu}_p = \lambda_p \tilde{\nu}_p, \quad \Delta\tilde{\nu}_q = \lambda_q \tilde{\nu}_q \tag{4.45}$$

şeklinde spektral açılıma sahiptir. Burada, $\tilde{\nu}_p$ ve $\tilde{\nu}_q$ sabit olmayan birbirinden farklı tasvirler, λ_p, λ_q sıfırdan farklı sabitler ve $\lambda_p \neq \lambda_q$'dur. (4.45) denkleminden

$$\Delta^2 \tilde{\nu} = (\lambda_p + \lambda_q)\Delta\tilde{\nu} - \lambda_p \lambda_q \tilde{\nu} \tag{4.46}$$

elde edilir. M^n hiperyüzeyinin normal demeti düz ve $\hat{H} = \hat{\alpha} e_{n+1}$ ortalama eğrilik vektörü paralel olduğundan (4.41) denklemi elde edilir. $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliğinin sabit olduğu düşünülerek (4.41) denkleminin Laplace operatörü alınırsa

$$\begin{aligned}\Delta^2 \tilde{\nu} =& \Delta(\|\hat{h}\|^2 \tilde{\nu} + n\hat{\alpha} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ =& \Delta(\|\hat{h}\|^2)\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 \Delta\tilde{\nu} + n\hat{\alpha}\Delta(e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) - 2\sum_{i=1}^{n} e_i(\|\hat{h}\|^2) e_i(\tilde{\nu})\end{aligned} \tag{4.47}$$

bulunur. Ayrıca, (4.47) denkleminde (4.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Delta^2 \tilde{\nu} =& (\|\hat{h}\|^2 - n)\Delta\tilde{\nu} + (\Delta(\|\hat{h}\|^2) + n\|\hat{h}\|^2 - n^2\hat{\alpha}^2)\tilde{\nu} \\ & -2\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^{n+1} e_i(\|\hat{h}\|^2)\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{j-1} \wedge e_{n+1} \wedge e_{j+1} \wedge \cdots \wedge e_n\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.46) ve (4.48) denklemleri kıyaslanırsa $\Delta\tilde{\nu}$ ifadesinin katsayısından $\|\hat{h}\|^2 - n = \lambda_p + \lambda_q$ olduğu görülür. λ_p ve λ_q sıfırdan farklı sabitler olduğundan $\|\hat{h}\|^2$ sabittir. $\|\hat{h}\|^2$ ve $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliği sabit olduğundan, (2.26) denkleminden M^n hiperyüzeyi sabit skaler eğriliğe sahiptir. Bu da ispatı tamamlar. □

$\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde tümden ombilik olmayan, izoparametrik, sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli ve sabit skaler eğrilikli yegane hiperyüzeyin $\mathbb{S}^{n-k}(\frac{1}{r^2}) \times \mathbb{H}^k(-\frac{1}{1+r^2})$ standart çarpım uzayı olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, Teorem 4.5'den aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 4.3. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ *hiperbolik uzayı içinde 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip izoparametrik yegane hiperyüzey* $\mathbb{S}^{n-k}(\frac{1}{r^2}) \times \mathbb{H}^k(-\frac{1}{1+r^2})$ *standart çarpım uzayıdır.*

Teorem 4.6. *M yüzeyi, $\mathbb{H}^3(-1) \subset \mathbb{E}_1^4$ hiperbolik uzayı içinde tümden ombilik olmayan, sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip ve yönlendirilebilir bir yüzey olsun. M yüzeyinin 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M yüzeyinin $\mathbb{S}^1(a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2}) \subset \mathbb{H}^3(-1)$ yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır. Burada, $a^2 - b^2 = -1$'dir.*

İspat. M yüzeyi $\mathbb{S}^1(a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2}) \subset \mathbb{H}^3(-1)$ yüzeyinin açık bir parçası olsun. M yüzeyinin yer vektörü

$$\mathbf{x}(u,v) = (a\cos v,\ a\sin v,\ b\sinh u,\ b\cosh u)$$

şeklinde tanımlasın. M yüzeyinin tümden ombilik olmayan izoparametrik ve sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip olduğu bilinmektedir. Sonuç 4.3' den M yüzeyi 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip bir yüzeydir.

M yüzeyi için,

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial u} = (0,\ 0,\ \cosh u,\ \sinh u),\\
e_2 &= \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial v} = (-\sin v,\ \cos v,\ 0,\ 0),\\
e_3 &= (b\cos v,\ b\sin v,\ a\sinh u,\ a\cosh u),\\
e_4 &= \mathbf{x} = (a\cos v,\ a\sin v,\ b\sinh u,\ b\cosh u)
\end{aligned}$$

olacak şekilde ortonormal bir baz takımı seçilebilir. Doğrudan hesapla kolayca

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = du,\ \omega_2 = dv,\ \omega_{12} = \omega_{34} = 0,\ \omega_{13} = -\frac{a}{b}\omega_1,\\
&\omega_{14} = -\omega_1,\ \omega_{23} = -\frac{b}{a}\omega_2,\ \omega_{24} = -\omega_2
\end{aligned} \tag{4.49}$$

olduğu görülür. Bu formlar ispatın tamamlanmasında kullanılacaktır.

Tersine, M yüzeyi $\mathbb{H}^3(-1) \subset \mathbb{E}_1^4$ hiperbolik uzayı içinde sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliğe sahip tümden ombilik olmayan bir yüzey olsun. M yüzeyi, 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahipse Teorem 4.5'den skaler eğriliği sabittir. O halde, M yüzeyinin Gauss eğriliği de sabittir. $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4 = \mathbf{x}$ vektörleri $M \subset \mathbb{E}_1^4$ üzerinde ortonormal bir baz alanı oluştursun, öyle ki $e_1,\ e_2$ vektörleri M yüzeyine teğet, e_3, $e_4 = \mathbf{x}$ vektörleri ise M yüzeyine normal olsun. M yüzeyinin Gauss eğriliği sabit olduğundan Gauss denkleminden $h_{11}^3 h_{22}^3$ sabittir. $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliği ve $h_{11}^3 h_{22}^3$ sabit olduğundan h_{11}^3 ve h_{22}^3 bileşenleri sabittir. O halde, M yüzeyi izoparametrik bir yüzeydir ve $e_j(h_{ii}^{n+1}) = 0$ gerçeklenir. (2.23) Codazzi denkleminden, $i \neq j$ için

$$(h_{ii}^{n+1} - h_{jj}^{n+1})\omega_{ij}(e_i) = 0$$

bulunur. M yüzeyi tümden ombilik olmadığından $\omega_{12} = 0$ olur. Öyleyse, $K = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = 0$ gerçeklenir. Ayrıca, Gauss denkleminden $h_{11}^3 h_{22}^3 = 1$ elde edilir ve $h_{11}^3 = \rho$ alınırsa $h_{22}^3 = \frac{1}{\rho}$ bulunur.

M yüzeyinin $\mathbb{E}_1^4$ içindeki yer vektörü $e_4 = \mathbf{x}$ normal uzayda paralel ve karşıt boyut iki olduğundan e_3 vektörü de paraleldir. Dolayısıyla, M yüzeyinin $\mathbb{E}_1^4$ içindeki normal demeti düzdür; yani, $\omega_{34} = 0$ olur. Ayrıca, $e_4 = \mathbf{x}$ normal vektörü için $h_{ij}^4 = -\delta_{ij}$ gerçeklenir.

Diğer taraftan M yüzeyi düz olduğundan M üzerinde (u, v) lokal koordinatları seçilebilir, öyle ki $\omega_1 = du$, $\omega_2 = dv$. Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda

$$\omega_{12} = \omega_{34} = 0,\ \omega_{13} = \rho\omega_1,\ \omega_{23} = \frac{1}{\rho}\omega_2,\ \omega_{14} = -\omega_1,\ \omega_{24} = -\omega_2$$

olarak elde edilir. O halde, M yüzeyinin ω_{AB} konneksiyon formları ile (4.49) denkleminden $\mathbb{S}^1(a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2})$ yüzeyinin konneksiyon formlarının çakıştığı görülür. Sonuç olarak, alt manifoldların temel teoreminden M yüzeyi $\mathbb{S}^1(a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2})$ yüzeyinin açık bir parçasına yerel olarak izometriktir. $\square$

Açıklama. Tamamen $\mathbb{H}^4(-1) \subset \mathbb{E}_1^5$ hiperbolik uzay içinde kalan 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip minimal yüzey yoktur.

Bu sonuç ileride vereceğimiz Teorem 5.11'in ispatı gözönüne alındığında doğrudan elde edilmektedir.

5. YARI-HİPERBOLİK UZAYLARDA SONLU TİPTEN YARI-HİPERBOLİK GAUSS TASVİRİNE SAHİP ALT MANİFOLDLAR

Bu bölümde, yarı-hiperbolik uzaylarda sonlu tipten yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar çalışılmıştır. Bu bölüm, yarı-hiperbolik uzaylarda 1-tipinden ve 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar olmak üzere iki kısımda verilmiştir. Öncelikle, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayında 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar incelenmiştir. Ardından, indeksi 1 ya da 2 olan yarı-hiperbolik uzaylarda 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal alt manifoldlar çalışılmıştır.

5.1 Yarı-Hiperbolik Uzaylarda 1-Tipinden Yarı-Hiperbolik Gauss Tasvirine Sahip Alt Manifoldlar

Bu kısımda, yarı-hiperbolik uzaylarda 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar incelenmiştir. İlk olarak, yarı-hiperbolik uzayın yarı-Riemann bir alt manifoldunun $\tilde{v}$ yarı-hiperbolik Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayında yönlendirilebilir bir M_t^n yarı-Riemann alt manifoldunun 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayın maksimal, yönlendirilebilir ve 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yüzeylerinin bir sınıflandırması yapılmıştır. Ardından, $\mathbb{H}_1^4(-1) \subset \mathbb{E}_2^5$ yarı-hiperbolik uzayındaki ışıksal $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörüne sahip uzaysal ve yönlendirilebilir bir M yüzeyinin, spektral açılımında sabit vektörü olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Son olarak, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayındaki ışıksal olmayan $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörüne sahip yönlendirilebilir bir M_t^n yarı-Riemann alt manifoldunun spektral açılımında sabit vektörü olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir.

Önerme 5.1. $\mathbf{x} : (M_t^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$, *n-boyutlu t indeksli yönlendirilebilir bir M_t^n yarı-Riemann manifoldundan $(m-1)$-boyutlu $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içine izometrik bir daldırma olsun. Bu durumda,*

(i) $\hat{\nu} : (M_t^n,\ g) \longrightarrow G(n+1,\ m)$ Obata tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul M_t^n yarı-Riemann manifoldunun $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde ortalama eğrilik vektörünün sıfır olmasıdır;

(ii) $\tilde{\nu} : (M_t^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{E}_q^N$ yarı-hiperbolik Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul M_t^n yarı-Riemann manifoldunun $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde ortalama eğrilik vektörünün sıfır, normal demetinin düz ve skaler eğriliğinin $S = -n(n-1)$ olmasıdır. Burada, $N = \binom{m}{n+1}$ ve q pozitif tamsayılardır.

İspat.

(i) ifadesinin ispatı Önerme 4.1.(i)'nin ispatına benzer şekilde gösterilir.

(ii) $\tilde{\nu} : (M_t^n,\ g) \longrightarrow \mathbb{E}_q^N$ yarı-hiperbolik Gauss tasvirinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul (3.7) denkleminin sıfır olmasıdır. Yani, $\|\hat{h}\|^2 = \hat{H} = R^D = 0$'dır. Dolayısıyla, M_t^n yarı-Riemann manifoldunun ortalama eğriliği sıfır ve normal demeti düzdür. Ayrıca, (2.26) denkleminden M_t^n yarı-Riemann manifoldunun skaler eğriliği sabit ve $S = -n(n-1)$ gerçeklenir. □

$\tilde{\nu}$ yarı-hiperbolik Gauss tasviri 1-tipinden ise (3.9) denkleminden $\lambda_p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\Delta\tilde{\nu} = \lambda_p \tilde{\nu}$ olur. O halde, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayında 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yarı-Riemann alt manifoldlar için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 5.1. *M_t^n, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayında n-boyutlu, t indeksli ve yönlendirilebilir bir alt manifold olsun. M_t^n yarı-Riemann alt manifoldunun 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörünün sıfır, skaler eğriliğinin sabit ve normal konneksiyonunun düz olmasıdır.*

İspat. M_t^n, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayında 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yönlendirilebilir bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. O halde,

$\tilde{\nu}$ yarı-hiperbolik Gauss tasviri, λ_p sabit olmak üzere $\Delta\tilde{\nu} = \lambda_p\tilde{\nu}$ denklemini sağlar. Bu ifade, (3.7) denklemiyle kıyaslanırsa M_t^n alt manifoldunun 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $\hat{H} = R_{sjk}^r = 0$ ve $\|\hat{h}\|^2$'nin sabit olması sonucuna ulaşılır. Yani, M_t^n yarı-Riemann alt manifoldu $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayında ortalama eğrilik vektörü sıfır olan düz normal konneksiyona sahip bir alt manifolddur. Ayrıca, (2.26) formülü göz önüne alınırsa M_t^n yarı-Riemann manifoldu sabit skaler eğriliğe sahiptir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.1'den aşağıdaki sonuçlar doğrudan elde edilir.

Sonuç 5.1. $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ *yarı-hiperbolik uzayında tümden jeodezik yarı-Riemann alt manifoldlarının yarı-hiperbolik Gauss tasviri harmonik olduğundan 1-tipindendir.*

Sonuç 5.2. M_t^n, $\mathbb{H}_s^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^{n+2}$ *yarı-hiperbolik uzayında n-boyutlu, t indeksli ve yönlendirilebilir bir hiperyüzey olsun.* M_t^n *hiperyüzeyinin 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul bu hiperyüzeyin,* $\mathbb{H}_s^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^{n+2}$ *yarı-hiperbolik uzay içinde* $\hat{\alpha}$ *ortalama eğriliğinin sıfır ve skaler eğriliğinin sabit olmasıdır.*

Sonuç 5.3. $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ *yarı-hiperbolik uzayı içinde izoparametrik, ortalama eğriliği sıfır olan has ve yönlendirilebilir bir yarı-Riemann hiperyüzeyi 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahiptir.*

Zhen-qi ve Xian-hua, $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_2^{n+2}$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal ve izoparametrik olan hiperyüzeyleri belirlemiştir, [18]. Bu çalışmada, Zhen-qi ve Xian-hua $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzay içinde izoparametrik, uzaysal bir M^n hiperyüzeyinin en fazla iki tane asal eğriliğe sahip olabileceğini ispatlamıştır. Ayrıca, Zhen-qi ve Xian-hua, $c > 0$ olmak üzere M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzay içinde ombilik $\mathbb{H}^n(-c)$ hiperyüzeyinin açık bir parçasına ya da hiperbolik uzayların standart çarpımı olan

$$\mathbb{H}^k(-c_1) \times \mathbb{H}^{n-k}(-c_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}_1^{k+1} \times \mathbb{R}_1^{n-k+1} :< x,x >= -\frac{1}{c_1}, < y,y >= -\frac{1}{c_2}\}$$

hiperyüzeyinin açık bir parçasına denk olduğunu göstermiştir. Burada $c_1, c_2 > 0$'dır.

Cheng ise, $\mathbb{H}_1^{n+1}(-c)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde izoparametrik, maksimal hiperyüzeyleri belirlemiştir ve aynı çalışmada aşağıdaki sonucu vermiştir, [19].

Sonuç 5.4. *M^n, $\mathbb{H}_1^{n+1}(-c)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal, tam, izoparametrik ve maksimal bir hiperyüzey olsun. O halde $M^n = \mathbb{H}^n(-c)$ ya da $n > n_1 \geq 1$ olmak üzere $M^n = \mathbb{H}^{n_1}\left(\frac{-n}{n_1 c}\right) \times \mathbb{H}^{n-n_1}\left(\frac{-n}{(n-n_1)c}\right)$'dir.*

O halde, Teorem 5.1 ve Sonuç 5.4 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.5. *$\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik $M^n = \mathbb{H}^n(-1)$ hiperbolik uzayı ve $M^n = \mathbb{H}^{n_1}\left(\frac{-n}{n_1 c}\right) \times \mathbb{H}^{n-n_1}\left(\frac{-n}{(n-n_1)c}\right)$ $(n > n_1 \geq 1)$ çarpım manifoldu 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yegane maksimal ve izoparametrik hiperyüzeylerdir.*

Aşağıdaki örnekte, $\mathbb{H}_1^3(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal maksimal bir yüzeyin konneksiyon formları ve ikinci esas formunun bileşenleri hesaplanmıştır. Bu yüzey daha sonra verilecek teoremlerde kullanılacaktır.

Örnek 5.1. $\mathbf{H}_1^3(-1)$ içinde maksimal, uzaysal yüzey

$\mathbf{x} : M = \mathbb{H}^1(-a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2}) \longrightarrow \mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ uzaysal M yüzeyinden $\mathbb{H}_1^3(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içine izometrik bir daldırma olsun. M yüzeyinin $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ içindeki yer vektörü

$$\mathbf{x}(u,v) = (a\sinh u,\ b\sinh v,\ a\cosh u,\ b\cosh v)$$

şeklinde verilsin, öyle ki $a^2 + b^2 = 1$ olsun. M yüzeyi üzerinde

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial u} = (\cosh u,\ 0,\ \sinh u,\ 0),\\
e_2 &= \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial v} = (0,\ \cosh v,\ 0,\ \sinh v),\\
e_3 &= (b\sinh u,\ -a\sinh v\ , b\cosh u\ , -a\cosh v),\\
e_4 &= \mathbf{x}
\end{aligned}$$

vektörleri ortonormal bir baz alanı oluşturur. Doğrudan hesaplamalar sonucunda

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \frac{1}{a}(\sinh u,\ 0,\ \cosh u,\ 0), \tag{5.1}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \frac{1}{b}(0,\ \sinh v,\ 0,\ \cosh v), \tag{5.2}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0 \tag{5.3}$$

bulunur. (5.1), (5.2) ve (5.3) denklemlerinden M yüzeyinin konneksiyon formlarının ve ikinci esas formlarının bileşenleri

$$h_{11}^3 = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_1, e_3 \right\rangle = \frac{-b}{a},\ \ h_{12}^3 = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_2, e_3 \right\rangle = 0,$$

$$h_{22}^3 = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_3 \right\rangle = \frac{a}{b}, \; h_{11}^4 = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_1, e_4 \right\rangle = -1, \tag{5.4}$$

$$h_{12}^4 = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_2, e_4 \right\rangle = 0, \; h_{22}^4 = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_4 \right\rangle = -1,$$

$$\omega_{12}(e_1) = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_1, e_2 \right\rangle = 0, \; \omega_{21}(e_2) = \left\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_1 \right\rangle = 0, \; \omega_{34} = 0$$

şeklinde hesaplanır. O halde, M yüzeyinin şekil operatörleri ve konneksiyon formları, sırasıyla,

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\omega_{12} = \omega_{34} = 0, \; \omega_{13} = -\frac{b}{a}\omega_1, \; \omega_{23} = \frac{a}{b}\omega_2, \; \omega_{14} = -\omega_1, \; \omega_{24} = -\omega_2 \tag{5.5}$$

şeklinde elde edilir. (5.5) denklemi kullanılarak M yüzeyinin $\mathbb{H}_1^3(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içindeki ortalama eğrilik vektörü $\hat{H} = \frac{a^2-b^2}{2ab} e_3$ olarak bulunur. O halde, M yüzeyinin $\mathbb{H}_1^3(-1)$ içinde maksimal olması için gerek ve yeter koşul $a = b$ olmasıdır. Diğer taraftan, $a^2 + b^2 = 1$ olduğundan $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olur. Bu durumda, $\mathbb{H}^1(-2) \times \mathbb{H}^1(-2)$ yüzeyi $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ içinde maksimal ve düz bir yüzeydir. Ayrıca, (2.26) denkleminden M yüzeyinin skaler eğriliği sabittir. O halde, Teorem 5.1 gözönüne alınırsa $\mathbb{H}^1(-2) \times \mathbb{H}^1(-2)$ yüzeyi 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahiptir.

Teorem 5.2. *M, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde yönlendirilebilir, uzaysal bir yüzey olsun. M yüzeyinin 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M yüzeyinin maksimal $\mathbb{H}^1(-2) \times \mathbb{H}^1(-2) \subset \mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yüzeyinin açık bir parçası ya da tümden jeodezik $\mathbb{H}^2(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ hiperbolik uzayının açık bir parçası olmasıdır. Burada, m ve s uygun pozitif tamsayılardır.*

İspat. M yüzeyi $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzay içinde 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yönlendirilebilir uzaysal bir yüzey olsun. O halde, Teorem 5.1'den $t = 0$ için M yüzeyi $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde maksimal, düz normal konneksiyona sahip ve sabit skaler eğriliklidir. Ayrıca, (2.26) denkleminden $\|\hat{h}\|^2$ sabittir.

M yüzeyinin $\mathbb{E}_{s+1}^m$ içindeki yer vektörü $\mathbf{x}$ olsun. M yüzeyi maksimal olduğundan, M üzerinde $e_1, e_2, \ldots, e_m = \mathbf{x}$ ortonormal bir baz alanı seçilebilir, öyle ki e_1, e_2

vektörleri M'ye teğet, $e_3, \ldots, e_{m-1}, e_m = \mathbf{x}$ ise M'ye normal ve

$$A_3 = \begin{pmatrix} h_{11}^3 & 0 \\ 0 & -h_{11}^3 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & h_{12}^4 \\ h_{12}^4 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \cdots = A_{m-1} = 0,\ A_m = -I,$$

olsun. Burada I, 2×2 boyutlu birim matrisi göstermektedir. Dolayısıyla,

$$\|\hat{h}\|^2 = 2\varepsilon_3 (h_{11}^3)^2 + 2\varepsilon_4 (h_{12}^4)^2 \tag{5.6}$$

olur. Ayrıca, (2.24) denkleminden $K^D = R^D(e_1, e_2; e_3, e_4) = -2h_{11}^3 h_{12}^4 = 0$ olarak bulunur. Yani, $h_{11}^3 = 0$ ya da $h_{12}^4 = 0$'dır.

Durum (a) : $h_{11}^3 = 0$ olsun. O halde, $A_3 = 0$ olduğundan M yüzeyinin birinci normal uzayı $\operatorname{Im} h$, sadece e_4 vektörü tarafından gerilmektedir. Yani, M yüzeyi tümden jeodezik $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde ya da tümden jeodezik $\mathbb{H}^3(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içindedir. (5.6) denklemi gözönüne alınırsa $\|\hat{h}\|^2$ sabit olduğundan h_{12}^4 sabittir. (2.23) Codazzi denkleminden $j = 1, 2$ için

$$\omega_{12}(e_j) h_{12}^4 = 0$$

olarak bulunur. Yani, $j = 1, 2$ için $\omega_{12}(e_j) = 0$ veya $h_{12}^4 = 0$ olur.

Durum (a.1) : $j = 1, 2$ için $\omega_{12}(e_j) = 0$ olsun. Bu durumda R eğrilik tensörü sıfırdır, dolayısıyla $K = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = 0$, yani Gauss eğriliği sıfırdır. Ayrıca, Gauss denkleminden $K = -1 + \varepsilon_3 \det A_3 + \varepsilon_4 \det A_4 = -1 - \varepsilon_4 (h_{12}^4)^2 = 0$ olarak bulunur. Bu durumda $(h_{12}^4)^2 = -\varepsilon_4$'dür. O halde, $\varepsilon_4 = -1$ ve $(h_{12}^4)^2 = \pm 1$ olmalıdır. Dolayısıyla, M yüzeyi, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik $\mathbb{H}_1^3(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde kalır. Genelliği bozmadan $h_{12}^4 = 1$ olarak kabul edilsin. Bu durumda, M yüzeyinin A_4 şekil operatörü

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

M yüzeyi üzerinde yeni bir ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ teğet baz vektörleri seçilebilir, öyle ki A_4 şekil operatörü

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olsun. M yüzeyi tümden jeodezik $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde olduğundan genelliği bozmadan M yüzeyinin $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ içine daldırıldığını varsayalım. M yüzeyinin $\mathbb{E}_2^4$ içindeki yer vektörü $e_4 = \mathbf{x}$ olsun. $\mathbf{x}$ normal uzayda paralel ve karşıt boyut 2 olduğundan M yüzeyinin $\mathbb{E}_2^4$ içindeki normal demeti düzdür, yani, $\omega_{34} = 0$'dır. Ayrıca, M yüzeyi düz olduğundan M üzerinde $\omega_1 = du, \omega_2 = dv$ olacak şekilde (u, v) lokal koordinat sistemi seçilebilir. Bu durumda

$$\omega_{12} = \omega_{34} = 0,\ \omega_{13} = \omega_{14} = -\omega_1,\ \omega_{23} = \omega_2,\ \omega_{24} = -\omega_2 \tag{5.7}$$

olarak hesaplanır. M yüzeyinin ω_{AB} konneksiyon formları ile (5.5) denkleminde $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ için $\mathbb{H}^1(-2) \times \mathbb{H}^1(-2)$ yüzeyinin konneksiyon formları çakışmaktadır. O halde, alt manifoldların temel teoreminden M yüzeyi yerel olarak $\mathbb{H}^1(-2) \times \mathbb{H}^1(-2) \subset \mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yüzeyinin açık bir parçasına izometriktir.

Durum (a.2) : $h_{12}^4 = 0$ ve en az bir $j = 1,2$ için $\omega_{12}(e_j) \neq 0$ olsun. O halde, $A_3 = A_4 = \ldots = A_{m-1} = 0$ ve $A_m = -I$ olur. Diğer taraftan, M yüzeyinin Gauss eğriliği $K = -1$ olarak bulunur. Bu durumda, M yüzeyi $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$, yarı-hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik $\mathbb{H}^2(-1)$ hiperboloidinin açık bir parçasıdır.

Durum (b) : $h_{12}^4 = 0$ olsun. İspat Durum (a)'ya benzer şekilde devam ettirildiğinde M yüzeyinin $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde $\mathbb{H}^1(-2) \times \mathbb{H}^1(-2)$ yüzeyinin açık bir parçası ya da $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde tümden jeodezik $\mathbb{H}^2(-1)$ hiperboloidinin açık bir parçası olduğu görülür. Teoremin tersinin ispatı, Örnek 5.1 ve Sonuç 5.5 kullanılarak doğrudan elde edilir. □

Teorem 5.2'in ispatından aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 5.6. *Tamamen $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$, $m \geq 5$, içinde kalan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzey yoktur. Burada, s uygun pozitif bir tamsayıdır.*

Sonraki teoremde, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayında spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar incelenmiştir.

Öncelikle, ileride verilecek teoremin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki örnek verilsin.

Örnek 5.2. $\mathbf{H}_1^4(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal, düz ve ışıksal ortalama eğrilik vektörüne sahip yüzey

$\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{H}_1^4(-1) \subset \mathbb{E}_2^5$ uzaysal bir M yüzeyinden $\mathbb{H}_1^4(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içine tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. M yüzeyinin $\mathbb{H}_1^4(-1) \subset \mathbb{E}_2^5$ içindeki yer vektörü

$$\mathbf{x}(u,v) = (1, \cosh u \sinh v,\ \sinh u,\ \cosh u \cosh v,\ 1) \tag{5.8}$$

şeklinde tanımlansın, [20]. Bu yüzey üzerinde $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5 = \mathbf{x}$ vektörleri

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{\partial}{\partial u} = (0,\ \sinh u \sinh v,\ \cosh u,\ \sinh u \cosh v,\ 0),\\
e_2 &= \frac{1}{\cosh u}\frac{\partial}{\partial v} = (0,\ \cosh v,\ 0,\ \sinh v,\ 0),\\
e_3 &= (\frac{3}{2},\ \cosh u \sinh v,\ \sinh u,\ \cosh u \cosh v,\ \frac{1}{2}),\\
e_4 &= (\frac{1}{2},\ \cosh u \sinh v,\ \sinh u,\ \cosh u \cosh v,\ -\frac{1}{2}),\ e_5 = \mathbf{x}
\end{aligned}$$

şeklinde seçilsin. $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5\}$ vektörleri M üzerinde ortonormal bir baz alanı oluşturur. Doğrudan hesaplamalar sonucunda

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = (0,\ \cosh u \sinh v,\ \sinh u,\ \cosh u \cosh v,\ 0), \tag{5.9}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_4 = (0,\ \sinh u \sinh v,\ \cosh u,\ \sinh u \cosh v,\ 0), \tag{5.10}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \frac{1}{\cosh u}(0,\ \sinh v,\ 0,\ \cosh v,\ 0), \tag{5.11}$$

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_3 = \frac{1}{\cosh u}(0,\ \cosh u \cosh v,\ 0,\ \cosh u \sinh v,\ 0) \tag{5.12}$$

olur. (5.9), (5.10), (5.11), (5.12) denklemleri ve Gauss, Weingarten formülleri kullanılarak M yüzeyinin konneksiyon ve ikinci esas formlarının bileşenleri

$$\begin{aligned}
&h_{11}^3 = \langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_1, e_3 \rangle = -1,\ \ h_{12}^3 = -\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_3, e_1 \rangle = 0,\\
&h_{22}^3 = -\langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_3, e_2 \rangle = -1,\ \ h_{11}^4 = -\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_4, e_1 \rangle = -1,\\
&h_{12}^4 = -\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_4, e_2 \rangle = 0,\ \ h_{22}^4 = \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_4 \rangle = -1,\\
&\omega_{12}(e_1) = \langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_1, e_2 \rangle = 0,\ \ \omega_{21}(e_2) = \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_1 \rangle = -\tanh u,\\
&\omega_{34}(e_1) = \omega_{34}(e_2) = 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

olarak hesaplanır. (5.13) denkleminden M yüzeyinin $\mathbb{H}_1^4(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde $\|\hat{h}\|^2$ ve $\hat{H}$, sırasıyla,

$$\|\hat{h}\|^2 = 0$$

ve

$$\hat{H} = e_4 - e_3 = (-1, 0, 0, 0, -1)$$

olur. $\hat{H} \neq 0$ ve $\langle \hat{H}, \hat{H} \rangle = 0$ olduğundan $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörü ışıksaldır. (5.13) değerleri (3.7) denkleminde kullanılırsa

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}} = 2\hat{H} \wedge e_1 \wedge e_2 = -2e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 + 2e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 \tag{5.14}$$

olarak bulunur. $\tilde{c}$ ve $\tilde{\nu}_p$ tasvirleri sırasıyla,

$$\tilde{c} = \tilde{\nu} - e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 + e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 \tag{5.15}$$

ve

$$\tilde{\nu}_p = e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 - e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 \tag{5.16}$$

olarak seçilsin. Bu durumda, $\tilde{\nu} = \tilde{c} + \tilde{\nu}_p$ eşitliği sağlanır. Ayrıca, $i = 1, 2$ için $e_i(\tilde{c}) = 0$ olduğu kolayca gösterilebilir. O halde, $\tilde{c}$ sıfırdan farklı sabit bir vektördür. (5.14), (5.15) ve (5.16) denklemleri kullanılarak, $\Delta\tilde{\nu}_p = -2\tilde{\nu}_p$ sağlanır. Sonuç olarak, M yüzeyi $\mathbb{H}_1^4(-1)$ içinde ortalama eğrilik vektörü ışıksal olan ve spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip bir yüzeydir.

Teorem 5.3. *M, $\mathbb{H}_1^4(-1) \subset \mathbb{E}_2^5$ yarı-hiperbolik uzayında ışıksal $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörüne sahip yönlendirilebilir uzaysal bir yüzey olsun. M yüzeyinin, spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M yüzeyinin* (5.8) *ile verilen* -1 *eğrilikli, tümden ombilik ve sabit ışıksal ortalama eğrilik vektörüne sahip yüzeyin açık bir parçası olmasıdır.*

İspat. $\mathbf{x} : M \longrightarrow \mathbb{H}_1^4(-1) \subset \mathbb{E}_2^5$ uzaysal bir M yüzeyinden $\mathbb{H}_1^4(-1)$ yarı-hiperbolik uzayına tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. İlk olarak, M yüzeyinin, $\mathbb{H}_1^4(-1)$ yarı-hiperbolik uzayında spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yönlendirilebilir uzaysal bir yüzey olsun. O halde, $\tilde{c}$ sabit bir vektör ve $\lambda_p \neq 0$ reel sayı olmak üzere $\tilde{\nu}$ yarı-hiperbolik Gauss tasviri

$$\Delta\tilde{\nu} = \lambda_p(\tilde{\nu} - \tilde{c}) \tag{5.17}$$

eşitliğini sağlar. (5.17) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$(\Delta\tilde{\nu})_i = \lambda_p(\tilde{\nu})_i \tag{5.18}$$

gerçeklenir; burada $(.)_i = e_i(.)$'dır. Ayrıca $e_i(\tilde{\nu})$,

$$e_i(\tilde{\nu}) = \sum_{r=3}^{4}\sum_{k=1}^{2} \varepsilon_r h_{ik}^r \mathbf{x} \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge e_2 \tag{5.19}$$

olarak hesaplanır. O halde, (3.7) denklemi

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\nu} =& \|\hat{h}\|^2\tilde{\nu} + 2\hat{H}\wedge e_1\wedge e_2 - 2\sum_{j=1}^{2}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\underbrace{D_{e_j}\hat{H}}_{j-inci}\\ &+\sum_{\substack{r,s\\ s<r}}^{4}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{2}\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\mathbf{x}\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\end{aligned} \tag{5.20}$$

haline indirgenir. (5.20) denkleminde her bir terimin e_i doğrultusunda türevi alınırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned}e_i(\|\hat{h}\|^2\tilde{\nu}) &= (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 e_i(\tilde{\nu})\\ &= (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2\sum_{r=3}^{4}\sum_{k=1}^{2}\varepsilon_r h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge\underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge e_2,\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}e_i(\hat{H}\wedge e_1\wedge e_2) =& \tilde{\nabla}_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge e_2 + \hat{H}\wedge\tilde{\nabla}_{e_i}e_1\wedge e_2 + \hat{H}\wedge e_1\wedge\tilde{\nabla}_{e_i}e_2\\ =&(-A_{\hat{H}}(e_i) + D_{e_i}\hat{H})\wedge e_1\wedge e_2 + \hat{H}\wedge(\sum_{k=1}^{2}\omega_{1k}(e_i)e_k\\ &+\sum_{r=3}^{4}\varepsilon_r h^r_{i1}e_r + \delta_{i1}\mathbf{x})\wedge e_2 + \hat{H}\wedge e_1\wedge(\sum_{k=1}^{2}\omega_{2k}(e_i)e_k + \sum_{r=3}^{4}\varepsilon_r h^r_{i2}e_r + \delta_{i2}\mathbf{x})\\ =&D_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge e_2 + \sum_{r=3}^{4}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_r h^r_{ij}\hat{H}\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge e_2 + \hat{H}\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci}\wedge e_2,\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}-e_i(\mathbf{x}\wedge D_{e_1}\hat{H}\wedge e_2) - e_i(\mathbf{x}\wedge e_1\wedge D_{e_2}\hat{H}) =&\\ &-(e_i\wedge D_{e_1}\hat{H}\wedge e_2 + \mathbf{x}\wedge\tilde{\nabla}_{e_i}(D_{e_1}\hat{H})\wedge e_2 + \mathbf{x}\wedge D_{e_1}\hat{H}\wedge\tilde{\nabla}_{e_i}e_2)\\ &-(e_i\wedge e_1\wedge D_{e_2}\hat{H} + \mathbf{x}\wedge\tilde{\nabla}_{e_i}e_1\wedge D_{e_2}\hat{H} + \mathbf{x}\wedge e_1\wedge\tilde{\nabla}_{e_i}(D_{e_2}\hat{H}))\\ =&D_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge e_2 + \sum_{k=1}^{2}\left\langle A_{D_{e_k}\hat{H}}(e_i), e_k\right\rangle\tilde{\nu}\\ &-\sum_{k=1}^{2}\mathbf{x}\wedge\underbrace{D_{e_i}D_{e_k}}_{k-inci}\hat{H}\wedge e_2 - \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{2}\omega_{jk}(e_i)\mathbf{x}\wedge\underbrace{e_k}_{j-inci}\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\\ &-\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{2}\sum_{r=3}^{4}\varepsilon_r h^r_{ij}\mathbf{x}\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci},\end{aligned} \tag{5.23}$$

ve

$$
\begin{aligned}
e_i(\sum_{\substack{r,s\\ s<r}}^{4}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{2}\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\mathbf{x}\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}) =& e_i(2\varepsilon_3\varepsilon_4 R^4_{321}\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4)\\
=& 2\varepsilon_3\varepsilon_4 e_i(R^4_{321})\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4+2\varepsilon_3\varepsilon_4 R^4_{321}e_i\wedge e_3\wedge e_4\\
&-2\varepsilon_3\varepsilon_4 R^4_{321}\sum_{k=1}^{2}h^3_{ik}\mathbf{x}\wedge e_k\wedge e_4\\
&-2\varepsilon_3\varepsilon_4 R^4_{321}\sum_{k=1}^{2}h^4_{ik}\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_k
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

bulunur. (5.21), (5.22), (5.23) ve (5.24) ifadeleri (5.18) denkleminde yerine konulur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
e_i(\Delta\tilde{v}) =& (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{v}+\|\hat{h}\|^2\sum_{r=3}^{4}\sum_{k=1}^{2}\varepsilon_r h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge\underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge e_2+4D_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge e_2\\
&+2\sum_{r=3}^{4}\sum_{k=1}^{2}\varepsilon_r h^r_{ik}\hat{H}\wedge\underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge e_2+2\sum_{k=1}^{2}\delta_{ik}\hat{H}\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{k-inci}\wedge e_2\\
&-2\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{2}\omega_{jk}(e_i)\mathbf{x}\wedge\underbrace{e_k}_{j-inci}\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}-2\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{2}\sum_{r=3}^{4}\varepsilon_r h^r_{ij}\mathbf{x}\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\\
&+2\sum_{k=1}^{2}\left\langle A_{D_{e_k}\hat{H}}(e_i),e_k\right\rangle\tilde{v}-2\sum_{k=1}^{2}\mathbf{x}\wedge\underbrace{D_{e_i}D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge e_2\\
&+2\varepsilon_3\varepsilon_4\big(e_i(R^4_{321})\mathbf{x}+R^4_{321}e_i\big)\wedge e_3\wedge e_4-2\varepsilon_3\varepsilon_4 R^4_{321}\sum_{k=1}^{2}h^3_{ik}\mathbf{x}\wedge e_k\wedge e_4\\
&-2\varepsilon_3\varepsilon_4 R^4_{321}\sum_{k=1}^{2}h^4_{ik}\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_k
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

elde edilir.

M yüzeyi $\mathbb{H}^4_1(-1)$ yarı-hiperbolik uzay içinde ışıksal ortalama eğrilik vektörüne sahip olduğundan $\langle\hat{H},\hat{H}\rangle=0$ ve $\hat{H}\neq 0$ olur. (5.18), (5.19) ve (5.25) denklemleri gözönüne alınırsa $D_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ terimi $(\Delta\tilde{v})_i$ ifadesinde bulunmakta fakat $e_i(\tilde{v})$ ifadesinde bulunmamaktadır. Bu yüzden $D\hat{H}=0$ olmalıdır. Yani, M yüzeyi $\mathbb{H}^4_1(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde sıfırdan farklı paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir. M yüzeyinin $\mathbb{H}^4_1(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde karşıt boyutu 2 ve $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörü paralel olduğundan normal demeti düz, yani $R^D=0$'dır. Bu durumda, A_3, A_4 şekil operatörleri köşegenleştirilebilecek şekilde bir ortonormal $\{e_1,e_2\}$ teğet baz vektörleri seçilebilir. (5.25) denkleminde $D\hat{H}=0$ ve $R^D=0$ olduğu gözönüne alınırsa $e_i(\Delta\tilde{v})$

$$
\begin{aligned}
e_i(\Delta\tilde{v}) =& (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{v} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r=3}^{4}\sum_{k=1}^{2} \varepsilon_r h_{ik}^r \mathbf{x} \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge e_2 \\
&+ 2\sum_{r=3}^{4}\sum_{k=1}^{2} \varepsilon_r h_{ik}^r \hat{H} \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge e_2 + 2\hat{H} \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci} \wedge e_2
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

haline indirgenir. (5.18), (5.19) ve (5.26) denklemleri kıyaslanırsa $\|\hat{h}\|_i^2 = 0$; yani $\|\hat{h}\|^2$ sabittir. Ayrıca, aynı denklemden

$$
\|\hat{h}\|^2 \sum_{r=3}^{4}\sum_{k=1}^{2} \varepsilon_r h_{ik}^r \mathbf{x} \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge e_2 + 2\hat{H} \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci} \wedge e_2 = \lambda_p \sum_{r=3}^{4}\sum_{k=1}^{2} h_{ik}^r \mathbf{x} \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge e_2 \tag{5.27}
$$

ve

$$
\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=3}^{4} \varepsilon_r h_{ik}^r \hat{H} \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge e_2 = 0 \tag{5.28}
$$

elde edilir. A_3, A_4 şekil operatörleri köşegenleştirilmiş olduğundan $h_{12}^3 = h_{12}^4 = 0$'dır. O halde, (5.28) denkleminde $h_{12}^3 = h_{12}^4 = 0$ olduğu gözönüne alınırsa $i = 1,2$ için

$$
\mathrm{tr}A_4 h_{ii}^3 - \mathrm{tr}A_3 h_{ii}^4 = 0 \tag{5.29}
$$

olur. $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörü ışıksal olduğundan $\hat{H} = \varepsilon_3 a e_3 + \varepsilon_4 b e_4$ olarak seçilebilir. Burada, $a = \frac{1}{2}\mathrm{tr}A_3$ ve $b = \frac{1}{2}\mathrm{tr}A_4$ sağlanır. Ayrıca, $\langle \hat{H}, \hat{H} \rangle = 0$ olduğundan $a^2 = b^2$ gerçeklenir. Bu durumda, $\varepsilon^* = \pm 1$ olmak üzere $b = \varepsilon^* a$ sağlanır. Öyleyse, ortalama eğrilik vektörü $\hat{H} = a(\varepsilon_3 e_3 + \varepsilon^* \varepsilon_4 e_4)$ olur. Genelliği bozmadan $\varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_4 = -1$ alınırsa $\hat{H} = a(e_3 - \varepsilon^* e_4)$ olarak yazılır. $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörü paralel, yani, $D\hat{H} = 0$ olduğundan a sıfırdan farklı bir sabittir. (5.29) denkleminde $b = \varepsilon^* a$ olduğu kullanılırsa $i = 1,2$ için $a(h_{ii}^3 - \varepsilon^* h_{ii}^4) = 0$ bulunur, yani $h_{ii}^3 = \varepsilon^* h_{ii}^4$ olur. Bu durumda, M yüzeyinin $\mathbb{H}_1^4(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde $\|\hat{h}\|^2 = 0$, skaler eğriliği $S = -2$ ve Gauss eğriliği $K = -1$'dir. Diğer taraftan, (5.27) denkleminden $i = 1,2$ için $\lambda_p h_{ii}^3 = -2a$ ve $\lambda_p h_{ii}^4 = -2a$ olarak bulunur. λ_p ve a'nın sabitler olduğu düşünülürse, M yüzeyinin ikinci esas formunun katsayıları h_{ii}^r'ler sabittir. Öyleyse, M yüzeyi $\mathbb{H}_1^4(-1) \subset \mathbb{E}_2^5$ yarı-hiperbolik uzayı içinde tümden ombiliktir. $\lambda_p h_{11}^3 = -2a$ ve $\lambda_p h_{22}^3 = -2a$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $a(\lambda_p + 2) = 0$, dolayısıyla $\lambda_p = -2$'dir. Bu durumda, $h_{11}^3 = h_{22}^3 = \varepsilon^* h_{11}^4 = \varepsilon^* h_{22}^4$ olur. Ayrıca şekil operatörleri $A_3 = aI$ ve $A_4 = \varepsilon^* aI$ şeklindedir. Diğer taraftan,

$$\tilde{\nabla}_{e_i}\hat{H} = -A_{\hat{H}}e_i + D_{e_i}\hat{H} \tag{5.30}$$

ve $D_{e_i}\hat{H} = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_i}\hat{H} &= -A_{(ae_3 - a\varepsilon^* e_4)}e_i \\ &= -a(A_{e_3}e_i - \varepsilon^* A_{e_4}e_i) \\ &= -a(ae_i - \varepsilon^*\varepsilon^* ae_i) = 0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

olur. Yani, $\hat{H} = a(e_3 - \varepsilon^* e_4)$ ortalama eğrilik vektörü sabittir. O halde, M yüzeyi $\mathbb{H}^4_1(-1)$ yarı-hiperbolik uzay içinde tümden ombilik, sabit ışıksal $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörüne sahip, Gauss eğriliği -1 olan bir yüzeydir. M yüzeyinin (5.8) ile tanımlı yüzeye denk olduğu Chen ve Veken tarafından, [20], makalesinde Teorem 8.1.(a)'nın ispatında gösterilmiştir.

Teoremin tersinin ispatı Örnek 5.2' den görülür. □

Yardımcı Teorem 5.1. *M^n_t, $\mathbb{H}^{n+1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^{n+2}_{s+1}$ yarı-hiperbolik uzayında t indeksli bir hiperyüzey olsun. M^n_t üzerinde tanımlı $\bar{\nu} = e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ tasvirinin Laplace operatörü,*

$$\Delta\bar{\nu} = -n\hat{\alpha}\tilde{\nu} - n\bar{\nu} \tag{5.32}$$

şeklindedir; burada $\hat{\alpha}$, M hiperyüzeyinin $\mathbb{H}^{n+1}_s(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içindeki ortalama eğriliğidir.

İspat. $\mathbf{x} : M^n_t \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^{n+2}_{s+1}$, t indeksli bir M^n_t yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{H}^{n+1}_s(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içine izometrik bir daldırma olsun. $M^n_t \subset \mathbb{E}^{n+2}_{s+1}$ üzerinde $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ ortonormal bir baz alanı seçilebilir, öyle ki $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektörleri M^n_t'ye teğet, e_{n+1}, $e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri ise M^n_t'ye normal olsunlar. $e_{n+2} = \mathbf{x}$ yer vektörü normal uzayda paralel ve karşıt boyut iki olduğundan e_{n+1} vektörü de paraleldir.

Öncelikle $\bar{\nu}$ tasvirinin e_i doğrultusundaki türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} e_i\bar{\nu} =& \tilde{\nabla}_{e_i}e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ \sum_{j=1}^{n} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_j}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(-A_{n+1}(e_i)+D_{e_i}e_{n+1})\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n\\
&\quad+\sum_{j,k=1}^{n}\varepsilon_k\omega_{jk}(e_i)e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_k}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{n+2}\varepsilon_r h^r_{ij}e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&=\varepsilon_i e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci}\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_n \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\nabla_{e_i}e_i=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\omega_{ij}(e_i)e_j$ olduğundan

$$
(\nabla_{e_i}e_i)\bar{v} \;=\; \sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(e_i)e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \qquad (5.34)
$$

olarak bulunur. (5.33) denkleminin e_i doğrultusunda türevi hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
e_ie_i(\bar{v}) &=\varepsilon_i\tilde{\nabla}_{e_i}e_{n+1}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&\quad+\varepsilon_i\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}e_{n+1}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_j}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&\quad+\varepsilon_i e_{n+1}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&=\varepsilon_i(-A_{n+1}(e_i)+D_{e_i}e_{n+1})\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&\quad+\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\omega_{ji}e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_i}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&\quad+\varepsilon_i\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{r=n+1}^{n+2}\varepsilon_r h^r_{ij}e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{i-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&\quad+\varepsilon_i\bar{v}\\
&=\varepsilon_i\bar{v}+h^{n+1}_{ii}\tilde{v}-\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\omega_{ji}(e_i)e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \qquad (5.35)
\end{aligned}
$$

bulunur. (2.30) denklemi, $n\hat{\alpha}=\mathrm{tr}A_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i h^{n+1}_{ii}$ ve $\omega_{ij}(e_i)+\omega_{ji}(e_i)=0$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\Delta\bar{v} &= -n\hat{\alpha}\tilde{v}-n\bar{v}+\sum_{i,j=1}^{n}(\omega_{ij}(e_i)+\omega_{ji}(e_i))e_{n+1}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&= -n(\hat{\alpha}\tilde{v}+\bar{v}) \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Bu da ispatı tamamlar. □

Sonraki teoremde, $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$ yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu t indeksli, ışıksal olmayan $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörüne sahip yönlendirilebilir bir M^n_t yarı-Riemann manifoldunun spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar araştırılmıştır. Tez çalışmasında genel olarak uzaysal alt manifoldlar üzerine çalışılmıştır. Ancak, bu teoremde yarı-Riemann alt manifoldları için benzer sonuçlar elde edildiğinden teorem daha genel olarak ifade edilmiştir. Ardından, özel olarak uzaysal yönlendirilebilir bir M^n manifoldu için de teorem ifade edilmiştir.

Teorem 5.4. *M^n_t, $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$ yarı-hiperbolik uzayında ışıksal olmayan $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörüne sahip, n-boyutlu, t indeksli ve yönlendirilebilir bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. M^n_t alt manifoldunun spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M^n_t yarı-Riemann alt manifoldunun tümden jeodezik $\mathbb{H}^{n+1}_{s^*}(-1) \subset \mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$, $s^* = t \leq s$ ya da $s^* = t+1 \leq s$ yarı-hiperbolik uzayı içinde düz olmayan, tümden jeodezik olmayan ve tümden ombilik yarı-hiperbolik hiperyüzeyin açık bir parçası olmasıdır. Yani, M^n_t alt manifoldu*

(1) $\mathbb{H}^{n+1}_{t+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, $-c$ $(c > 1)$ eğrilikli $\mathbb{H}^n_t(-c)$ yarı-hiperbolik uzayın ya da

(2) $\mathbb{H}^{n+1}_t(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, $-c$ $(0 < c < 1)$ eğrilikli $\mathbb{H}^n_t(-c)$ yarı-hiperbolik uzayın ya da

(3) $\mathbb{H}^{n+1}_t(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, c $(>)0$ eğrilikli $\mathbb{S}^n_t(c)$ yarı-kürenin açık bir parçasıdır.

İspat. $\mathbf{x} : M^n_t \longrightarrow \mathbb{H}^{m-1}_s(-1) \subset \mathbb{E}^m_{s+1}$, n-boyutlu t indeksli yönlendirilebilir bir M^n_t yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içine tanımlanmış izometrik bir daldırma olsun. Öncelikle M^n_t, $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1)$ yarı-hiperbolik uzayında ışıksal olmayan $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörüne sahip spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yarı-Riemann bir alt manifold olsun. Bu durumda, $\tilde{c} \in \mathbb{E}^N_q$ sabit vektör ve $\lambda_p \neq 0$ reel sayı olmak üzere yarı-hiperbolik Gauss tasviri

$$\Delta\tilde{\nu} = \lambda_p(\tilde{\nu} - \tilde{c})$$

eşitliğini sağlar. Dolayısıyla,

$$(\Delta\tilde{\nu})_i = \lambda_p(\tilde{\nu})_i \tag{5.37}$$

olur; burada $(.)_i = e_i(.)$'dır. $\Delta\tilde{\nu}$, Laplace operatörü ifadesindeki her bir terimin sırasıyla e_i doğrultusunda türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} e_i(\|\hat{h}\|^2\tilde{\nu}) =& (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 e_i(\tilde{\nu}) \\ =& (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_r h_{ik}^r \mathbf{x}\wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n, \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned} & e_i(n\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n) \\ &= n\tilde{\nabla}_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n + \sum_{k=1}^{n} n\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_k}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\ &= n(-A_{\hat{H}}(e_i) + D_{e_i}\hat{H})\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n + \sum_{k=1}^{n} n\hat{H}\wedge\cdots\wedge \underbrace{(\nabla_{e_i}e_k + h(e_i,e_k))}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\ &= nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} n\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\omega_{kj}(e_i)e_j + \sum_{r=n+1}^{m}\varepsilon_r h_{ik}^r e_r)}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\ &= nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n \\ &\quad + n\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m}\varepsilon_r h_{ik}^r\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\ &= nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n \\ &\quad + n\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1}\varepsilon_r h_{ik}^r\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\ &\quad + n\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}\widehat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n, \end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned} e_i(n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge \underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n) &= n\sum_{k=1}^{n}\tilde{\nabla}_{e_i}\mathbf{x}\wedge\cdots\wedge \underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \\ + n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\mathbf{x}\wedge\cdots\wedge \underbrace{\{\sum_{\ell=1}^{n}\varepsilon_\ell\omega_{j\ell}(e_i)e_\ell + \sum_{r=n+1}^{m-1}\varepsilon_r h_{ij}^r e_r\}}_{j-inci} &\wedge\cdots\wedge \underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\{-A_{D_{e_k}\hat{H}}(e_i)+D_{e_i}D_{e_k}\hat{H}\}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
=&-nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_k\omega_{jk}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_k}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1}\varepsilon_r h_{ij}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-n\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left\langle A_{D_{e_k}\hat{H}}(e_i),e_k\right\rangle\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_i}D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&e_i\Big(\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R_{sjk}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\Big)\\
=&\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s e_i(R_{sjk}^r)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R_{sjk}^r\tilde{\nabla}_{e_i}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j,k,\ell\neq}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R_{sjk}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_\ell}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R_{sjk}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R_{sjk}^r\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{\tilde{\nabla}_{e_i}e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
=&\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\{e_i(R_{sjk}^r)\mathbf{x}+R_{sjk}^r e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell,h=1\\ j,k,\ell\neq}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_h R_{sjk}^r\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_h}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s,t=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j,k,\ell\neq}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_t R_{sjk}^r h_{i\ell}^t\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_\ell R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s,t=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_t R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_\ell R^r_{sjk}h^r_{i\ell}\,\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s,t=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_t R^r_{sjk}\omega_{rt}(e_i)\,\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
=&\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}+R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell\\ j,k,\ell\neq}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\{\sum_{h=1}^{n}\varepsilon_h\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_h}_{\ell-inci}\wedge\cdots\\
&\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{t=n+1}^{m-1}\varepsilon_t h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\}\\
&-\sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k,}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_\ell R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{r,s,t=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_t R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}\tag{5.41}
$$

şeklinde hesaplanır. (5.38), (5.39), (5.40) ve (5.41) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
e_i(\Delta\tilde{\nu})=&(\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu}+\|\hat{h}\|^2\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_r h^r_{ik}\,\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+2nD_{e_i}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n+n\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1}\varepsilon_r h^r_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+n\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_i\delta_{ik}\hat{H}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{\mathbf{x}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_k\omega_{jk}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_k}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&-n\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1}\varepsilon_r h^r_{ij}\,\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\cdots\wedge\underbrace{D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+n\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big\langle A_{D_{e_k}\hat{H}}(e_i),e_k\Big\rangle\tilde{\nu}-n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{D_{e_i}D_{e_k}\hat{H}}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}+R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell\\ j,k,\ell\neq}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\{\sum_{h=1}^{n}\varepsilon_h\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_h}_{\ell-inci}\wedge\cdots\\
&\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{t=n+1}^{m-1}\varepsilon_t h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\}\\
&-\sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_\ell R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{r,s,t=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_t R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

olarak hesaplanır.

Durum (a) : $\hat{H}=0$ olsun. Bu durumda, (5.42) denklemi

$$
\begin{aligned}
&e_i(\Delta\tilde{\nu})=(\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu}+\|\hat{h}\|^2\sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_r h^r_{ik}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x}+R^r_{sjk}e_i\}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell\\ j,k,\ell\neq}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\{\sum_{h=1}^{n}\varepsilon_h\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_h}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{t=n+1}^{m-1}\varepsilon_t h^t_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{\ell-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_s}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\}\\
&-\sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_\ell R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_\ell}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n\\
&+\sum_{r,s,t=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_t R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x}\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_t}_{k-inci}\wedge\cdots\wedge\underbrace{e_r}_{j-inci}\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

şekline indirgenir. (3.2), (5.37) ve (5.43) denklemleri kıyaslanırsa,

$$\|\hat{h}\|_i^2 = R^r_{sjk} = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda, $\|\hat{h}\|^2$ sabittir ve M^n_t yarı-Riemann manifoldunun normal konneksiyonu düzdür. Ayrıca (2.26) denkleminden M^n_t yarı-Riemann manifoldunun skaler eğriliği sabittir. O halde, Teorem 5.1'den M^n_t yarı-Riemann manifoldunun $\tilde{\nu}$ yarı-hiperbolik Gauss tasviri 1-tipinden ve $\tilde{c} = 0$ olur. Ancak teoremin kabulünden bu bir çelişkidir. O halde, $\hat{H} = 0$ olamaz.

Durum (b) : $\hat{H} \neq 0$ olsun. (5.42) denklemi düşünülürse $D_{e_i}\hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ terimi $(\Delta\tilde{\nu})_i$ ifadesinde bulunmakta fakat $e_i(\tilde{\nu})$ ifadesinde bulunmamaktadır. (3.2), (5.37) ve (5.42) denklemleri kıyaslanırsa $D\hat{H} = 0$ olarak bulunur. Bu durumda, M^n_t yarı-Riemann manifoldu $\mathbb{H}^{m-1}_s(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde sıfırdan farklı paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir. Dolayısıyla (5.42) denklemi

$$\begin{aligned}
e_i(\Delta\tilde{\nu}) &= (\|\hat{h}\|^2)_i\tilde{\nu} + \|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_r h^r_{ik}\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ n\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r h^r_{ik}\hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ n\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i\delta_{ik}\hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s\{e_i(R^r_{sjk})\mathbf{x} + R^r_{sjk}e_i\} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1\\ s<r}}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell\\ j,k,\ell\neq}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s R^r_{sjk}\{\sum_{h=1}^{n} \varepsilon_h\omega_{\ell h}(e_i)\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_h}_{\ell-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{t=n+1}^{m-1} \varepsilon_t h^t_{i\ell}\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_t}_{\ell-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n\} \\
&- \sum_{r,s=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k,\ell=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_\ell R^r_{sjk}h^s_{i\ell}\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_\ell}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{r,s,t=n+1}^{m-1}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_r\varepsilon_s\varepsilon_t R^r_{sjk}\omega_{st}(e_i)\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_t}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n
\end{aligned} \tag{5.44}$$

şekline indirgenir. (3.2), (5.37) ve (5.44) denklemleri kıyaslanırsa $\|\hat{h}\|_i^2 = 0$, yani $\|\hat{h}\|^2$ sabittir. Diğer taraftan (3.2), (5.37) ve (5.44) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
&\|\hat{h}\|^2 \sum_{r=n+1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_r h_{ik}^r \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+n \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i \delta_{ik} \hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathbf{x}}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&- \sum_{r,s=n+1}^{m-1} \sum_{\substack{j,k,\ell=1 \\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_r \varepsilon_s \varepsilon_\ell R_{sjk}^r h_{i\ell}^s \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_\ell}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&= \lambda_p \sum_{r=n+1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_r h_{ik}^r \mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&n \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m-1} \varepsilon_r h_{ik}^r \hat{H} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n \\
&+ \sum_{\substack{r,s=n+1 \\ s<r}}^{m-1} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} \varepsilon_r \varepsilon_s R_{sjk}^r e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_s}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n = 0
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

elde edilir. $\langle \hat{H}, \hat{H} \rangle$ sabit olduğundan $\hat{H} = \varepsilon_{n+1} \hat{\alpha} e_{n+1}$ olarak alınabilir. O halde, (5.46) denkleminden $r,s \geq n+2$ ve $j,k = 1,\ldots,n$ için $R_{sjk}^r = 0$ bulunur. Ayrıca, $D\hat{H} = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
R_{sjk}^{n+1} &= R^D(e_j, e_k; e_{n+1}, e_s) = \left\langle R^D(e_j, e_k) e_{n+1}, e_s \right\rangle \\
&= \left\langle D_{e_j} D_{e_k} e_{n+1} - D_{e_k} D_{e_j} e_{n+1} - D_{\left[e_j, e_k\right]} e_{n+1}, e_s \right\rangle = 0
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

olur. Öyleyse, $r,s \geq n+1$ ve $j,k = 1,\ldots,n$ için $R_{sjk}^r = 0$, yani, M_t^n yarı-Riemann manifoldunun $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde normal konneksiyonu düzdür. Bu durumda, (5.46) denklemi

$$
n \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=n+2}^{m-1} \varepsilon_r \varepsilon_{n+1} \hat{\alpha} h_{ik}^r \, e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_r}_{k-inci} \wedge \cdots \wedge e_n = 0 \tag{5.48}
$$

şekline indirgenir. (5.48) denkleminden $r \geq n+2$ ve $i,k = 1,\ldots,n$ için $h_{ik}^r = 0$ bulunur. Ayrıca, (5.48) denkleminden $h_{ik}^{n+1} \neq 0$ olduğundan M_t^n yarı-Riemann manifoldunun birinci normal uzayı *Imh*, e_{n+1} vektörü tarafından gerilir. O halde Erbacher-Magid İndirgeme Teoreminden, M_t^n yarı-Riemann manifoldu, tümden jeodezik $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içindedir. Burada, $s^* = t \leq s$ ya da $s^* = t+1 \leq s$'dir. Diğer taraftan, $r \geq n+2$ ve $i,k = 1,\ldots,n$ için $h_{ik}^r = 0$ olduğundan (5.45) denkleminden

$$
\left(\|\hat{h}\|^2 - \lambda_p \right) h_{ik}^{n+1} = n \hat{\alpha} \varepsilon_i \delta_{ik} \tag{5.49}
$$

bulunur. $\hat{\alpha} \neq 0$ olduğundan $\lambda_p \neq \|\hat{h}\|^2$ olur. (5.49) denkleminde $i = k$ için i, 1'den n'ye kadar taraf tarafa toplanırsa $n\hat{\alpha}(\|\hat{h}\|^2 - n - \lambda_p) = 0$ elde edilir. Öyleyse, $0 \neq \lambda_p = \|\hat{h}\|^2 - n$ ve (5.49) denkleminden $h_{ik}^{n+1} = \varepsilon_i \hat{\alpha} \delta_{ik}$ olarak bulunur. O halde, M_t^n yarı-Riemann manifoldunun şekil operatörü köşengenleştirilmiştir. Diğer taraftan, $\lambda_p = \|\hat{h}\|^2 - n = n(\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2 - 1) \neq 0$ ve (2.26) denkleminden $S = n(n-1)(\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2 - 1) = (n-1)\lambda_p$ olur. Yani, M_t^n yarı-Riemann manifoldu düz değildir.

Sonuç olarak, M_t^n yarı-Riemann alt manifoldu tümden jeodezik $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde düz olmayan, tümden jeodezik olmayan ve tümden ombilik yarı-hiperbolik bir hiperyüzeyin açık bir parçasıdır, [21]. Yani, $\mathbb{H}_{t+1}^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, $-c$ $(c > 1)$ eğrilikli $\mathbb{H}_t^n(-c)$ yarı-hiperbolik uzayın ya da $\mathbb{H}_t^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, $-c$ $(0 < c < 1)$ eğrilikli $\mathbb{H}_t^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayın ya da $\mathbb{H}_t^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, $c(>)0$ eğrilikli $\mathbb{S}_t^n(c)$ yarı-kürenin açık bir parçasıdır. Burada, $s^* = t \leq s$ ya da $s^* = t+1 \leq s$'dir.

Tersine, M_t^n yarı-Riemann alt manifoldu tümden jeodezik $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde düz olmayan, tümden jeodezik olmayan ve tümden ombilik yarı-hiperbolik bir hiperyüzeyin açık bir parçası olsun. M_t^n yarı-Riemann manifoldunun $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s^*+1}^{n+2}$ uzayına daldırıldığı varsayılsın. $e_1, \cdots, e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri $M_t^n \subset \mathbb{E}_{s^*+1}^{n+2}$ üzerinde ortonormal bir baz alanı olsun, öyle ki $e_1, \cdots, e_n$ vektörleri M_t^n yarı-Riemann manifolduna teğet, $e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri M_t^n yarı-Riemann manifolduna normal olsun. $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içindeki M_t^n yarı-Riemann hiperyüzeyinin $\mathbb{E}_{s^*+1}^{n+2}$ içindeki $e_{n+2} = \mathbf{x}$ yer vektörü normal uzayda paralel ve karşıt boyut 2 olduğundan e_{n+1} vektörü de normal uzayda paraleldir. Dolayısıyla, $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içindeki M_t^n yarı-Riemann hiperyüzeyinin $\mathbb{E}_{s^*+1}^{n+2}$'deki normal demeti düzdür, yani, $R^D = 0$'dır. Ayrıca, M_t^n tümden ombilik olduğundan M_t^n'nin $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içindeki $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliği sabittir ve $\hat{H} = \varepsilon_{n+1}\hat{\alpha} e_{n+1}$ vektörü, $\mathbb{E}_{s^*+1}^{n+2}$ içinde paraleldir. Diğer taraftan, $\|\hat{h}\|^2 = \varepsilon_{n+1} n \hat{\alpha}^2$ olur. O halde, (3.7) denklemi

$$\Delta\tilde{\nu} = \varepsilon_{n+1} n \hat{\alpha}(\hat{\alpha}\tilde{\nu} + e_{n+1} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n) \tag{5.50}$$

haline indirgenir.

$$\tilde{c} = \frac{1}{1-\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2}(\tilde{\nu} + \varepsilon_{n+1}\hat{\alpha} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)$$

ve

$$\tilde{\nu}_p = \frac{-\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}}{1-\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2}(\hat{\alpha}\tilde{\nu} + e_{n+1} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)$$

olarak seçilirse $\tilde{\nu} = \tilde{c} + \tilde{\nu}_p$ sağlanır. M_t^n, $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde düz olmayan bir hiperyüzey olduğundan $1-\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2 \neq 0$ olur. Çünkü, $\varepsilon_{n+1} = 1$ ve $\hat{\alpha}^2 = 1$ alınırsa M_t^n yarı-Riemann hiperyüzeyi $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde tümden ombilik ve düz bir hiperyüzey olur. Diğer taraftan, $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliğinin sabit olduğu düşünülürse $i = 1,\ldots,n$ için $e_i(\tilde{c}) = 0$ olduğu kolayca gösterilir. O halde, $\tilde{c}$ sabit bir vektördür. Ayrıca, (5.32) ve (5.50) denklemlerinden

$$\Delta\tilde{\nu} = \Delta\tilde{\nu}c + \Delta\tilde{\nu}_p = n(\varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}^2 - 1)\tilde{\nu}_p = \lambda_p\tilde{\nu}_p \neq 0 \tag{5.51}$$

olur. Sonuç olarak, M_t^n yarı-Riemann hiperyüzeyi spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip bir hiperyüzeydir. □

Teorem 5.4 gözönüne alınırsa $\mathbb{H}_{s^*}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s^*+1}^{n+2}$ yarı-hiperbolik uzayında ışıksal olmayan $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörüne sahip uzaysal yönlendirilebilir bir M^n alt manifoldu için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 5.5. *M^n, $\mathbb{H}_1^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_2^m$ yarı-hiperbolik uzayında ışıksal olmayan $\hat{H}$ ortalama eğrilik vektörüne sahip uzaysal, n-boyutlu ve yönlendirilebilir bir Riemann manifoldu olsun. M^n manifoldunun spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terime sahip 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul tümden jeodezik $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_2^{n+2}$ yarı-hiperbolik uzayı içinde düz olmayan, tümden jeodezik olmayan ve tümden ombilik uzaysal bir hiperyüzeyin açık bir parçası olmasıdır. Yani, $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}_1^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, $-c$ $(0 < c < 1)$ eğrilikli $\mathbb{H}^n(-c)$ hiperbolik uzayının ya da $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}_1^{m-1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, c $(c > 0)$ eğrilikli $\mathbb{S}^n(c)$ n-küresinin ya da $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbb{H}_1^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu, $-c$ $(c > 1)$ eğrilikli $\mathbb{H}^n(-c)$ hiperbolik uzayının açık bir parçasıdır.*

Teorem 5.4'den aşağıdaki sonuçlar doğrudan elde edilir.

Sonuç 5.7. $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_2^{n+2}$ *yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu,* $-c$ $(c > 1)$ *eğrilikli* $\mathbb{H}^n(-c)$ *hiperbolik uzayı, spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yegane uzaysal hiperyüzeydir.*

Sonuç 5.8. $\mathbb{H}_2^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_3^{n+2}$ *yarı-hiperbolik uzayı içinde n-boyutlu,* $-c$ $(c > 1)$ *eğrilikli* $\mathbb{H}_1^n(-c)$ *yarı-hiperbolik uzayı, spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yegane Lorentz hiperyüzeyidir.*

5.2 Yarı-Hiperbolik Uzaylarda 2-Tipinden Yarı-Hiperbolik Gauss Tasvirine Sahip Uzaysal Alt Manifoldlar

Bu kısımda, indeksi 1 ya da 2 olan yarı-hiperbolik uzaylarda 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal alt manifoldlar incelenmiştir.

5.2.1 İndeksi 1 olan yarı-hiperbolik uzaylarda 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal hiperyüzerler

Bu kısımda, ilk olarak $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_2^{n+2}$ yarı-hiperbolik uzayında sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli, tümden ombilik ve yönlendirilebilir uzaysal bir M^n hiperyüzeyinin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. Ayrıca, $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde maksimal olmayan $\mathbb{H}^k(-\frac{1}{r^2}) \times \mathbb{H}^{n-k}(-\frac{1}{1-r^2})$ hiperbolik çarpım uzayının 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip izoparametrik bir hiperyüzey olduğu gösterilmiştir. Son olarak, $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal, sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip tümden ombilik olmayan 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yüzeyler sınıflandırılmıştır.

Teorem 5.6. *M^n, $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_2^{n+2}$ yarı-hiperbolik uzayı içinde sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğrilikli, tümden ombilik olmayan ve yönlendirilebilir uzaysal bir hiperyüzey olsun. M^n hiperyüzeyinin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul, M^n hiperyüzeyinin skaler eğriliğinin sabit olmasıdır.*

İspat. M^n, $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_2^{n+2}$ yarı-hiperbolik uzayı içinde tümden ombilik olmayan, sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğrilikli ve sabit skaler eğriliğe sahip yönlendirilebilir uzaysal bir hiperyüzey olsun. Bu durumda M^n hiperyüzeyinin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilecektir.

M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{E}_2^{n+2}$ içindeki yer vektörü $\mathbf{x}$ olsun. $M^n \subset \mathbb{E}_2^{n+2}$ üzerinde $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri ortonormal bir baz alanı olsun, öyle ki $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektörleri M^n'ye teğet, $e_{n+1}, e_{n+2} = \mathbf{x}$ vektörleri M^n'ye normal olsun. $e_{n+2} = \mathbf{x}$ yer vektörü normal uzayda paralel ve karşıt boyut 2 olduğundan e_{n+1} vektörü de normal uzay da paraleldir. Dolayısıyla, M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{E}_2^{n+2}$ yarı-Öklid uzayı içindeki normal demeti düzdür, yani, $R^D = 0$'dır. M^n hiperyüzeyinin $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içindeki $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliği sabit olduğundan $\hat{H} = \varepsilon_{n+1}\hat{\alpha}e_{n+1} = -\hat{\alpha}e_{n+1}$ ortalama eğrilik vektörü $\mathbb{E}_2^{n+2}$ yarı-Öklid uzayı içinde paraleldir. Ayrıca, M^n hiperyüzeyinin S skaler ve $\hat{\alpha}$ ortalama eğrilikleri sabit olduğundan (2.26) denkleminden $\|\hat{h}\|^2$ sabit bir değer bulunur. (3.7) denkleminde $\hat{H} = -\hat{\alpha}e_{n+1}$ vektörünün paralel ve $R^D = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\Delta\tilde{\nu} = \|\hat{h}\|^2\tilde{\nu} - n\hat{\alpha}e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{5.52}$$

olur. Diğer taraftan, $i = 1, 2, \dots, n$ için $A_{n+1}(e_i) = h_{ii}^{n+1}e_i$ ve $i \neq j$ olmak üzere $h_{ij}^{n+1} = 0$ olacak şekilde $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormal bir baz takımı seçilebilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
n(\|\hat{h}\|^2 + n\hat{\alpha}^2) =& -n(h_{11}^{n+1})^2 - n(h_{22}^{n+1})^2 - \cdots - n(h_{nn}^{n+1})^2 \\
&+ (h_{11}^{n+1} + h_{22}^{n+1} + \cdots + h_{nn}^{n+1})^2 \\
=& -n(h_{11}^{n+1})^2 - n(h_{22}^{n+1})^2 - \cdots - n(h_{nn}^{n+1})^2 + (h_{11}^{n+1})^2 + \cdots + (h_{nn}^{n+1})^2 \\
&+ 2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} + \cdots + 2h_{(n-1)(n-1)}^{n+1}h_{nn}^{n+1} \\
=& (1-n)(h_{11}^{n+1})^2 + \cdots + (1-n)(h_{nn}^{n+1})^2 \\
&+ 2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} + \cdots + 2h_{(n-1)(n-1)}^{n+1}h_{nn}^{n+1} \\
=& -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (h_{ii}^{n+1} - h_{jj}^{n+1})^2
\end{aligned}$$

olur. O halde, tümden ombilik olmayan M^n hiperyüzeyi için

$$n\|\hat{h}\|^2 + n^2\hat{\alpha}^2 = -\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} (h_{ii}^{n+1} - h_{jj}^{n+1})^2 < 0 \tag{5.53}$$

elde edilir.

(5.32) ve (5.52) denklemlerinden

$$\Delta^2\tilde{\nu} = (\|\hat{h}\|^2 - n)\Delta\tilde{\nu} + (n^2\hat{\alpha}^2 + n\|\hat{h}\|^2)\tilde{\nu} \tag{5.54}$$

olarak bulunur. Buradan yazılacak olan $P(\lambda)=0$ karakteristik polinomunun kökleri için (5.54) denkleminden

$$\lambda_p\lambda_q = -(n^2\hat{\alpha}^2 + n\|\hat{h}\|^2)$$

ve

$$\lambda_p + \lambda_q = \|\hat{h}\|^2 - n$$

olur. Buradan, λ_p ve λ_q, sırasıyla,

$$\lambda_p = \frac{\|\hat{h}\|^2 - n - \sqrt{D_0}}{2}$$

ve

$$\lambda_q = \frac{\|\hat{h}\|^2 - n + \sqrt{D_0}}{2}$$

bulunur. $D_0 = \left(\|\hat{h}\|^2 - n\right)^2 + 4(n^2\hat{\alpha}^2 + \|\hat{h}\|^2 n) = \left(\|\hat{h}\|^2 + n\right)^2 + 4n^2\hat{\alpha}^2 > 0$ olarak alınsın. $\hat{\alpha}$ ve $\|\hat{h}\|^2$ sabit olduğundan D_0 sabittir; dolayısıyla λ_p ve λ_q da sabitlerdir. (5.53) eşitsizliğinden $\lambda_p\lambda_q > 0$ bulunur, yani λ_p ve λ_q aynı işaretlidir. Ayrıca, (5.53) ifadesi göz önüne alındığında $\lambda_p = \frac{\|\hat{h}\|^2 - n - \sqrt{D_0}}{2} < 0$ olduğu görülür ve dolayısıyla $\lambda_q < 0$ elde edilir. Ayrıca, $\tilde{v}_p$ ve $\tilde{v}_q$ tasvirleri sırasıyla

$$\tilde{v}_p = -\Big(\frac{\|\hat{h}\|^2 + n - \sqrt{D_0}}{2\sqrt{D_0}}\Big)\tilde{v} + \frac{n\hat{\alpha}}{\sqrt{D_0}} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{5.55}$$

ve

$$\tilde{v}_q = \Big(\frac{\|\hat{h}\|^2 + n + \sqrt{D_0}}{2\sqrt{D_0}}\Big)\tilde{v} - \frac{n\hat{\alpha}}{\sqrt{D_0}} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{5.56}$$

olarak alınırsa $\tilde{v} = \tilde{v}_p + \tilde{v}_q$ gerçeklenir. (5.32), (5.55) ve (5.56) denklemleri düşünülürse $\Delta\tilde{v}_p = \lambda_p\tilde{v}_p$ ve $\Delta\tilde{v}_q = \lambda_q\tilde{v}_q$ olduğu görülebilir. Sonuç olarak, M^n hiperyüzeyi 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahiptir.

Tersine, M^n hiperyüzeyi sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe ve 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip bir hiperyüzey olsun. Bu durumda $\tilde{v}$ tasviri,

$$\tilde{v} = \tilde{v}_p + \tilde{v}_q, \quad \Delta\tilde{v}_p = \lambda_p\tilde{v}_p, \quad \Delta\tilde{v}_q = \lambda_q\tilde{v}_q \tag{5.57}$$

şeklinde spektral açılıma sahiptir. Burada λ_p, λ_q birbirinden ve sıfırdan farklı sabitler ve $\tilde{v}_p$, $\tilde{v}_q$ sabitten farklı tasvirlerdir. (5.57) denkleminden

$$\Delta^2\tilde{v} = (\lambda_p + \lambda_q)\Delta\tilde{v} - \lambda_p\lambda_q\tilde{v} \tag{5.58}$$

olarak bulunur. Ayrıca, M^n hiperyüzeyinin normal demeti düz, yani $R^D = 0$ ve $\hat{H} = -\hat{\alpha} e_{n+1}$ olduğundan

$$\Delta\tilde{\nu} = \|\hat{h}\|^2\tilde{\nu} - n\hat{\alpha} e_{n+1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{5.59}$$

gerçeklenir. $\hat{\alpha}$'nın sabit olduğu ve (5.32), (5.52) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Delta^2\tilde{\nu} =& (\|\hat{h}\|^2 - n)\Delta\tilde{\nu} + (\Delta(\|\hat{h}\|^2) + n\|\hat{h}\|^2 + n^2\hat{\alpha}^2)\tilde{\nu} \\ & -2\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{n+1} h_{ij}^{n+1} e_i(\|\hat{h}\|^2)\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{e_{n+1}}_{j-inci} \wedge \cdots \wedge e_n\end{aligned} \tag{5.60}$$

olarak hesaplanır. (5.58) ve (5.60) denklemleri kıyaslanırsa $\|\hat{h}\|^2 - n = \lambda_p + \lambda_q$ bulunur. λ_p ve λ_q değerleri sabit olduğundan $\|\hat{h}\|^2$ sabittir. Dolayısıyla, (2.26) denkleminden M^n hiperyüzeyi sabit skaler eğriliğe sahiptir. Bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç 5.4 gözönüne alınırsa, $\mathbb{H}_1^{n+1}(-c)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal, tam, izoparametrik ve maksimal hiperyüzeylerin $\mathbb{H}^n(-c)$ hiperbolik uzayı ya da $n > n_1 \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{H}^{n_1}\left(\frac{-n}{n_1 c}\right) \times \mathbb{H}^{n-n_1}\left(\frac{(n_1-n)c}{n}\right)$ olduğu bilinmektedir.

Ayrıca, Zhen-qi ve Xian-hua, [18], $\mathbb{H}_1^{n+1}(-c)$ yarı-hiperbolik uzay içinde ombilik olmayan izoparametrik hiperyüzeylerin $\mathbb{H}^k(-c_1) \times \mathbb{H}^{n-k}(-c_2)$ şeklinde olduğunu göstermişlerdir.

Dolayısıyla, Sonuç 5.4'den aşağıdaki sonuç doğrudan elde edilir.

Sonuç 5.9. *Maksimal olmayan $\mathbb{H}^k(-\frac{1}{r^2}) \times \mathbb{H}^{n-k}(-\frac{1}{1-r^2})$ hiperbolik çarpım uzayı $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip izoparametrik hiperyüzeydir. Burada, $0 < r < 1$ ve $r \neq \sqrt{\frac{k}{n}}$'dir.*

Teorem 5.7. *M, $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ yarı-hiperbolik uzayı içinde sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğrilikli, tümden ombilik olmayan ve yönlendirilebilir uzaysal bir yüzey olsun. M yüzeyinin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin $\mathbb{H}_1^3(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde $\mathbb{H}^1(-a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2})$ yüzeyinin açık bir parçası olmasıdır. Burada, $a^2 + b^2 = 1$ ve $a \neq b$'dır.*

İspat. M yüzeyi, $\mathbb{H}_1^3(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde $\mathbb{H}^1(-a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2})$ yüzeyinin açık bir parçası olsun. Örnek 5.1'den, M yüzeyi tümden ombilik olmayan, izoparametrik ve sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliğe sahiptir. Dolayısıyla, Sonuç 5.9' dan M yüzeyi 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahiptir.

Tersine, M yüzeyi $\mathbb{H}_1^3(-1) \subset \mathbb{E}_2^4$ yarı-hiperbolik uzayı içinde sıfırdan farklı sabit $\hat{\alpha}$ ortalama eğrilikli, tümden ombilik olmayan ve yönlendirilebilir uzaysal bir yüzey olsun. M yüzeyi 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahipse Teorem 5.6'dan sabit skaler eğriliğe sahiptir. Dolayısıyla Gauss eğriliği de sabittir, yani, $h_{11}^3 h_{22}^3$ sabittir. $\hat{\alpha}$ ortalama eğriliği ve $h_{11}^3 h_{22}^3$ sabit olduğundan h_{11}^3 ve h_{22}^3 bileşenleri sabittir. O halde, M yüzeyi izoparametrik bir yüzeydir.

$M \subset \mathbb{E}_2^4$ üzerinde $e_1, e_2, e_3, e_4 = \mathbf{x}$ vektörleri ortonormal bir baz alanı oluştursun, öyle ki e_1, e_2 vektörleri M'ye teğet, $e_3, e_4 = \mathbf{x}$ vektörleri ise M'ye normal olsun. M yüzeyi izoparametrik bir yüzey olduğundan $e_j(h_{ii}^{n+1}) = 0$'dır. (2.23) Codazzi denkleminden, $i \neq j$ olmak üzere $(h_{ii}^{n+1} - h_{jj}^{n+1})\omega_{ij}(e_i) = 0$ olur. M tümden ombilik olmadığından $\omega_{12} = 0$'dır. Dolayısıyla, $K = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = 0$ elde edilir. Ayrıca, Gauss denklemi kullanılırsa $h_{11}^3 h_{22}^3 = -1$ olur. $h_{11}^3 = \mu_o$ alınırsa $h_{22}^3 = \frac{-1}{\mu_o}$ bulunur.

M yüzeyinin $\mathbb{E}_2^4$ içindeki yer vektörü $e_4 = \mathbf{x}$ normal uzayda paralel ve karşıt boyut 2 olduğundan e_3 vektörü de normal uzayda paraleldir. Dolayısıyla, M yüzeyinin $\mathbb{E}_2^4$ içindeki normal demeti düzdür, yani, $\omega_{34} = 0$ olur. Ayrıca, $e_4 = \mathbf{x}$ vektörü için $h_{ij}^4 = -\delta_{ij}$'dir. Diğer taraftan, M yüzeyi düz olduğundan M üzerinde (u, v) lokal koordinatları seçilebilir, öyle ki $\omega_1 = du$, $\omega_2 = dv$ olsun. O halde, yukarıdaki açıklamalar göz önüne alınırsa

$$\omega_{12} = \omega_{34} = 0,\ \omega_{13} = \mu_o \omega_1,\ \omega_{23} = -\frac{1}{\mu_o}\omega_2,\ \omega_{14} = -\omega_1,\ \omega_{24} = -\omega_2$$

elde edilir. Dolayısıyla, M yüzeyinin konneksiyon formları ω_{AB} ile (5.5) denklemi ile verilen $\mathbb{H}^1(-a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2})$ yüzeyinin konneksiyon formları çakışmaktadır. Sonuç olarak, alt manifoldların temel teoreminden M yüzeyi $\mathbb{H}^1(-a^{-2}) \times \mathbb{H}^1(-b^{-2})$ yüzeyinin açık bir parçasına yerel olarak izometriktir. □

5.2.2 İndeksi 2 olan yarı-hiperbolik uzaylarda 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal alt manifoldlar

Bu kısımda, $\mathbb{H}_2^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_3^m$ yarı-hiperbolik uzayında 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyler incelenmiştir. Hiperbolik Veronese yüzeyinin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, tamamen $\mathbb{H}_2^4(-1) \subset \mathbb{H}_2^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal maksimal, 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yegane yüzeyin hiperbolik Veronese yüzeyi olduğu ispatlanmıştır. Son olarak, bu teoremden iki önemli sonuç elde edilmiştir.

Öncelikle, ileride verilecek temel teoremin ispatı için gerekli bazı teoremlerden bahsedilecektir. $N_p^n(c)$, n-boyutlu, p indeksli, sabit c eğrilikli ve basit bağlantılı bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Sasaki, $N_2^4(c)$ içinde uzaysal, maksimal yüzeyleri araştırmış ve aşağıdaki teoremleri ispatlamıştır, [22].

Teorem 5.8. *(i) M, $N_2^4(c)$ içinde izotropik, uzaysal, maksimal bir yüzey olsun. O halde, jeodezik olmayan noktalarda*

$$\Delta \log(K-c) = 2(3K-c) \tag{5.61}$$

gerçeklenir. Burada, K Gauss eğriliği ve Δ ise Laplace operatörüdür.

(ii) Tersine, M, 2-boyutlu basit bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. M, (5.61) *denklemini sağlıyorsa, M yüzeyinden $N_2^4(c)$ içine izotropik, maksimal, izometrik bir f daldırması vardır. Ayrıca, $\tilde{f} : M \longrightarrow N_2^4(c)$, M yüzeyinden $N_2^4(c)$ içine diğer bir izotropik, izometrik ve maksimal daldırma ise $\tilde{f}$ ve f daldırmaları birbirine denktir.*

Teorem 5.8'den $c<0$ için sabit $K=\frac{c}{3}$ eğrilikli $\mathbb{H}^2(K)$ hiperbolik düzleminden $\mathbb{H}_2^4(c)$ yarı- hiperbolik uzayı içine izotropik, maksimal bir izometrik daldırma vardır.

Teorem 5.9. *M, $N_2^4(c)$ içinde sabit K Gauss eğriliğine sahip maksimal, uzaysal bir yüzey olsun. O halde, M yüzeyi aşağıdaki yüzeylerden birine denktir.*

(i) $K=c$ ve M yüzeyi tümden jeodeziktir ya da

(ii) $c<0$, $K=0$ ve M yüzeyi yer vektörü

$$\mathbf{x}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh u, \sinh v, 0, \cosh u, \cosh v),$$

şeklinde tanımlanmış yüzeydir, ya da

(iii) $c<0$, $K=\frac{c}{3}$ ve M izotropiktir.

Örnek 5.3. Hiperbolik Veronese Yüzeyi

(x,y,z), $\mathbb{E}^3_1$ uzayının, (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) de $\mathbb{E}^5_3$ uzayının doğal koordinatları olsun.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}yz, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}xz, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}xy, \quad u_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 - y^2, \\ u_5 &= \frac{1}{6}(x^2+y^2+2z^2) \end{aligned} \tag{5.62}$$

şeklinde tanımlanan tasvir $-\frac{1}{3}$ eğrilikli $\mathbb{H}^2(-\frac{1}{3})$ hiperbolik uzayından $\mathbb{H}^4_2(-1) \subset \mathbb{E}^5_3$ yarı-hiperbolik uzayı içine tanımlanmış maksimal izometrik bir daldırmadır. (5.62) şeklinde tanımlanmış bu yüzeye hiperbolik Veronese yüzeyi denir. Ayrıca, bu yüzey izotropik ve paraleldir.

Hiperbolik Veronse yüzeyi için yer vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u,v) = \Bigg(&\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh(\frac{2v}{\sqrt{3}})\sin(\frac{u}{\sqrt{3}}),\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh(\frac{2v}{\sqrt{3}})\cos(\frac{u}{\sqrt{3}}),\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh^2(\frac{v}{\sqrt{3}})\sin(\frac{2u}{\sqrt{3}}), \\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh^2(\frac{v}{\sqrt{3}})\cos(\frac{2u}{\sqrt{3}}),\ \frac{1}{2}(3\cosh^2(\frac{v}{\sqrt{3}})-1)\Bigg) \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir.

$$\begin{aligned} e_1 = \frac{1}{\sinh(\frac{v}{\sqrt{3}})}\frac{\partial}{\partial u} = \Bigg(&\cosh(\frac{v}{\sqrt{3}})\cos(\frac{u}{\sqrt{3}}),\ -\cosh(\frac{v}{\sqrt{3}})\sin(\frac{u}{\sqrt{3}}), \\ &\sinh(\frac{v}{\sqrt{3}})\cos(\frac{2u}{\sqrt{3}}),\ -\sinh(\frac{v}{\sqrt{3}})\sin(\frac{2u}{\sqrt{3}}),\ 0\Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 = \frac{\partial}{\partial v} = \Bigg(&\cosh(\tfrac{2v}{\sqrt{3}})\sin(\tfrac{u}{\sqrt{3}}),\ \cosh(\tfrac{2v}{\sqrt{3}})\cos(\tfrac{u}{\sqrt{3}}),\ \tfrac{1}{2}\sinh(\tfrac{2v}{\sqrt{3}})\sin(\tfrac{2u}{\sqrt{3}}), \\ &\tfrac{1}{2}\sinh(\tfrac{2v}{\sqrt{3}})\cos(\tfrac{2u}{\sqrt{3}}),\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sinh(\tfrac{2v}{\sqrt{3}})\Bigg) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 = -\sqrt{3}\hat{h}(e_1,e_1) = \Bigg(&\tfrac{1}{2}\sinh(\tfrac{2v}{\sqrt{3}})\sin(\tfrac{u}{\sqrt{3}}),\ \tfrac{1}{2}\sinh(\tfrac{2v}{\sqrt{3}})\cos(\tfrac{u}{\sqrt{3}}),\ \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{2u}{\sqrt{3}}) \\ &(\cosh^2(\tfrac{v}{\sqrt{3}})+1),\ \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{2u}{\sqrt{3}})(\cosh^2(\tfrac{v}{\sqrt{3}})+1),\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sinh^2(\tfrac{v}{\sqrt{3}})\Bigg) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} e_4 = -\sqrt{3}\hat{h}(e_1,e_2) = \big(&-\sinh(\tfrac{v}{\sqrt{3}})\cos(\tfrac{u}{\sqrt{3}}),\ \sinh(\tfrac{v}{\sqrt{3}})\sin(\tfrac{u}{\sqrt{3}}),\ -\cosh(\tfrac{v}{\sqrt{3}})\cos(\tfrac{2u}{\sqrt{3}}), \\ &\cosh(\tfrac{v}{\sqrt{3}})\sin(\tfrac{2u}{\sqrt{3}}),\ 0\big) \end{aligned}$$

şeklinde alınırsa, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ vektörleri $M \subset \mathbb{E}^5_3$ üzerinde ortonormal bir baz alanı oluşturur. Gerekli hesaplamalar yapılarak ikinci esas formun e_3 ve e_4 vektörleri doğrultusundaki bileşenleri ve konneksiyon formları

$$\begin{aligned} &h^3_{12} = h^4_{11} = h^4_{22} = 0, \quad h^3_{11} = h^4_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad h^3_{22} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ &\omega_{43}(e_1) = 2\omega_{12}(e_1) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\coth\frac{v}{\sqrt{3}}, \quad \omega_{12}(e_2) = \omega_{43}(e_2) = 0 \end{aligned} \tag{5.63}$$

şeklinde hesaplanır.

Hiperbolik Veronese yüzeyinin, Gauss eğriliği $K = -\frac{1}{3}$'dür. (3.7) denkleminde (5.63) denklemindeki veriler kullanılarak hiperbolik Veronese yüzeyinin yarı-hiperbolik Gauss tasvirinin 1. Laplace operatörü

$$\Delta\tilde{v} = -\frac{4}{3}\tilde{v} - \frac{4}{3}\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4 \tag{5.64}$$

bulunur. (5.64) denkleminin Laplace operatörü alınırsa

$$\Delta^2\tilde{v} = -\frac{4}{3}\Delta\tilde{v} - \frac{4}{3}\Delta(\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4) \tag{5.65}$$

elde edilir. Uzun hesaplamalar sonucunda

$$\Delta(\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4) = -\frac{10}{3}\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4 - \frac{4}{3}\mathbf{x} \wedge e_1 \wedge e_2 \tag{5.66}$$

şeklinde bulunur. (5.65) denkleminde (5.64) ve (5.66) denklemleri yerine konulursa

$$\Delta^2\tilde{v} = \frac{32}{9}\tilde{v} + \frac{56}{9}\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4 \tag{5.67}$$

olarak hesaplanır. (5.64) ve (5.67) denklemleri gözönüne alınırsa,

$$\Delta^2\tilde{v} + \frac{14}{3}\Delta\tilde{v} + \frac{8}{3}\tilde{v} = 0 \tag{5.68}$$

denklemi elde edilir. (5.68) denkleminden hiperbolik Veronese yüzeyinin $\tilde{v}$ yarı-hiperbolik Gauss tasviri

$$P(t) = t^2 + \frac{14}{3}t + \frac{8}{3}t = 0 \tag{5.69}$$

polinomunu sağlar. Ayrıca, $P(t)$ polinomunun kökleri (5.69) denkleminden -4 ve $-\frac{2}{3}$ hesaplanır. $\tilde{v}_p$ ve $\tilde{v}_q$ tasvirleri sırasıyla

$$\tilde{v}_p = \frac{1}{5}\tilde{v} + \frac{2}{5}\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4$$

ve

$$\tilde{v}_q = \frac{4}{5}\tilde{v} - \frac{2}{5}\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4$$

şeklinde alınırsa $\tilde{v} = \tilde{v}_p + \tilde{v}_q$ olur. Ayrıca,

$$\Delta\tilde{v}_p = \frac{1}{5}\Delta\tilde{v} + \frac{2}{5}\Delta(\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4) \tag{5.70}$$

olur. (5.70) denkleminde (5.64) ve (5.66) yerine konulursa

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{v}_p &= -\frac{4}{5}\tilde{v} - \frac{8}{5}\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4 \\ &= -4\tilde{v}_p\end{aligned} \tag{5.71}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{v}_q &= -\frac{8}{15}\tilde{v} + \frac{4}{15}\mathbf{x} \wedge e_3 \wedge e_4 \\ &= -\frac{2}{3}\tilde{v}_q\end{aligned} \tag{5.72}$$

elde edilir. O halde, hiperbolik Veronese yüzeyi 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip bir yüzeydir.

Teorem 5.8, Teorem 5.9 ve hiperbolik Veronese yüzeyinin tanımı düşünülerek aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 5.10. *M, $\mathbb{H}^4_2(-1)$ yarı-hiperbolik uzayında sabit K Gauss eğriliğine sahip tümden jeodezik olmayan, maksimal bir yüzey olsun. O halde, M yüzeyi aşağıdaki yüzeylerden birine denktir:*

(i) $K = 0$ ve M yüzeyi yer vektörü

$$\mathbf{x}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh u, \sinh v, 0, \cosh u, \cosh v),$$

şeklinde tanımlanmış bir yüzeydir ya da

(ii) $K = -\frac{1}{3}$ ve M yüzeyi hiperbolik Veronese yüzeyinin açık bir parçasına denktir.

Teorem 5.11. *M, $\mathbb{H}^{m-1}_2(-1) \subset \mathbb{E}^m_3$ yarı-hiperbolik uzayı içinde yönlendirilebilir maksimal bir yüzey olsun. M yüzeyinin, hiperbolik Veronese yüzeyinin açık bir parçası (yani tamamen, tümden jeodezik $\mathbb{H}^4_2(-1) \subset \mathbb{H}^{m-1}_2(-1) \subset \mathbb{E}^m_3$ yarı-hiperbolik uzayı içinde) olması için gerek ve yeter koşul, 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olmasıdır.*

İspat. M, hiperbolik Veronese yüzeyinin açık bir parçası olsun. Örnek 5.3'den M yüzeyi maksimal ve 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahiptir.

Tersine, M, $\mathbb{H}_2^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_3^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yönlendirilebilir maksimal bir yüzey olsun.

Bundan sonraki kısımda gösterim kolaylığı için indislerin aralığı

$$i,j,k = 1,2, \qquad r,s = 3,4, \qquad \alpha,\beta = 5,6,\ldots,m-1$$

şeklinde alınmıştır. M yüzeyi maksimal olduğundan $M \subset \mathbb{E}_3^m$ uzayı üzerinde $e_1,e_2,\ldots,e_{m-1},e_m = \mathbf{x}$ ortonormal bir baz takımı seçilebilir, öyle ki e_1,e_2 vektörleri M'ye teğet, $e_3,\ldots,e_{m-1},e_m = \mathbf{x}$ vektörleri M'ye normal ve

$$A_3 = \begin{pmatrix} h_{11}^3 & 0 \\ 0 & -h_{11}^3 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & h_{12}^4 \\ h_{12}^4 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \cdots = A_{m-1} = 0, \; A_m = -I$$

gerçeklensin. Bu durumda, $\alpha,\beta = 5,6,\ldots,m-1$ için $R_{\alpha 12}^{\beta} = 0$ olur. O halde, (3.7) denkleminde M yüzeyinin maksimal ve $R_{\alpha 12}^{\beta} = 0$ olduğu düşünülürse

$$\Delta\tilde{\nu} \;=\; \|\hat{h}\|^2\tilde{\nu} + 2\varepsilon_3\varepsilon_4 K^D \mathbf{x}\wedge e_3 \wedge e_4 \tag{5.73}$$

gerçeklenir. Burada

$$K^D = R^D(e_1,e_2;e_3,e_4) = \sum_{j=1}^{2}(h_{2j}^3 h_{1j}^4 - h_{1j}^3 h_{2j}^4) \tag{5.74}$$

şeklindedir. (5.73) denkleminin Laplace operatörü alınırsa,

$$\begin{aligned}\Delta^2\tilde{\nu} =& (\Delta\|\hat{h}\|^2 + \|\hat{h}\|^4)\tilde{\nu} + 2\varepsilon_3\varepsilon_4(K^D\|\hat{h}\|^2 + \Delta K^D)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4 \\ &+ 2\varepsilon_3\varepsilon_4 K^D \Delta(\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4) - 2\sum_j \|\hat{h}\|_j^2 e_j(\tilde{\nu}) \\ &- 4\varepsilon_3\varepsilon_4 \sum_j K_j^D e_j(\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4)\end{aligned} \tag{5.75}$$

bulunur. Burada $(\|\hat{h}\|^2)_j = e_j(\|\hat{h}\|^2)$ ve $K_j^D = e_j(K^D)$ şeklinde gösterilmiştir. (5.75) ifadesinde $e_j(\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4)$, $e_j\tilde{\nu}$ ve $\Delta(\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4)$ ifadeleri Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}e_j(\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4) =& e_j\wedge e_3\wedge e_4 - \sum_k h_{kj}^3 \mathbf{x}\wedge e_k\wedge e_4 - \sum_k h_{kj}^4 \mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_k \\ &+ \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \omega_{3\alpha}(e_j)\mathbf{x}\wedge e_\alpha\wedge e_4 + \sum_\alpha \varepsilon_\alpha\omega_{4\alpha}(e_j)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_\alpha\end{aligned} \tag{5.76}$$

ve

$$e_j(\tilde{\nu}) = \sum_r \varepsilon_r\left(h_{1j}^r \mathbf{x}\wedge e_r\wedge e_2 + h_{2j}^r \mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_r\right) \tag{5.77}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca uzun hesaplamalar sonucunda,

$$
\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4) =& 2K^D\tilde{v} + \left(-2+\|\hat{h}\|^2+\sum_{\alpha,j}\varepsilon_\alpha\left(\varepsilon_3(\omega_{3\alpha})^2+\varepsilon_4(\omega_{4\alpha})^2\right)\right)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4\\
&-2\sum_{\alpha,j}\varepsilon_\alpha\omega_{3\alpha}\left(e_j\right)e_j\wedge e_\alpha\wedge e_4-2\sum_{\alpha,j}\varepsilon_\alpha\omega_{4\alpha}\left(e_j\right)e_j\wedge e_3\wedge e_\alpha\\
&+\sum_{i,j}h^3_{ij;j}\mathbf{x}\wedge e_i\wedge e_4-\sum_{i,j}h^4_{ij;j}\mathbf{x}\wedge e_i\wedge e_3\\
&+2\sum_{i,j,\alpha}\varepsilon_\alpha\left(h^3_{ij}\omega_{4\alpha}\left(e_j\right)-h^4_{ij}\omega_{3\alpha}\left(e_j\right)\right)\mathbf{x}\wedge e_i\wedge e_\alpha\\
&+\sum_{\alpha,j}\varepsilon_\alpha\left(e_j\left(\omega_{3\alpha}\left(e_j\right)\right)\mathbf{x}\wedge e_4\wedge e_\alpha-e_j\left(\omega_{4\alpha}\left(e_j\right)\right)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_\alpha\right)\\
&+\sum_{\alpha,j}\varepsilon_\alpha\left(-\varepsilon_4\omega_{4\alpha}\left(e_j\right)\omega_{34}\left(e_j\right)+\sum_\beta\varepsilon_\beta\omega_{3\beta}\left(e_j\right)\omega_{\beta\alpha}\left(e_j\right)\right)\mathbf{x}\wedge e_4\wedge e_\alpha\\
&-\sum_{\alpha,j}\varepsilon_\alpha\left(-\varepsilon_3\omega_{3\alpha}\left(e_j\right)\omega_{43}\left(e_j\right)+\sum_\beta\varepsilon_\beta\omega_{4\beta}\left(e_j\right)\omega_{\beta\alpha}\left(e_j\right)\right)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_\alpha\\
&+\sum_{i,j,\alpha}\varepsilon_\alpha\omega_{ji}\left(e_j\right)\left(\omega_{3\alpha}\left(e_i\right)\mathbf{x}\wedge e_\alpha\wedge e_4+\omega_{4\alpha}\left(e_i\right)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_\alpha\right)\\
&-2\sum_{\alpha,\beta,j}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\omega_{3\beta}\left(e_j\right)\omega_{4\alpha}\left(e_j\right)\mathbf{x}\wedge e_\beta\wedge e_\alpha
\end{aligned}
\tag{5.78}
$$

şeklinde elde edilir. (5.75) denkleminde (5.76), (5.77) ve (5.78) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\Delta^2\tilde{v} =& \left(\|\hat{h}\|^4+\Delta\|\hat{h}\|^2+4\varepsilon_3\varepsilon_4\left(K^D\right)^2\right)\tilde{v}\\
&+\left(2\varepsilon_3\varepsilon_4\Delta K^D+2\varepsilon_3\varepsilon_4K^D\left(-2+\|\hat{h}\|^2+\sum_{\alpha,j}\varepsilon_\alpha\left(\varepsilon_3(\omega_{3\alpha})^2+\varepsilon_4(\omega_{4\alpha})^2\right)\right)\right)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4\\
&-2\sum_{j,r}\varepsilon_r\|\hat{h}\|^2{}_j\left(h^r_{1j}\mathbf{x}\wedge e_r\wedge e_2+h^r_{2j}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_r\right)\\
&+4\varepsilon_3\varepsilon_4\sum_j K^D_j\left(\sum_i h^3_{ij}\mathbf{x}\wedge e_i\wedge e_4-\sum_i h^4_{ij}\mathbf{x}\wedge e_i\wedge e_3-e_j\wedge e_3\wedge e_4\right)\\
&-4\varepsilon_3\varepsilon_4K^D\sum_{j,\alpha}\varepsilon_\alpha\left(\omega_{3\alpha}\left(e_j\right)e_j\wedge e_\alpha\wedge e_4+\omega_{4\alpha}\left(e_j\right)e_j\wedge e_3\wedge e_\alpha\right)\\
&+4\varepsilon_3\varepsilon_4K^D\sum_{i,j,\alpha}\varepsilon_\alpha\left(h^3_{ij}\omega_{4\alpha}\left(e_j\right)-h^4_{ij}\omega_{3\alpha}\left(e_j\right)\right)\mathbf{x}\wedge e_i\wedge e_\alpha\\
&+2\varepsilon_3\varepsilon_4\sum_{\alpha,j}\varepsilon_\alpha\left(\left\{K^D\left(e_j(\omega_{3\alpha}(e_j))-\varepsilon_4\omega_{4\alpha}(e_j)\omega_{34}(e_j)+\sum_\beta\varepsilon_\beta\omega_{3\beta}(e_j)\omega_{\beta\alpha}(e_j)\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.-\sum_i\omega_{ji}(e_j)\omega_{3\alpha}(e_i)\right)\right\}+\left\{2K^D_j\omega_{3\alpha}(e_j)\right\}\right)\mathbf{x}\wedge e_4\wedge e_\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\varepsilon_3\varepsilon_4\sum_{\alpha,j}\varepsilon_\alpha\Bigg(\Bigg\{K^D\Big(e_j(\omega_{4\alpha}(e_j))-\varepsilon_3\omega_{3\alpha}(e_j)\omega_{43}(e_j)+\sum_\beta\varepsilon_\beta\omega_{4\beta}(e_j)\omega_{\beta\alpha}(e_j)\\
&-\sum_i\omega_{ji}(e_j)\omega_{4\alpha}(e_i)\Big)\Bigg\}+\Big\{2K_j^D\omega_{4\alpha}(e_j)\Big\}\Bigg)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_\alpha\\
&-4\varepsilon_3\varepsilon_4K^D\sum_{\alpha,\beta,j}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\omega_{3\beta}\left(e_j\right)\omega_{4\alpha}\left(e_j\right)\mathbf{x}\wedge e_\beta\wedge e_\alpha
\end{aligned}
\tag{5.79}
$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan M yüzeyinin yarı-hiperbolik Gauss tasviri 2-tipinden olduğundan $\lambda_p\neq\lambda_q$, $\Delta\tilde{\nu}_p=\lambda_p\tilde{\nu}_p$ ve $\Delta\tilde{\nu}_q=\lambda_q\tilde{\nu}_q$ olmak üzere $\tilde{\nu}$ yarı-hiperbolik Gauss tasviri $\tilde{\nu}=\tilde{\nu}_p+\tilde{\nu}_q$ şeklinde spektral açılımına sahiptir. Yani,

$$
\Delta^2\tilde{\nu}=(\lambda_p+\lambda_q)\Delta\tilde{\nu}-\lambda_p\lambda_q\tilde{\nu} \tag{5.80}
$$

biçimindedir. (5.79) ve (5.80) denklemleri kıyaslanırsa, $e_j\wedge e_4\wedge e_\alpha$ ve $e_j\wedge e_3\wedge e_\alpha$ terimleri sadece $\Delta^2\tilde{\nu}$'de gözükmektedir. Bu durumda, $\alpha=5,6,\ldots,m-1$ için $K^D\omega_{3\alpha}(e_j)=0$ ya da $K^D\omega_{4\alpha}(e_j)=0$ olmalıdır. O halde, 2 durum sözkonusudur.

Durum (a) : M yüzeyinde $K^D=0$ ya da

Durum (b) : $\alpha=5,\ldots,m-1$ için $\omega_{3\alpha}=\omega_{4\alpha}=0$ ve $K^D\neq0$ olmak üzere M yüzeyinin boş kümeden farklı U gibi bir açık alt kümesi vardır.

Durum (a) : M yüzeyinde $K^D=0$ olsun. O halde, (5.74) denkleminden $h_{12}^4h_{11}^3=0$ gerçeklenir. Bu durumda, $h_{12}^4=0$ veya $h_{11}^3=0$ olur. Öyleyse, $A_3=0$ ya da $A_4=0$ olur. O halde M, tümden jeodezik $\mathbb{H}_1^3(-1)\subset\mathbb{H}_2^{m-1}(-1)\subset\mathbb{E}_3^m$,$(m\geq5)$ uzayı içinde ya da tümden jeodezik $\mathbb{H}^3(-1)\subset\mathbb{H}_2^{m-1}(-1)\subset\mathbb{E}_3^m$,$(m\geq6)$ uzayı içinde maksimal yüzey olur. Genelliği bozmadan, $A_3=0$ olsun. M yüzeyi maksimal ve $K^D=0$ olduğundan (5.73) ve (5.75) denklemleri sırasıyla

$$
\Delta\tilde{\nu}=\|\hat{h}\|^2\tilde{\nu} \tag{5.81}
$$

ve

$$
\Delta^2\tilde{\nu}=\left(\Delta\|\hat{h}\|^2+\|\hat{h}\|^4\right)\tilde{\nu}-2\sum_j\varepsilon_4\|\hat{h}\|_j^2\left(h_{1j}^4\mathbf{x}\wedge e_4\wedge e_2+h_{2j}^4\mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_4\right) \tag{5.82}
$$

hallerine indirgenir. (5.80), (5.81) ve (5.82) denklemleri kıyaslanırsa

$$
-2\sum_j\varepsilon_4\|\hat{h}\|_j^2\left(h_{1j}^4\mathbf{x}\wedge e_4\wedge e_2+h_{2j}^4\mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_4\right)=0
$$

olduğu görülür. $h_{11}^3+h_{22}^3=0$ olduğundan,

$$
\|\hat{h}\|_1^2h_{11}^4+\|\hat{h}\|_2^2h_{12}^4=\|\hat{h}\|_1^2h_{12}^4-\|\hat{h}\|_2^2h_{11}^4=0 \tag{5.83}
$$

elde edilir. O halde,

$$\|\hat{h}\|_1^2 + \|\hat{h}\|_2^2 = 0 \qquad \text{ve} \qquad \|\hat{h}\|_1^2 - \|\hat{h}\|_2^2 = 0$$

gerçeklenir. Yukarıdaki denklemlerden $\|\hat{h}\|_1^2 = \|\hat{h}\|_2^2$ ve $\|\hat{h}\|_1^2 = -\|\hat{h}\|_2^2$ elde edilir. Bu durumda, $\|\hat{h}\|_1^2 = \|\hat{h}\|_2^2 = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $\|\hat{h}\|^2$ sabittir. Bu durumda, $\Delta\tilde{\nu} = \|\hat{h}\|^2\tilde{\nu}$ ve $\lambda_p = \|\hat{h}\|^2$ olmak üzere $\tilde{\nu}$ tasvirinin 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasviri olduğu sonucuna ulaşılır. Bu ise hipotezle çelişir. O halde, $K^D = 0$ olamaz. $A_4 = 0$ olarak alındığında da benzer işlemler yapılarak aynı sonuca ulaşılır.

Durum (b) : U üzerinde $\alpha = 5, \ldots, m-1$ için $\omega_{3\alpha} = \omega_{4\alpha} = 0$ ve $K^D \neq 0$ olsun. O halde, A_3, $A_4 \neq 0$ olduğu için birinci normal uzay, $\mathrm{Im}\hat{h}$, e_3 ve e_4 vektörleri tarafından gerilmektedir ve rankı 2 dir. Ayrıca, $\omega_{34} \neq 0$ ve $\omega_{3\alpha} = \omega_{4\alpha} = 0$ olduğudan $\mathrm{Im}\hat{h}$, normal demetin paralel bir alt demetidir. Yani, birinci normal uzaya ait vektörlerin kovaryant türevi, tümleyen normal alt demetin hiçbir elemanını içermemektedir. Diğer taraftan, birinci normal uzayın tümleyeni olan normal alt uzayda paraleldir ve $R^{\alpha}_{\beta 12} = 0$'dır, [23]. O halde, $R^{\alpha}_{\beta 12} = 0$ olduğundan $\omega_{\alpha\beta} = 0$ olacak şekilde paralel ortonormal $e_5, \ldots, e_{m-1}$ vektörleri seçilebilir. Aynı zamanda, U maksimal ve $\omega_{3\alpha} = \omega_{4\alpha} = 0$ olduğu gözönüne alınırsa (5.79) denklemi,

$$\begin{aligned}
\Delta^2\tilde{\nu} &= \left(\Delta\|\hat{h}\|^2 + \|\hat{h}\|^4 + 4\varepsilon_3\varepsilon_4\left(K^D\right)^2\right)\tilde{\nu} \\
&\quad + 2\varepsilon_3\varepsilon_4\left(K^D(2\|\hat{h}\|^2 - 2) + \Delta K^D\right)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4 \\
&\quad - 2\sum_{j,r}\varepsilon_r\|\hat{h}\|_j^2\left(h^r_{1j}\mathbf{x}\wedge e_r\wedge e_2 + h^r_{2j}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_r\right) \\
&\quad + 4\varepsilon_3\varepsilon_4\sum_j K^D_j\left(\sum_i h^3_{ij}\mathbf{x}\wedge e_i\wedge e_4 - \sum_i h^4_{ij}\mathbf{x}\wedge e_i\wedge e_3 - e_j\wedge e_3\wedge e_4\right)
\end{aligned} \tag{5.84}$$

haline dönüşür. $e_j\wedge e_3\wedge e_4$ terimi $\Delta^2\tilde{\nu}$ ifadesinde bulunmakta ancak $\Delta\tilde{\nu}$ ifadesinde bulunmamaktadır. O halde, $K^D_j = 0$, yani, K^D sabit olmalıdır. Bu durumda, (5.84) denklemi,

$$\begin{aligned}
\Delta^2\tilde{\nu} &= \left(\Delta\|\hat{h}\|^2 + \|\hat{h}\|^4 + 4\varepsilon_3\varepsilon_4\left(K^D\right)^2\right)\tilde{\nu} \\
&\quad + 4\varepsilon_3\varepsilon_4 K^D\left(\|\hat{h}\|^2 - 1\right)\mathbf{x}\wedge e_3\wedge e_4 \\
&\quad - 2\sum_{j,r}\varepsilon_r\|\hat{h}\|_j^2\left(h^r_{1j}\mathbf{x}\wedge e_r\wedge e_2 + h^r_{2j}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_r\right)
\end{aligned} \tag{5.85}$$

şekline indirgenir. (5.73), (5.75) ve (5.85) denklemleri kıyaslanırsa

$$-2\sum_{j,r}\varepsilon_r\|\hat{h}\|_j^2\left(h^r_{1j}\mathbf{x}\wedge e_r\wedge e_2 + h^r_{2j}\mathbf{x}\wedge e_1\wedge e_r\right) = 0 \tag{5.86}$$

bulunur. (5.86) denkleminden

$$\|\hat{h}\|_1^2 + \|\hat{h}\|_2^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \|\hat{h}\|_1^2 - \|\hat{h}\|_2^2 = 0$$

olarak bulunur. Bu durumda, $\|\hat{h}\|^2$ sabittir. $\hat{H} = 0$ ve $\|\hat{h}\|$ sabit olduğundan skaler eğriliği sabittir. Dolayısıyla, Gauss eğriliği de sabittir.

Diğer taraftan, $K^D = -2h_{11}^3 h_{12}^4 \neq 0$ sabit olduğundan $h_{11}^3, h_{12}^4 \neq 0$ olur.
Ayrıca, $\|\hat{h}\|^2 = 2\varepsilon_3 (h_{11}^3)^2 + 2\varepsilon_4 (h_{12}^4)^2$ ve $h_{11}^3 h_{12}^4$ ifadeleri sabit olduğundan h_{11}^3 ve h_{12}^4 bileşenleri sabittir.

Burdan sonra $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1,\ \varepsilon_3 = 1 = -\varepsilon_4$ ya da $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$ durumlarını inceleyeceğiz.

Durum (b.1) : $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ olsun. O halde, M yüzeyi, tamamen tümden jeodezik $\mathbb{H}^4(-1) \subset \mathbb{H}_2^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_2^m$, $(m \geq 7)$ hiperbolik uzayındadır. İspatın devamında $\mathbb{H}^4(-1)$ içinde sabit Gauss eğriliğine sahip tümden jeodezik olmayan minimal yüzeyin olmadığı gösterilecektir.

Codazzi denkleminden $i = 1,2$ için

$$2\omega_{12}(e_i)h_{11}^3 - \omega_{34}(e_i)h_{12}^4 = 0, \quad 2\omega_{12}(e_i)h_{12}^4 - \omega_{34}(e_i)h_{11}^3 = 0 \tag{5.87}$$

elde edilir. (5.87) denkleminden

$$\omega_{34}(e_i)\left((h_{11}^3)^2 - (h_{12}^4)^2\right) = 0 \ \text{ ve } \ h_{11}^3\left((\omega_{34}(e_i))^2 - 4(\omega_{12}(e_i))^2\right) = 0 \tag{5.88}$$

bulunur. $\omega_{34} \neq 0,\ h_{11}^3 \neq 0,\ (h_{12}^4 \neq 0)$ olduğundan $i = 1,2,$ için $h_{11}^3 = \varepsilon^* h_{12}^4$ ve $\omega_{34}(e_i) = 2\mu^* \omega_{12}(e_i)$ gerçeklenir. Burada, $\varepsilon^* = \mp 1$ ve $\mu^* = \mp 1$'dir. Ayrıca, Gauss eğriliği K ve normal eğrilik K^D olmak üzere sırasıyla,

$$K = -1 - [(h_{11}^3)^2 + (h_{12}^4)^2] \ \text{ ve } \ K^D = -2h_{11}^3 h_{12}^4 \tag{5.89}$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan, $K = \langle R(e_1,e_2)e_2, e_1 \rangle$, $K^D = \left\langle R^D(e_1,e_2)e_3, e_4 \right\rangle$ ve $\omega_{34}(e_i) = 2\mu^* \omega_{12}(e_i)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$K = -[e_1(\omega_{12}(e_2)) - e_2(\omega_{12}(e_1)) + (\omega_{12}(e_1))^2 + (\omega_{12}(e_2))^2]$$

ve

$$\begin{aligned} K^D =& e_1(\omega_{34}(e_2)) - e_2(\omega_{34}(e_1)) + \omega_{12}(e_1)\omega_{34}(e_1) + \omega_{12}(e_2)\omega_{34}(e_2) \\ =& 2\mu^*[e_1(\omega_{12}(e_2)) - e_2(\omega_{12}(e_1)) + (\omega_{12}(e_1))^2 + (\omega_{12}(e_2))^2] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu iki denklemden $K^D = -2\mu^* K$ olur. (5.89) denklemi ve $h^3_{11} = \varepsilon^* h^4_{12}$ olduğu kullanılarak $-2\varepsilon^*(h^3_{11})^2 = 2\mu^*(1+2(h^3_{11})^2)$ elde edilir. O halde, $(2+\varepsilon^*\mu^*)(h^3_{11})^2 = -1$ olur, ancak $\varepsilon^*\mu^* = \mp 1$ olduğundan bu imkansızdır. Sonuç olarak, $\mathbb{H}^4(-1)$ hiperbolik uzayı içinde 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip, sabit Gauss eğrilikli, tümden jeodezik olmayan ve minimal bir yüzey yoktur.

Durum (b.2) : $\varepsilon_3 = 1 = -\varepsilon_4$ ya da $-\varepsilon_3 = 1 = \varepsilon_4$ olsun. O halde, M yüzeyi, tamamen tümden jeodezik $\mathbb{H}^4_1(-1) \subset \mathbb{H}^{m-1}_2(-1) \subset \mathbb{E}^m_2$ $(m \geq 6)$, yarı-hiperbolik uzayındadır. M yüzeyi maksimal ve h^3_{11}, h^4_{12} sabit olduklarından, Codazzi denkleminden $i = 1,2$ için

$$2\omega_{12}(e_i)h^3_{11} - \varepsilon_4\omega_{34}(e_i)h^4_{12} = 0 \text{ ve } 2\omega_{12}(e_i)h^4_{12} - \varepsilon_3\omega_{34}(e_i)h^3_{11} = 0$$

elde edilir. Bu denklemlerden, $i = 1,2$ için

$$\omega_{34}(e_i)\left((h^4_{12})^2 + (h^3_{11})^2\right) = 0 \tag{5.90}$$

olarak bulunur. h^3_{11} ve $h^4_{12} \neq 0$ olduğundan $\omega_{34}(e_i) = 0$ olmalıdır, ancak $K^D \neq 0$ olduğu için bu durum imkansızdır. Bu yüzden, $\mathbb{H}^4_1(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip, sabit Gauss eğrilikli, tümden jeodezik olmayan ve maksimal bir yüzey yoktur.

Durum (b.3) : $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$ olsun. O halde, M yüzeyi tamamen tümden jeodezik $\mathbb{H}^4_2(-1) \subset \mathbb{H}^{m-1}_2(-1) \subset \mathbb{E}^m_3$ yarı-hiperbolik uzayı içindedir. Ayrıca, süreklilikten U açık alt kümesi M yüzeyine genişletilebilir. Bu yüzden, Teorem 5.10'dan M yüzeyi hiperbolik Veronese yüzeyinin açık bir parçasıdır, [24]. □

Teorem 5.11'in ispatı gözönüne alındığında aşağıdaki sonuçlar doğrudan elde edilebilir.

Sonuç 5.10. *Tamamen $\mathbb{H}^4(-1) \subset \mathbb{E}^5_1$ hiperbolik uzayı içinde kalan 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip minimal yüzey yoktur.*

Sonuç 5.11. *Tamamen $\mathbb{H}^4_1(-1) \subset \mathbb{E}^5_2$ yarı-hiperbolik uzayı içinde kalan 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip maksimal yüzey yoktur.*

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında hiperbolik ve yarı-hiperbolik uzaylarda sonlu tipten genelleştirilmiş Gauss tasvirine, yani, hiperbolik ve yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar incelenmiştir.

İlk olarak, Obata anlamında hiperbolik ve yarı-hiperbolik Gauss tasviri tanımlanmıştır. Bu tasvirin Laplace operatörü hesaplanmıştır. M_t^n yarı-Riemann manifoldundan $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayına tanımlanan sonlu tipten düzgün bir tasvir için minimal polinom kriteri verilmiştir.

Ardından, hiperbolik uzaylarda sonlu tipten hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar çalışılmıştır. Bu bölüm iki kısımda incelenmiştir. İlk kısımda, $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ yarı-hiperbolik uzayında bir alt manifoldun 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşullar araştırılmıştır. $\mathbb{H}^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^m$ hiperbolik uzayı içinde spektral açılımında sıfırdan farklı sabit terimi olan 1-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar sınıflandırılmıştır. $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı içinde bir horohiperkürenin biharmonik Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir.

Ardından, $\mathbb{H}^{n+1}(-1) \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$ hiperbolik uzayı içinde bir alt manifoldun 2-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için bir karakterizasyon verilmiştir. Son olarak, 3-boyutlu hiperbolik uzayın tümden ombilik olmayan sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli 2-tipinde hiperbolik Gauss tasvirine sahip yüzeyleri sınıflandırılmıştır. İleride, hiperbolik uzaylarda 3-tipinden hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar araştırılabilir.

Ayrıca, tez çalışmasında yarı-hiperbolik uzaylarda sonlu tipten yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar incelenmiştir. Bu bölümde, ilk olarak $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayında 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yarı-Riemann alt manifoldlar için bir karakterizasyon verilmiştir. $\mathbb{H}_2^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_3^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde maksimal yüzeyler için sınıflandırma yapılmıştır. Ayrıca, $\mathbb{H}_1^4(-1) \subset \mathbb{E}_2^5$ yarı-hiperbolik uzayı içinde ışıksal ortalama eğrilik vektörüne ve 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal yüzeyler sınıflandırılmıştır. Son olarak, $\mathbb{H}_s^{m-1}(-1) \subset \mathbb{E}_{s+1}^m$ yarı-hiperbolik uzayı içinde spektral açılımında sabit vektörü olan ve 1-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yarı-Riemann alt manifoldların bir sınıflandırılması elde edilmiştir.

İndeksi 1 ya da 2 olan yarı-hiperbolik uzaylarda 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip uzaysal alt manifoldlar incelenmiştir. $\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal, sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli bir hiperyüzeyin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olması için bir karakterizasyon teoremi verilmiştir. Ardından, Hiperbolik Veronese yüzeyinin 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, tamamen $\mathbb{H}_2^4(-1) \subset \mathbb{H}_2^{m-1}(-1)$ yarı-hiperbolik uzayı içinde uzaysal maksimal, 2-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip yegane yüzeyin hiperbolik Veronese yüzeyi olduğu ispatlanmıştır.

Yapılan çalışmalarda, hiperbolik ve yarı-hiperbolik uzayların alt manifoldlarının genelleştirilmiş Gauss tasvirlerinin sağladığı 2. dereceden karakteristik denklemlerinin köklerinden hiçbiri sıfır olmadığından, sıfırlı 2-tipinden genelleştirilmiş Gauss tasvirine sahip uzaysal bir alt manifold yoktur.

Daha sonra, yarı-hiperbolik uzaylarda 3-tipinden yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar araştırabilir. Ayrıca, yarı-hiperbolik uzaylarda sonlu tipten yarı-hiperbolik Gauss tasvirine sahip zamansal alt manifoldlar çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Chen, B.-Y.**, (1984). Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Sci., Singapore.

[2] **Chen, B.-Y.** (1996). A report on submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.*, *22*(2), 117–337.

[3] **Chen, B.-Y.**, **Morvan, J.M. ve Nore, T.** (1986). Energy, tension and finite type maps, *Kodai Math. J.*, *9*, 406–418.

[4] **Chen, B.-Y. ve Piccinni, P.** (1987). Submanifolds with finite type Gauss Map, *Bull. Aust. Math. Soc.*, *35*, 161–186.

[5] **Chen, B.-Y.** (1985). Finite type submanifolds in pseudo-Euclidean spaces and applications, *Kodai Math. J.*, *8*, 358–374.

[6] **Chen, B.-Y.** (1986). Finite-type pseudo-Riemannian submanifolds, *Tamkang J. of Math.*, *17*(2), 137–151.

[7] **Obata, M.** (1968). The Gauss map of immersions of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature, *J. Differential Geom.*, *2*, 217–223.

[8] **Ishihara, T.** (1982). The harmonic Gauss map in a generalized sense, *J. London Math. Soc. (2)*, *26*, 104–112,.

[9] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.** (2004). Classifications of rotation surfaces in pseudo-Euclidean space, *J. Korean Math. Soc.*, *41*(2), 379–396.

[10] **Chen, B.-Y. ve Lue, H.-S.** (2007). Spherical submanifolds with finite type spherical Gauss map, *J. Korean Math. Soc.*, *44*(2), 407–442.

[11] **Bektaş, B. ve Dursun, U.** On spherical submanifolds with finite type spherical Gauss map, *Advances in Geometry*.

[12] **Chen, B.-Y.** (1992). Submanifolds of finite type in hyperbolic spaces, *Chinese J. Math.*, *20*, 5–21,.

[13] **Dursun, U.** (2011). Hypersurfaces of hyperbolic space with 1-type Gauss map, *The Int. Conf. Diff. Geom. and Dynamical Systems (DGDS-2010)*, 47–55.

[14] **Dursun, U. ve Yeğin, R.** (2015). Hyperbolic submanifolds with finite type hyperbolic Gauss map, *Internat. J. Math.*, *26*(2).

[15] **Chen, B.-Y.**, (2011). Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, USA.

[16] **Cartan, E.** (1938). Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, *17*(1), 177–191.

[17] **Lucas, P. ve Ramírez-Ospina, H.F.** (2013). Hypersurfaces in non-flat pseudo-Riemannian space forms satisfying a linear condition in the linearized operator of a higher order mean curvature, *Taiwanese J. Math.*, *17*(1), 15–45.

[18] **Zhen-qi, L. ve Xian-hua, X.** (2006). Space-like isoparametric hypersurfaces in Lorentzian space forms, *Front. Math. China*, *1*, 130–137.

[19] **Cheng, Q.-M.** (1993). Space-like surfaces in an anti-de Sitter space, *Colloq. Math.*, *LXVI*(2), 201–208.

[20] **Chen, B.-Y. ve Veken, J.V.** (2010). Classification of marginally trapped surfaces with parallel mean curvature vector in Lorentzian space forms, *Houston J. Math.*, *36*(2).

[21] **Abe, N.**, **Koike, N. ve Yamagachi, S.** (1987). Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form, *Yokohama Math. J.*, *35*, 123–136.

[22] **Sakaki, M.** (2002). Spacelike maximal surfaces in 4-dimensional space forms of index 2, *Tokyo J. Math*, *25*(2), 295–306.

[23] **Chen, B.-Y.**, (1973). Geometry of submanifolds, pure and applied mathematics, Marcel Dekker, New York.

[24] **Cheng, Q.-M.** (2000). Complete maximal spacelike surfaces in an anti-de sitter space $\mathbb{H}_2^4(c)^*$, *Glasgow Math. Journal Trust*, *42*, 139–156.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Rüya Yeğin Şen

Doğum Tarihi ve Yeri : Ankara, 04/02/1987

E-Posta : ryegin@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2009, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Lisans** : 2010, Ankara Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektronik Mühendisliği(Yandal)
- **Yüksek Lisans :** 2011, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik

MESLEKİ DENEYİM :

- 2010-2011, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi
- 2011-09/12, İstanbul Medeniyet Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi
- 2012-..., İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Araştırma Görevlisi

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- Dursun, U., **Yeğin, R.**, 2015. Hyperbolic Submanifolds with Finite Type Hyperbolic Gauss Map, *International Journal of Mathematics*, **26**(2) (2015).
- **Yeğin, R.**, Dursun, U.. On Submanifolds of Pseudo-Hyperbolic Space with 1-Type Pseudo-Hyperbolic Gauss Map, (Değerlendirmede).
- **Yeğin, R.**, Dursun, U., 2015. Spacelike Surfaces of Pseudo-Hyperbolic Space $\mathbb{H}^4_1(-1)$ with Finite Type Pseudo-Hyperbolic Gauss Map, *Seventeenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*, June 5-10, 2015, Sts. Constantine and Elena, Bulgaria.

- **Yeğin, R.**, Dursun, U., 2015. Submanifolds in $\mathbb{H}_1^{m-1}(-1)$ with Finite Type Pseudo-Hyperbolic Gauss Map, *13. Geometri Sempozyumu*, 27-30 Temmuz, 2015, İstanbul, Türkiye.

- Dursun, U., **Yeğin, R.**, 2015. Submanifolds of Pseudo-Hyperbolic Space with Finite Type Pseudo-Hyperbolic Gauss Map, *13. Geometri Sempozyumu*, 27-30 Temmuz, 2015, İstanbul, Türkiye.