İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL MANİFOLDLAR ÜZERİNDE VEKTÖR ALANLARI

DOKTORA TEZİ

Bahar KIRIK

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

OCAK 2016

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL MANİFOLDLAR ÜZERİNDE VEKTÖR ALANLARI

DOKTORA TEZİ

Bahar KIRIK
(509112071)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Füsun ÖZEN ZENGİN

OCAK 2016

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509112071 numaralı Doktora Öğrencisi Bahar KIRIK, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "BAZI ÖZEL MANİFOLDLAR ÜZERİNDE VEKTÖR ALANLARI" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Füsun ÖZEN ZENGİN** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Uğur DURSUN** ....
Işık Üniversitesi

Prof. Dr. S. Aynur UYSAL ....
Doğuş Üniversitesi

Doç. Dr. Elif CANFES ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Hülya YILMAZ ....
Marmara Üniversitesi

Teslim Tarihi : **16 Aralık 2015**
Savunma Tarihi : **14 Ocak 2016**

Aileme,

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her safhasında kıymetli vaktini ayırıp bana özverili bir şekilde yardımcı olan çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Füsun ÖZEN ZENGİN'e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca, tez ilerleme raporlarında çalışmama katkı sağlayan değerli hocalarım Prof. Dr. Aynur UYSAL ve Prof. Dr. Uğur DURSUN ile doktora sırasında İskoçya'nın Aberdeen Üniversitesi Matematik Enstitüsü'nde bulunduğum altı aylık yurt dışı araştırmam boyunca birlikte çalıştığım sayın Prof. Dr. Graham HALL'a teşekkürlerimi burada belirtmeyi bir borç bilirim. Gerek yurt içi gerekse yurt dışı çalışmalarım sırasında 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı ve 2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı kapsamında sağladığı desteklerden ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine çok teşekkür ederim. Son olarak, tüm eğitim hayatım boyunca bana her açıdan destek olan ve beni her zaman motive eden sevgili aileme tüm kalbimle teşekkür ediyorum.

Ocak 2016

Bahar KIRIK
(Araştırma Görevlisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER

∇	:	Kovaryant türev operatörü
$[X,Y]$	:	X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi
$\chi(M)$	:	M manifoldu üzerindeki C^{∞} sınıfından vektör alanlarının uzayı
$C^{\infty}(M,\mathrm{R})$	:	M'den $\mathbb{R}$'ye C^{∞} sınıfından fonksiyonların kümesi
g_{ij}	:	Metrik tensör
$[k,ij]$	:	Birinci cins Christoffel sembolü
Γ_{ij}^{k}	:	İkinci cins Christoffel sembolü
R_{ijk}^{h}	:	(1, 3) tipinden Riemann eğrilik tensörü
R_{ijkl}	:	(0, 4) tipinden Riemann eğrilik tensörü
S_{ij}	:	Ricci tensörü
r	:	Skaler eğrilik
T_mM	:	$m \in M$ noktasındaki teğet uzay
Λ_mM	:	$m \in M$ noktasındaki $2-$formların uzayı
$u.v$	:	$u, v \in T_mM$ vektörlerinin iç çarpımı
$< >$	:	Üreteç kümesi
$\perp$	:	Dik bütünleyen

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

BAZI ÖZEL MANİFOLDLAR ÜZERİNDE VEKTÖR ALANLARI

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, geometrik ve fiziksel açıdan önem taşıyan bazı manifoldlar üzerinde tanımlanabilen vektör alanlarını incelemek ve özelliklerini araştırmaktır.

Çalışmanın birinci bölümünde, çalışmada göz önüne alınacak olan bazı manifoldlar ve özel vektör alanlarından bahsedilmiştir. Bu amaçla, ilk olarak, özel manifoldlar ile ilgili literatür taraması verilmiştir. Ayrıca, bu manifoldların ve vektör alanlarının, başta geometri ve fizik olmak üzere, diğer birçok bilim ve mühendislik dalındaki uygulama alanları vurgulanmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlardan bahsedilmiştir. Daha sonra, ele alınan manifoldlar üzerinde incelenecek olan özel vektör alanlarının tanımlarına yer verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, genelleştirilmiş Einstein manifoldlarının çeşitleri incelenmiştir. İlk olarak, fiziksel açıdan önem taşıyan yarı-Einstein manifoldları üzerindeki özel vektör alanlarını inceleme problemi ele alınmıştır. Bununla birlikte, $4-$boyutlu yarı-Einstein manifoldu örneği verilmiştir. Ayrıca, yarı-Einstein manifoldlarının konformal dönüşümleri araştırılmıştır. Bu konformal dönüşüm altında, $\varphi(\mathrm{Ric})$ ve konsörkılır vektör alanlarının birtakım özellikleri elde edilmiş ve konformal dönüşümün aynı zamanda konharmonik olması halinde yarı-Einstein manifoldunun ilişkili büyüklükleri arasındaki bağıntılar bulunmuştur. Daha sonra, bu bölümde, neredeyse yarı-Einstein manifoldları göz önüne alınmıştır. Neredeyse yarı-Einstein manifoldlarının çeşitli geometrik özellikleri incelenmiştir. Bu manifoldun üreteçlerinin özel vektör alanları olabilme şartları araştırılmış ve bu manifoldlarla ilgili çeşitli teoremler ispatlanmıştır. Bunlara ek olarak, özel vektör alanları içeren neredeyse yarı-Einstein manifoldlarının konformal dönüşümleri göz önüne alınmıştır. Konformal ve konharmonik dönüşüm altında, konsörkılır ve $\varphi(\mathrm{Ric})$ vektör alanları üzerine çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, bu manifoldun $4-$boyutlu uzaylardaki örnekleri verilmiş ve neredeyse yarı-Einstein uzay-zamanı incelenmiştir.

Bu bölümde son olarak, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları üzerindeki özel vektör alanlarını inceleme problemi ele alınmıştır. Bu manifoldlar üzerinde tors oluşturan vektör alanları ve $\varphi(\mathrm{Ric})$ vektör alanları incelenmiştir. Manifoldun üreteç vektör alanlarının, söz konusu özel vektör alanları olup olmaması durumu araştırılmıştır. Bununla birlikte, Ricci tensörü için göz önüne alınan bazı özel koşullar altında, manifold üzerinde tanımlanan özel vektör alanlarının özellikleri incelenmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, pseudo Ricci simetrik ve hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifoldlar göz önüne alınmıştır. Pseudo Ricci simetrik ve hemen hemen pseudo Ricci simetrik genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldların özellikleri araştırılmıştır. Pseudo Ricci simetrik manifoldlara ait bazı sonuçlardan faydalanılarak,

genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldunun ilişkili skalerlerinin sağlaması gereken bazı şartlar elde edilmiştir. Daha sonra, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldunun aynı zamanda pseudo Ricci simetrik olması durumunda, üreteç vektör alanları incelenmiş ve bu vektör alanları ile ilgili olarak çeşitli teoremler ispatlanmıştır.

Çalışmanın beşinci ve son bölümünde ise, $(+,+,-,-)$, $(+,+,+,-)$ ve $(+,+,+,+)$ metrik işaretlerine sahip $4-$boyutlu manifoldlar göz önüne alınmıştır. Bu manifoldlar üzerinde ikinci mertebeden simetrik ve reküran olan tensör alanları incelenmiştir. Genel yaklaşım, ikinci mertebeden simetrik tensörlerin söz konusu metrik işarete göre sınıflandırılmasına dayanmaktadır. Bu problemde ilk olarak, ikinci mertebeden simetrik ve paralel olan tensör alanları araştırılmıştır. Bu tensör alanları, ilk olarak, $4-$boyutlu, nötr işaretli manifoldlar olarak isimlendirilecek olan, $(+,+,-,-)$ metrik işaretli manifoldlar için Segre tiplerine göre belirlenmiştir. Daha sonra, aynı metrik işarete göre, ikinci mertebeden simetrik reküran özelliğine sahip tensör alanları araştırılmıştır. Bu incelemeler, metriğin dolanım grubu göz önüne alınarak yapılmıştır. Daha sonra, ikinci mertebeden simetrik tensör alanları için, ilk problemde elde edilen sonuçlar özel olarak Ricci tensörüne uygulanmıştır. Ricci tensörünün paralel olması ve reküran olması problemi ele alınmıştır. Metrik işareti $(+,+,-,-)$ olan $4-$boyutlu manifoldlar için Ricci tensörünün mümkün olabileceği bütün Segre tipleri ve dolanım tipleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu uygulama sayesinde, bu manifoldun Einstein manifoldu olması durumu da incelenmiştir. Son olarak, $(+,+,-,-)$ metriği için ele alınan problemler, sırasıyla, Lorentz ve pozitif tanımlı metrik işaret olarak nitelendirilen, $(+,+,+,-)$ ve $(+,+,+,+)$ işaretli metriğe sahip manifoldlarda da araştırılmıştır. Benzer şekilde, dolanım teorisi göz önüne alınarak elde edilen sonuçlar Ricci tensörüne uygulanmıştır.

VECTOR FIELDS ON SOME SPECIAL MANIFOLDS

SUMMARY

The purpose of this thesis is to examine the vector fields which can be defined on some geometrically and physically important manifolds and investigate their properties. By considering some vector fields on these special manifolds, various theorems related to these vector fields are proved and some geometrical properties of these manifolds are obtained.

In the first chapter, it is mentioned about some manifolds and special vector fields which are taken into consideration in the study. For this purpose, first of all, a review of literature related to these special manifolds is given. Furthermore, the application areas of these special manifolds and vector fields to many other branches of science and engineering disciplines, mainly differential geometry and physics is highlighted.

In the second chapter, it is introduced some fundamental concepts which are used in the study. Then, the definitions of some special vector fields such as torse-forming vector fields, concircular vector fields, recurrent vector fields, parallel vector fields, $\varphi(\mathrm{Ric})$-vector fields, which will be examined on discussed manifolds, are given. In addition, some known results about these notions which will be considered later are given.

In the third chapter, the types of the generalizations of Einstein manifolds are examined. In this examination, three kinds of these manifolds which are called the quasi-Einstein manifolds, the nearly quasi-Einstein manifolds and the generalized quasi-Einstein manifolds are considered.

Firstly, the problem of examining some special vector fields on quasi-Einstein manifolds which are physically important is discussed. It is shown that if the generator vector field of the quasi-Einstein manifold is a $\varphi(\mathrm{Ric})$-vector field, then this vector field must be parallel. Also, it is considered that if a quasi-Einstein manifold admits a $\varphi(\mathrm{Ric})$-vector field, the relationship between the generator of the manifold and this vector field is found.

On the other hand, an example of a quasi-Einstein manifold which is $4-$dimensional is given. Moreover, conformal mappings between quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields are investigated. Under conformal mapping, some theorems are proved and some properties of $\varphi(\mathrm{Ric})$-vector fields and concircular vector fields are obtained. At the same time, in the case the conformal transformation is also a conharmonic one, which is a conformal transformation preserving the harmonicity of a certain function, the relations between the associated scalars of quasi-Einstein manifolds are found.

After that, in this chapter, nearly quasi-Einstein manifolds are considered. By considering a special type nearly quasi-Einstein manifold, the conditions of being

special vector fields of the generators of this manifold are investigated and some theorems about this manifold are proved.

In addition, conformal mappings of nearly quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields are considered. Under the conformal transformation and conharmonic transformation, some results on concircular vector fields and $\varphi(\mathrm{Ric})$-vector fields are given. Moreover, examples of these manifolds on $4-$dimensional spaces are given and nearly quasi-Einstein space-time is studied.

In this chapter, finally, the problem of examining special vector fields on generalized quasi-Einstein manifolds is considered. The conditions for a generalized quasi-Einstein manifold admitting special vector fields when the Ricci tensor of the manifold satisfies some conditions are determined. Torse-forming vector fields and $\varphi(\mathrm{Ric})$-vector fields are examined on these manifolds. Also, the conditions whether the generators, which are described as vector fields on these manifolds, can be some special vector fields or not are investigated. Meanwhile, under the certain specific conditions taken into the Ricci tensor, some properties of special vector fields defined on the manifold are examined.

In the fourth chapter, pseudo Ricci symmetric and almost pseudo Ricci symmetric manifolds are considered. The properties of pseudo Ricci symmetric generalized quasi-Einstein manifolds and almost pseudo Ricci symmetric generalized quasi-Einstein manifolds are investigated. From the known results about pseudo Ricci symmetric manifolds, some conditions required to be provided by the associated scalars are obtained.

Later, assuming that a generalized quasi-Einstein manifold is also a pseudo Ricci symmetric, the associated vector fields of this manifold are examined and some theorems related to these vector fields are proved. Some relations between the generator vector fields of the pseudo Ricci symmetric manifold and the generalized quasi-Einstein manifold are found.

In this chapter, finally, by assuming that a generalized quasi-Einstein manifold is also an almost pseudo Ricci symmetric manifold, some relations between the generators are found likewise in the pseudo Ricci symmetric case.

In the fifth and the last chapter, $4-$dimensional manifolds admitting a metric of signature $(+,+,-,-)$, $(+,+,+,-)$ and $(+,+,+,+)$ are considered. The recurrence structure of the second order symmetric tensors on these manifolds are examined. The technique used is to first solve the problem when the tensor in question is either parallel (covariantly constant) or can be scaled so that it is parallel. Then one considers those recurrent tensors which are not in this category. This will allow a definition of proper recurrence for such tensors (and the vector fields) and it is investigated in this work. The general approach is based on the classification scheme of the second order symmetric tensors with respect to the metric signature which is at issue. The analysis is based on the holonomy group of the Levi-Civita connection associated with the metric, the possible Lie algebras of which are known. In this problem, the tensor fields which are the second order symmetric and parallel are investigated initially.

Firstly, these tensor fields are determined with respect to the Segre types for $4-$dimensional manifolds with signature $(+,+,-,-)$ which will be called a neutral signature. Then, the tensor fields which are the second order symmetric and recurrent are investigated for the same metric signature. These investigations are made by considering the holonomy group of the metric.

After that, the results obtained for the second order symmetric tensors in the first problem are applied specially to the Ricci tensor. Thus, the problems of Ricci tensor which is parallel and Ricci-recurrent are examined. These problems are investigated by considering the possible Segre types for the Ricci tensor on the manifold. All possible Segre types and holonomy types for the Ricci tensor are obtained for $4-$dimensional manifolds admitting a metric with signature $(+,+,-,-)$. Also, with the help of this application, the case of being an Einstein manifold, that is the Ricci tensor is proportional to the metric tensor, of this manifold is studied.

A by-product of this study is the finding of certain useful, direct techniques to study the properties of the various holonomy types using direct algebraic methods and the Ambrose-Singer theorem.

Finally, the same problems discussed for the metric signature $(+,+,-,-)$ are investigated for the metrics of signature $(+,+,+,-)$ and $(+,+,+,+)$ which are called Lorentz signature and positive definite signature, respectively. Similarly, the results obtained by considering the holonomy theory are then applied to the Ricci tensor and the possible Segre types and holonomy types are determined for these metric signatures.

1. GİRİŞ

Literatürde, bazı özel Riemann ve pseudo-Riemann manifoldları tanımlanmıştır. Bu özel manifoldlardan biri olan Einstein manifoldları ile ilgili hem diferansiyel geometride, hem de fizikte çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Einstein manifoldunda, Ricci tensörü metrik tensör ile orantılıdır, [1]. Öte yandan Einstein manifoldları, genel görelilik teorisindeki Einstein alan denklemlerinin vakum çözümlerinde ortaya çıkmaktadır. Genel görelilik teorisinde, kozmolojik sabit içeren Einstein alan denklemi

$$S_{ij} - \frac{1}{2} r g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \tag{1.1}$$

bağıntısı ile verilir. Burada, S_{ij} Ricci tensörünü, g_{ij} metrik tensörü, r skaler eğriliği, Λ kozmolojik sabiti, G Newton'un yerçekimi sabitini, c ışık hızını ve T_{ij} gerilme-enerji tensörünü göstermektedir. Eğer $T_{ij} = 0$ ise, bu denklemler vakum alan denklemleri adını alır. Bu durumda, vakum alan denklemleri Einstein manifoldlarını vermektedir.

Einstein manifoldları, pek çok akademisyen tarafından genelleştirilmiş ve böylece özel manifoldlar tanımlanmıştır. Einstein manifoldları, yarı-Einstein manifoldlarının bir alt sınıfını oluşturmaktadır. Bu manifoldlar, Einstein alan denklemlerinin tam çözümlerinin bulunmaya çalışılması sonucunda ortaya çıkmaktadır. Birçok makalede bu manifoldların çeşitli özellikleri incelenmiştir, [2–6].

Yarı-Einstein manifoldlarının genelleştirilmişi olan manifoldlarla ilgili literatürde birçok çalışma yapılmış ve pek çok matematikçi, yarı-Einstein manifoldları üzerinde farklı koşullar göz önüne alarak, farklı manifoldlar tanımlamışlardır. Bu özel manifoldlardan bazıları, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları [7, 8], süper yarı-Einstein manifoldları [9], neredeyse yarı-Einstein manifoldları [10], karışık genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları [11], pseudo genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları [12] şeklinde isimlendirilmiştir. Genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları, ısı akışı içeren $4-$boyutlu uzay-zaman çalışmaları ile ilgili olması sebebiyle fiziksel açıdan önemli bir yer teşkil etmektedir. Başka bir deyişle, genel görelilik açısından, $4-$boyutlu Lorentz işaretli bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu, ısı akışı içeren bir uzay-zamanıdır, [6].

Şimdiye kadar sözü edilen manifoldların dışında, günümüzde, pseudo simetrik [13], pseudo Ricci simetrik [14], hemen hemen pseudo Ricci simetrik [15] ve zayıf Ricci simetrik [16] olarak adlandırılan özel manifoldların genel görelilik teorisinde uygulamaları olması sebebiyle matematikçilerin ilgisini çekmektedir. $4-$boyutlu Lorentz işaretli pseudo Ricci simetrik manifoldlar, uzay-zaman modeli olarak alınarak, bu manifoldların birtakım özellikleri incelenmiştir. Benzer fiziksel uygulamalar, hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifoldlar için de yapılmıştır. Bu manifold, mükemmel akışkanlı uzay-zaman modeli olarak düşünülerek birtakım sonuçlar elde edilmiştir.

Riemann ve pseudo-Riemann geometrisinde önemli yer teşkil eden kavramlardan biri de konformal tasvirdir. Bu tasvirler açıyı ve lokal olarak şekli korur. Akışkanlar mekaniği, genel görelilik, haritacılık gibi birçok alanda konformal dönüşümler kullanılmaktadır. Literatürde, konformal dönüşümler ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır, [17–23]. H. W. Brinkmann [17] Einstein manifoldlarının konformal dönüşümlerini ele alarak çeşitli sonuçlar elde etmiş ve Einstein manifoldunu Einstein manifolduna dönüştüren konformal dönüşümleri araştırmıştır. Son zamanlarda, ayrıca, yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlarının konformal dönüşümleri de incelenmeye başlanmıştır, [20, 22].

Geometride kullanılan temel nesnelerden biri olan vektör alanları, çeşitli fizik modellemelerinde kullanılmasından dolayı önemli bir yere sahiptir. Örneğin, hareketli bir sıvının hızı, çeşitli akışlar, manyetik alanlar ve yerçekimi alanı konularında vektör alanları kullanılmaktadır. Bununla birlikte vektör alanları, sadece matematik ve fizikte değil, biyoloji, meteoroloji ve çeşitli mühendislik dalları gibi pek çok sahada uygulama alanı bulmaktadır. Vektör alanlarının diferansiyel geometri yanında pek çok dalda kullanılması gerçeği, bu kavramlar hakkında elde edilen geometrik sonuçların özellikle fizikteki uygulamaları, yorumlanması ve farklı manifoldlardaki sonuçlarının araştırılması problemini ortaya çıkarmaktadır. Böylece, diferansiyel geometride temel bir yere sahip olan vektör alanlarının fizikteki uygulanabilirliğini araştırma ihtiyacı ortaya çıkmaktadır.

Yukarıda bahsedilen sebeplerden dolayı, hem matematiksel hem de fiziksel açıdan önem teşkil eden manifoldlar üzerinde özel vektör alanlarını inceleme isteği doğmaktadır. Bu vektör alanlarından bazıları, paralel vektör alanları, reküran vektör alanları, konsörkılır vektör alanları, tors oluşturan vektör alanları, [24–26] ve $\varphi(\mathrm{Ric})$ vektör alanlarıdır, [27]. Özellikle, tors oluşturan vektör alanlarının özel bir hali olan reküran vektör alanları ile paralel vektör alanları dolanım teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Öte yandan, dolanım teorisi esas alınarak uygulanan teknikler yardımıyla, çeşitli manifoldlar üzerinde geometrik yapılar araştırılmaktadır. Örneğin, $4-$boyutlu, farklı metrik işaretli manifoldlar üzerinde pek çok çalışma yapılmıştır ve bu yapıların birçok özelliği elde edilmiştir, [28–35].

Bu çalışmada, ilk olarak, yukarıda bahsedildiği üzere, fiziksel açıdan önem taşıyan yarı-Einstein, neredeyse yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları üzerindeki özel vektör alanlarını inceleme problemi ele alınmıştır. Bu manifoldların çeşitli özellikleri incelenerek, bu manifoldlar üzerinde tors oluşturan vektör alanları, paralel vektör alanları ve $\varphi(\mathrm{Ric})$ vektör alanları gibi bazı özel vektör alanlarının durumu araştırılmıştır.

Bununla birlikte, yarı-Einstein ve neredeyse yarı-Einstein manifoldlarının konformal dönüşümleri ele alınarak, bu manifoldların varlığına ait örnekler bulunmuştur.

Daha sonra, pseudo Ricci simetrik ve hemen hemen pseudo Ricci simetrik genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları üzerinde incelemeler yapılmıştır. Bu manifoldların üreteçlerinin özel vektör alanları olması durumunda, manifoldların fiziksel büyüklüklerinin nasıl değişeceği üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca, pseudo Ricci simetrik genelleştirilmiş yarı-Einstein uzay-zamanı göz önüne alınarak, bu uzaylarda bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmada, son olarak, farklı metrik işaretli bazı özel manifoldlar üzerinde vektör alanları incelenmiştir. Genel görelilik teorisinde önemli bir yere sahip olan özel manifoldlar ele alınmış ve bu manifoldların içerdiği özel vektör alanlarının geometrik ve fiziksel uygulama alanları üzerine çalışılmıştır. İkinci mertebeden simetrik ve reküran olan tensör alanları, $4-$boyutlu $(+,+,-,-)$ metrik işaretli, Lorentz metrik işaretli ve pozitif tanımlı manifoldlar üzerinde incelenmiştir. Daha sonra, bu yapı ikinci mertebeden simetrik bir tensör olan Ricci tensörüne uygulanarak çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

2. BAZI ÖZEL VEKTÖR ALANLARI

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 M bir diferansiyellebilir manifold olsun. M manifoldu üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan simetrik, pozitif tanımlı ve bilineer g Riemann metriği ile verilen M manifolduna bir Riemann manifoldu denir ve (M, g) ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 M, $n-$boyutlu bir diferansiyellebilir manifold olsun.

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için

1. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
2. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
4. $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y$

bağıntılarını gerçekliyorsa, ∇ operatörüne M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon (lineer bağlantı) adı verilir.

Tanım 2.1.3 Bir ∇ operatörü lineer konneksiyon şartlarına ek olarak, $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için

5. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (burulmasız konneksiyon)
6. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (metrik konneksiyon)

şartlarını da sağlıyorsa, bu konneksiyona Riemann Konneksiyonu adı verilir.

Aşağıda verilecek olan teorem, *Riemann Geometrisi'nin Temel Teoremi* olarak bilinmektedir.

Teorem 2.1.1 M bir Riemann manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde burulmasız bir ve yalnız bir metrik konneksiyonu vardır.

Tanım 2.1.4 (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve $x^1,...,x^n$, M manifoldu üzerinde bir lokal koordinat sistemi olsun. M manifoldunun birinci cins ve ikinci cins Christoffel sembollerinin ifadeleri, sırasıyla,

$$[k,ij] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \tag{2.1}$$

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kh}[h,ij] \tag{2.2}$$

şeklinde verilir, burada tekrarlanan h indisi üzerinde toplam vardır ve g^{kh} tensörü g_{kh} metrik tensörünün eşleniğini göstermekte olup,

$$g_{ik}\,g^{kh} = \delta^h_i \tag{2.3}$$

dir, [36].

Bundan sonra, (2.2) ve (2.3) ifadelerinde ele alındığı gibi, tekrarlanan indisler üzerinde *Einstein toplama kuralı* kullanılacaktır.

Tanım 2.1.5 (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M manifoldu üzerinde tanımlı Riemann konneksiyonu olsun. $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.4}$$

olarak tanımlanan $R : \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ dönüşümü, M üzerinde (1,3) tipinden bir tensör alanıdır. Bu tensör alanına M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü denir ve

$$R(\partial_j,\partial_k)\partial_i = R^h_{ijk}\partial_h \tag{2.5}$$

şeklinde yazılır. Burada, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1,...,n)$ koordinat vektör alanlarını göstermektedir. R^h_{ijk} fonksiyonlarına *Riemann eğrilik tensörü katsayıları* denir ve bu katsayılar

$$R^h_{ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ki} - \partial_k \Gamma^h_{ji} + \Gamma^h_{jl}\Gamma^l_{ki} - \Gamma^h_{kl}\Gamma^l_{ji} \qquad (2.6)$$

şeklindedir.

$\forall$ $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için, $R(X,Y,Z,W) = g(X,R(Z,W)Y)$ olarak tanımlanan (0, 4) tipindeki tensör alanına *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* denir ve lokal koordinatlarda,

$$R_{ijkl} = g_{ih}R^h_{jkl} \qquad (2.7)$$

biçiminde ifade edilir.

Riemann-Christoffel eğrilik tensörünün özellikleri aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 2.1.2 ([37]) (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu olsun.
$\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için, manifoldun eğrilik tensörü

i. $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$ (I. Bianchi Özdeşliği)

ii. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$

iii. $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$

iv. $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

bağıntılarını gerçeklemektedir.

Önerme 2.1.1 (II. Bianchi Özdeşliği) (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M manifoldu üzerindeki Riemann konneksiyonu olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_Z R)(X,Y) + (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) = 0 \qquad (2.8)$$

dir, [38].

Tanım 2.1.6 ([38]) (M,g) $n-$boyutlu $(n > 2)$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü paralel ise, yani

$$\nabla R = 0 \qquad (2.9)$$

koşulu sağlanıyorsa, bu manifolda lokal simetrik manifold adı verilir.

Tanım 2.1.7 (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$, bu manifoldun teğet uzayının ortonormal bir bazı olmak üzere,

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.10}$$

ile verilen (0, 2) tipinden S tensör alanına Ricci tensörü denir.

Lokal koordinatlarda, Ricci tensörünün bileşenleri S_{ij} $(i,j=1,...,n)$ ile gösterilmek üzere,

$$S_{ij}=R^{k}_{ijk}=g^{kl}R_{lijk} \tag{2.11}$$

bağıntısı mevcuttur.

Q Ricci operatörü ise,

$$g(QX,Y)=S(X,Y) \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.1.8 (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$, bu manifoldun teğet uzayının ortonormal bir bazı olmak üzere, M manifoldunun r skaler eğrilik fonksiyonu

$$r=\sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i) \tag{2.13}$$

şeklindedir.

Lokal koordinatlarda, (2.13) ifadesi

$$r=g^{ij}S_{ij} \tag{2.14}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.9 (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M manifoldunun R Riemann eğrilik tensörü özdeş olarak sıfırsa, bu manifolda düz manifold adı verilir. Eğer M manifoldunun S Ricci tensörü özdeş olarak sıfırsa, bu manifolda Ricci-düz manifold adı verilir.

2.2 Bazı Özel Vektör Alanları

Bu bölümde, çalışmanın devamında göz önüne alınacak olan özel manifoldlar üzerindeki vektör alanlarının tanımları verilecektir.

Tanım 2.2.1 ([38]) (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve A bir tensör alanı olsun. $\forall\, V \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_V A = 0 \tag{2.15}$$

koşulu sağlanıyorsa, A tensör alanına paralel tensör alanı adı verilir.

Tanım 2.2.2 ([24]) (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve ξ, M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer $\forall\, X \in \chi(M)$ için, ξ vektör alanı

$$\nabla_X \xi = \rho X + \lambda(X)\xi \tag{2.16}$$

bağıntısını gerçekliyorsa, bu vektör alanına tors oluşturan vektör alanı adı verilir. Burada, ρ bir skaler fonksiyon ve λ bir lineer formdur.

Lokal koordinatlar kullanılırsa, (2.16) ifadesi

$$\nabla_i \xi^h = \rho\ \delta_i^h + \xi^h \lambda_i \tag{2.17}$$

şeklinde yazılır. Burada ξ^h ve λ_i, sırasıyla, ξ ve λ'nın bileşenleri olup, δ_i^h ise Kronecker delta sembolüdür. Bu bağıntıda,

i. $\rho = 0$ ise, ξ vektör alanına *reküran vektör alanı*,

ii. λ_i bir gradiyent kovektör ise, yani, $\lambda = d\upsilon(x)$ olacak şekilde bir $\upsilon(x)$ fonksiyonu varsa, ξ vektör alanına *konsörkılır vektör alanı*

denir. Buna göre, $\xi^h = g^{ih}\xi_i$ olmak üzere, (2.17) ifadesi yardımıyla, reküran ve konsörkılır vektör alanları için, sırasıyla,

$$\nabla_j \xi_i = \lambda_j \xi_i \tag{2.18}$$

ve

$$\nabla_j \xi_i = \rho g_{ij} \tag{2.19}$$

bağıntıları elde edilir. Üzerinde konsörkılır vektör alanı tanımlanan bir Riemann manifolduna *eş mesafeli manifold* adı verilir.

Tanım 2.2.3 ([27]) (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve φ, M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer, φ vektör alanı

$$\nabla\varphi = \mu \mathrm{Ric} \tag{2.20}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu vektör alanına $\varphi(Ric)$ vektör alanı adı verilir. Burada, μ bir sabittir ve Ric, Ricci tensörünü göstermektedir.

Şimdi, M manifoldu üzerinde sabit uzunluklu olan bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı için elde edilen ve bu çalışma açısından yararlı olacak bir sonuç verilecektir.

Teorem 2.2.1 ([27]) (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann (ya da yarı-Riemann) manifoldu olsun. M manifoldu sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanına sahipse, bu manifoldun skaler eğriliği sabittir.

3. YARI-EINSTEIN VE GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI-EINSTEIN MANİFOLDLARI

3.1 Yarı-Einstein Manifoldları

Einstein manifoldları, genel görelilik teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle, matematiğin yanı sıra fizikte de bu manifoldlarla ilgili çalışmalar yapılmıştır. Einstein manifoldları ile ilgili ayrıntılı bilgi [1] numaralı kaynakta bulunmaktadır.

Tanım 3.1.1 (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann (ya da yarı-Riemann) manifoldu olsun. $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X,Y) = \frac{r}{n} g(X,Y) \tag{3.1}$$

koşulu gerçekleniyorsa, bu manifolda Einstein manifoldu denir. Burada, S, r ve g M manifoldunun, sırasıyla, Ricci tensörünü, skaler eğriliğini ve metrik tensörünü göstermektedir.

Tanım 3.1.2 ([2]) (M,g), $n-$boyutlu $(n > 2)$ bir Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun Ricci tensörü sıfırdan farklı olmak üzere, $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\phi(X)\phi(Y) \tag{3.2}$$

koşulu sağlanıyorsa, M manifolduna yarı-Einstein manifoldu adı verilir. Burada, a ve b skaler fonksiyonlar olup, $b \neq 0$'dır. Bu fonksiyonlara, M manifoldunun ilişkili skalerleri denir. ϕ, sıfırdan farklı 1-formdur ve

$$g(X,U) = \phi(X) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. U, bir birim vektör alanıdır ve bu vektör alanına M manifoldunun üreteci denir. $n-$boyutlu bir yarı-Einstein manifoldu kısaca, $(QE)_n$ sembolü ile gösterilmektedir.

Yarı-Einstein manifoldlarının önemi ilk bölümde açıklanmıştır. Bu sebeple, bu manifoldlarla ilgili pek çok çalışmalar yapılmıştır. Yarı-Einstein manifoldlarının ilişkili katsayılarının skaler olmaları durumu, M. C. Chaki ve R. K. Maity tarafından 2000 yılında göz önüne alınmış ve bu manifoldların özellikleri incelenmiştir, [2]. Özel bir durum olarak, [4,5] numaralı makalelerde, (3.2) koşulundaki a ve b katsayıları reel sayılar olarak alınıp, bu manifoldlarla ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

$(e_i)_{i=1}^{n}$, $(QE)_n$ manifoldunun bir ortonormal bazı olmak üzere, (3.2) koşulu kullanılırsa, manifoldun skaler eğrilik fonksiyonu

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) = na + b \tag{3.4}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$S(U,U) = a + b \tag{3.5}$$

bağıntısı gerçeklenir.

3.1.1 Yarı-Einstein manifoldları üzerindeki özel vektör alanları

Bu bölümde, yarı-Einstein manifoldları üzerinde bazı özel vektör alanları göz önüne alınacaktır. Öncelikle, Teorem 2.2.1'in tersinin de doğru olduğu aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 3.1.1 (M,g) Riemann manifoldunun skaler eğriliği sabit olsun. φ, M manifoldu üzerinde bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı oluştursun. Bu durumda, φ tarafından üretilen vektör alanının uzunluğu sabittir.

İspat: (M,g) Riemann manifoldunun skaler eğriliği sabit ve φ, M manifoldu üzerinde bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı meydana getirsin. Ricci özdeşliği ve (2.20) bağıntısı kullanılırsa,

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = \mu(\nabla_k S_{ij} - \nabla_j S_{ik}) \tag{3.6}$$

elde edilir. Burada, μ sabittir ve φ_α, R^α_{ijk}, S_{ij}, sırasıyla, φ tarafından üretilen vektör alanının, eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün bileşenlerini göstermektedir.

II. Bianchi özdeşliği olarak verilen (2.8) bağıntısı (3.6) ifadesinde kullanılırsa,

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = \mu \; \nabla_\alpha R^\alpha_{ijk} \tag{3.7}$$

denklemi bulunur.

Diğer taraftan, daraltılmış II. Bianchi özdeşliği yardımıyla ve $S_k^{\alpha} = g^{i\alpha}S_{ik}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ bağıntısından, r manifoldun skaler eğrilik fonksiyonu olmak üzere,

$$\varphi_{\alpha}S_k^{\alpha} = \frac{\mu}{2}\,\nabla_k r \tag{3.8}$$

elde edilir.

M manifoldunun skaler eğriliği sabit olarak kabul edildiğinden, (3.8) denklemi yardımıyla,

$$\varphi_{\alpha}S_k^{\alpha} = 0 \tag{3.9}$$

bulunur.

Öte yandan, φ tarafından üretilen vektör alanının uzunluğunun karesinin kovaryant türevi alınırsa ve (2.20) ve (3.9) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_k(g^{ij}\varphi_i\varphi_j) &= g^{ij}(\nabla_k\varphi_i)\varphi_j + g^{ij}\varphi_i\nabla_k\varphi_j \\ &= \mu(g^{ij}S_{ik}\varphi_j + g^{ij}S_{jk}\varphi_i) \\ &= 2\mu\ \varphi_j S_k^j \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.10}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda, (3.10) denkleminden, φ tarafından üretilen vektör alanının uzunluğunun sabit olması gerektiği görülür ve ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi, $(QE)_n$ manifoldunun U üreteç vektör alanının $\phi(Ric)$ vektör alanı olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, (2.20) denklemi göz önüne alınarak, μ bir sabit olmak üzere,

$$\nabla_j\phi_i = \mu S_{ij} \tag{3.11}$$

elde edilir. $(QE)_n$ manifoldunun üretecinin (3.11) bağıntısını sağlaması durumu ele alınarak aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.2 $(QE)_n$ manifoldunun ϕ, 1-formuna karşılık gelen U vektör alanı, $\phi(Ric)$ vektör alanı olsun. Bu durumda, U vektör alanı paralel vektör alanıdır.

İspat: $(QE)_n$ manifoldunun U üreteç vektör alanı, $\phi(Ric)$ vektör alanı olsun. (3.2) koşulu (3.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\nabla_j\phi_i = \mu(ag_{ij} + b\phi_i\phi_j) \tag{3.12}$$

şeklinde elde edilir.

Böylece, (3.12) denklemi, ϕ^i ile çarpılırsa ve $g(U,U)=1$ koşulu kullanılırsa,

$$\mu(a+b)\phi_j = 0 \tag{3.13}$$

bulunur.

μ sabiti sıfırdan farklı olmak üzere, (3.13) denkleminden,

$$a = -b \tag{3.14}$$

bağıntısı elde edilir. Bu durumda, (3.2) ve (3.14) denklemleri kullanılarak,

$$S_{ij} = a(g_{ij} - \phi_i\phi_j) \tag{3.15}$$

bulunur. Daha sonra, (3.15) ifadesi ϕ^i ile çarpılırsa,

$$S_{ij}\phi^i = 0 \tag{3.16}$$

koşulu gerçeklenir. Şimdi, (3.16) koşulunun kovaryant türevi alınırsa ve (3.11) denklemi göz önüne alınırsa,

$$(\nabla_k S_{ij})\phi^i + \mu S_{ij}S^i_k = 0 \tag{3.17}$$

bağıntısı elde edilir. Bu durumda, (3.17) denklemi g^{jk} ile çarpılırsa, $S^{ij} = g^{jk}S^i_k$ olmak üzere,

$$(\nabla_k S^k_i)\phi^i + \mu S_{ij}S^{ij} = 0 \tag{3.18}$$

bulunur.

U birim vektör alanı olduğundan, Teorem 2.2.1'e göre, manifoldun skaler eğriliği sabittir. Ayrıca, daraltılmış II. Bianchi özdeşliği yardımıyla,

$$\nabla_k S^k_i = \frac{1}{2}\nabla_i r = 0 \tag{3.19}$$

bağıntısı mevcuttur. Böylece, (3.18) ve (3.19) ifadeleri kullanılırsa, μ sabiti sıfırdan farklı kabul edildiğinden,

$$S_{ij}S^{ij} = 0 \tag{3.20}$$

denklemi elde edilir. Buradan, (3.15) ve (3.20) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$(n-1)a^2 = 0 \tag{3.21}$$

sonucu bulunur. Böylece, yarı-Einstein manifoldunun boyutu $n > 2$ olduğundan, (3.21) denklemine göre, $a = 0$ olmak zorundadır. Bu takdirde, (3.15) denklemine göre, Ricci tensörünün sıfır olması gerektiği görülür. Bu sonuç, hipotezle çelişki yaratmaktadır. Dolayısıyla, μ sabiti sıfır olmak zorundadır. Böylece, U üreteç vektör alanının paralel vektör alanı olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.1.3 φ, $(QE)_n$ manifoldu üzerinde sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı meydana getirsin. Bu takdirde, ϕ_i ve φ_i eşdoğrusaldır ya da Ricci tensörü

$$S_{ij} = b\ \phi_i \phi_j$$

şeklinde olmalıdır.

İspat: φ, $(QE)_n$ manifoldu üzerinde sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı oluştursun. Bu durumda, c bir sabit olmak üzere,

$$\varphi_i \varphi^i = c \tag{3.22}$$

koşulu gerçeklenir. Bu takdirde, (3.22) bağıntısının kovaryant türevi alınırsa ve (2.20) denklemi kullanılırsa, μ sabiti sıfırdan farklı olduğundan,

$$S_{ik} \varphi^i = 0 \tag{3.23}$$

bulunur. Ayrıca, (3.2) ve (3.23) ifadeleri yardımıyla,

$$a\varphi_k + b\ (\varphi^i \phi_i)\phi_k = 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. Böylece, (3.24) denklemi ϕ^k ile çarpılırsa ve $g(U,U) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(a+b)\varphi_k \phi^k = 0 \tag{3.25}$$

sonucuna ulaşılır.

Bu durumda, $\varphi_k \phi^k = 0$ ise, (3.24) denklemine göre, $a = 0$ olmak zorundadır. Sonuç olarak, Ricci tensörü

$$S_{ij} = b\phi_i \phi_j \tag{3.26}$$

formuna indirgenir.

Eğer $\varphi_k \phi^k \neq 0$ ise, (3.25) denklemine göre, $a = -b$ olmalıdır. $b \neq 0$ olduğundan $a \neq 0$ olmalıdır ve böylece, (3.24) denkleminden,

$$\varphi_k = (\varphi^i \phi_i)\phi_k \tag{3.27}$$

bulunur. Dolayısıyla, φ_k ve ϕ_k eşdoğrusaldır. Böylece, ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 3.1.1 φ, $(QE)_n$ manifoldu üzerinde sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı meydana getirsin. Eğer φ tarafından üretilen vektör alanı manifoldun üreteç vektör alanına dik değilse, bu durumda φ vektör alanı paralel vektör alanıdır ve $(QE)_n$ manifoldunun ilişkili skalerleri sabittir.

İspat: φ tarafından üretilen vektör alanının manifoldun üreteç vektör alanına dik olmadığı kabul edilsin. Bu durumda, Teorem 3.1.3'ten, $(QE)_n$ manifoldunun ilişkili skalerleri arasında $a = -b$ bağıntısı mevcuttur. Bununla birlikte, (3.4) denklemi kullanılırsa,

$$r = (n-1)a \tag{3.28}$$

elde edilir. Teorem 2.2.1'e göre, r skaler eğriliği sabit olmalıdır. Böylece, (3.28) denkleminden, manifoldun ilişkili skalerlerinin sabit olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Öte yandan, (3.27) denklemi φ^k ile çarpılırsa ve (3.22) göz önüne alınırsa, $\varphi^i\phi_i$ ifadesinin sabit olduğu görülür. Böylece, (3.27) denklemine göre, U üreteç vektör alanının da $\phi(Ric)$ vektör alanı olduğu sonucuna ulaşılır. Teorem 3.1.2'ye göre, U vektör alanı paralel vektör alanı olmak zorundadır. Diğer taraftan, U ve φ tarafından üretilen vektör alanı eşdoğrusal olduğundan, φ tarafından üretilen vektör alanı da paralel vektör alanıdır. Bu takdirde, ispat tamamlanır. $\square$

Örnek 3.1.1 $\mathbb{R}^4$ üzerinde, aşağıdaki gibi tanımlanan g metriği göz önüne alınsın

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = (1+e^{x^1})[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2]. \tag{3.29}$$

Burada, $i, j = 1,2,3,4$ ve x^1, x^2, x^3, x^4, $\mathbb{R}^4$'ün standart koordinatlarıdır. Buna göre, sıfırdan farklı olan Christoffel sembolleri, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün bileşenleri ve skaler eğrilik, sırasıyla,

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{44} = -e^{x^1}/2(1+e^{x^1}),\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^4_{14} = e^{x^1}/2(1+e^{x^1}),$$

$$R_{1221} = R_{1331} = R_{1441} = e^{x^1}/2(1+e^{x^1}),$$

$$R_{2332} = R_{2442} = R_{3443} = e^{2x^1}/4(1+e^{x^1}),$$

$$S_{11} = 3e^{x^1}/2(1+e^{x^1})^2,$$

$$S_{22} = S_{33} = S_{44} = e^{x^1}/2(1+e^{x^1}),$$

$$r = \frac{3e^{x^1}(2+e^{x^1})}{2(1+e^{x^1})^3}$$

olarak bulunur. O halde, (M_4, g) bir Riemann manifoldudur. Şimdi, bu manifoldun $(QE)_4$ olduğu gösterilecektir. Herhangi bir $x \in M_4$ için, a ve b ilişkili skalerleri ile ϕ, 1-formundan üretilen vektör alanının bileşenleri,

$$a = \frac{e^{x^1}}{2(1+e^{x^1})^2}, \quad b = \frac{2e^{x^1} - e^{2x^1}}{2(1+e^{x^1})^3}$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \sqrt{1+e^{x^1}}, & i = 1 \; ise \\ 0, & i = 2,3,4 \; ise \end{cases}$$

şeklinde seçilirse,

(i) $S_{11} = ag_{11} + b\phi_1\phi_1$,

(ii) $S_{22} = ag_{22} + b\phi_2\phi_2$,

(iii) $S_{33} = ag_{33} + b\phi_3\phi_3$,

(iv) $S_{44} = ag_{44} + b\phi_4\phi_4$,

(v) $g^{ij}\phi_i\phi_j = 1$

denklemleri sağlanmaktadır. $(i) - (v)$ durumlarının dışındaki diğer durumların sağlanması aşikardır. Böylece, (3.2) koşulu gerçeklenir ve (M_4, g) manifoldunun (3.29) metriği ile birlikte bir $(QE)_4$ olduğu ispatlanmış olur.

3.1.2 Yarı-Einstein manifoldlarının konformal dönüşümleri

Bu bölümde, yarı-Einstein manifoldlarının konformal dönüşümleri incelenecektir. Bu yüzden, ilk olarak, konformal dönüşümle ilgili temel tanımlardan bahsedilecektir.

Tanım 3.1.3 (M, g) ve $(\bar{M}, \bar{g})$, $n-$boyutlu Riemann manifoldları olsun. f tasviri, M'den $\bar{M}$'ye bir difeomorfizma olarak göz önüne alınsın. Bu takdirde, σ, M üzerinde skaler bir fonksiyon olmak üzere,

$$\bar{g} = e^{2\sigma} g \tag{3.30}$$

olacak şekilde tanımlanan f difeomorfizmasına bir konformal dönüşüm denir. Özel olarak, σ fonksiyonu sabit ise, bu dönüşüme homotetik dönüşüm adı verilir.

Lokal koordinatlarda, (3.30) ifadesi

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x) \tag{3.31}$$

şeklinde yazılır ve buradan

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij} \tag{3.32}$$

olarak elde edilir.

Bu konformal dönüşüm altında, Christoffel sembolleri, Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörünün bileşenleri ve skaler eğrilik, sırasıyla,

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_i \sigma_j + \delta^h_j \sigma_i - \sigma^h g_{ij}, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k \sigma_{ij} - \delta^h_j \sigma_{ik} + g^{h\alpha}(\sigma_{\alpha k} g_{ij} - \sigma_{\alpha j} g_{ik}) \\ + \Delta_1 \sigma (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}), \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\bar{S}_{ij} = S_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij}, \tag{3.35}$$

$$\bar{r} = e^{-2\sigma}(r + 2(n-1)\Delta_2 \sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma), \tag{3.36}$$

şeklinde dönüşür, [19]. Burada, $S_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha}$, $r = S_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$, $\sigma_i = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = \nabla_i \sigma, \sigma^h = \sigma_\alpha g^{\alpha h}$ ve

$$\sigma_{ij} = \nabla_j \nabla_i \sigma - \nabla_i \sigma \nabla_j \sigma, \tag{3.37}$$

dir. $\Delta_1 \sigma$ ve $\Delta_2 \sigma$, birinci ve ikinci Beltrami sembolleridir ve bu semboller

$$\Delta_1 \sigma = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \sigma \nabla_\beta \sigma, \quad \Delta_2 \sigma = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha \sigma \tag{3.38}$$

ifadeleri ile tanımlanmaktadır.

$\bar{S}_{ij}$ ifadesinin kovaryant türevi alınırsa ve (3.35) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k \bar{S}_{ij} = \nabla_k S_{ij} + (n-2)\nabla_k \sigma_{ij} + \partial_k(\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij} - 2\sigma_k S_{ij} \\ - \sigma_i S_{jk} - \sigma_j S_{ik} - 2(\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij} \sigma_k + \sigma^h (S_{ih} g_{jk} + S_{hj} g_{ik}) \\ + (n-2)(\sigma^h \sigma_{hj} g_{ik} + \sigma^h \sigma_{ih} g_{jk} - 2\sigma_k \sigma_{ij} - \sigma_i \sigma_{kj} - \sigma_j \sigma_{ik}) \end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilir. Burada, $\bar{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla, $\bar{M}$ ve M'ye göre Levi-Civita konneksiyonlarını ve ∂_k, x^k'ya göre kısmi türevi göstermektedir.

Tanım 3.1.4 (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve T, M manifoldu üzerinde (0, 2) tipinden simetrik bir tensör alanı olsun. $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için T tensör alanı

$$(\nabla_X T)(Y,Z) = (\nabla_Y T)(X,Z) \tag{3.40}$$

bağıntısını sağlıyorsa, bu tensör alanına Codazzi tensörü adı verilir.

Şimdi, S ve $\bar{S}$ Ricci tensörlerinin, sırasıyla, ∇ ve $\bar{\nabla}$ konneksiyonlarına göre Codazzi tensörleri olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (3.40) denklemine göre,

$$\nabla_k S_{ij} = \nabla_j S_{ik} \tag{3.41}$$

ve

$$\bar{\nabla}_k \bar{S}_{ij} = \bar{\nabla}_j \bar{S}_{ik} \tag{3.42}$$

bağıntıları gerçeklenir.

Öte yandan, Ricci tensörünün Codazzi tensörü olması durumunda, II. Bianchi özdeşliğine göre manifoldun skaler eğriliği sabittir. Bu durumda, r ve $\bar{r}$ sabittir. Bu koşullar altında, aşağıdaki teoremler elde edilmiştir.

Teorem 3.1.4 (M,g) ve $(\bar{M},\bar{g})$ yarı-Einstein manifoldlarının $\bar{g} = e^{2\sigma} g$ şeklindeki konformal dönüşümü göz önüne alınsın. Bu manifoldların Ricci tensörlerinin Codazzi tensörü olduğu kabul edilsin. Eğer bu konformal dönüşüm, $\sigma(Ric)$ vektör alanı içeriyorsa, bu dönüşüm homotetiktir veya

$$\mu = \frac{(2-n)(n-1)c - r}{2(n-1)r}$$

bağıntısı gerçeklenir. Burada, $r \neq 0$, $\|\sigma_i\|^2 = c$, $\sigma_i = \frac{\partial\sigma}{\partial x^i} = \partial_i \sigma$ ve μ, $\sigma(Ric)$ vektör alanının ilişkili sabitidir.

İspat: (M,g) ve $(\bar{M},\bar{g})$ iki yarı-Einstein manifoldu olmak üzere, bu manifoldlar arasında $\bar{g} = e^{2\sigma} g$ şeklinde bir konformal dönüşüm göz önüne alınsın. Ayrıca, bu manifoldların Ricci tensörlerinin Codazzi tensörü olduğu kabul edildiği takdirde, II. Bianchi özdeşliğine göre, r ve $\bar{r}$ skaler eğrilik fonksiyonları sabittir. Teorem 3.1.3 ve Sonuç 3.1.1'e göre, $r \neq 0$'dır. r sabit olduğundan, Teorem 3.1.1'e göre, σ_i'nin boyu sabittir. Bu durumda, c sabiti için

$$\sigma_i \sigma^i = c \tag{3.43}$$

koşulu gerçeklenir. Eğer, (3.31) konformal dönüşümünde σ tarafından üretilen vektör alanının, $\sigma(Ric)$ vektör alanı olduğu kabul edilirse, bu takdirde, μ bir sabit olmak üzere,

$$\nabla_j \sigma_i = \mu S_{ij} \tag{3.44}$$

bağıntısı mevcuttur. Böylece, (3.38), (3.43) ve (3.44) yardımıyla aşağıdaki denklemler elde edilir

$$\Delta_2 \sigma = \mu r, \qquad \Delta_1 \sigma = c. \tag{3.45}$$

Böylece, $\Delta_1 \sigma$ ve $\Delta_2 \sigma$ sabittir. Ayrıca, (3.45) bağıntısı (3.36) denkleminde kullanılırsa,

$$\bar{r} = e^{-2\sigma} B \tag{3.46}$$

elde edilir. Burada, r, $\bar{r}$ ve $B = [r + 2(n-1)\mu r + (n-1)(n-2)c]$ sabitlerdir. Eğer $\bar{r}$ sıfırdan farklı ise, (3.46) denklemine göre, B sıfırdan farklıdır. O halde, $e^{-2\sigma}$ sabittir. Dolayısıyla, σ sabittir. Bu durumda, (3.31) konformal dönüşümü homotetiktir. Eğer $\bar{M}$ manifoldunun skaler eğriliği sıfır ise, B sıfır olmak zorundadır. Bu takdirde,

$$\mu = \frac{(2-n)(n-1)c - r}{2(n-1)r} \tag{3.47}$$

olarak elde edilir. Böylece, (3.47) denklemine göre, $r \neq (2-n)(n-1)c$ ise, $\mu \neq 0$'dır. O halde, (3.31) konformal dönüşümü $\sigma(Ric)$ vektör alanı içerir. $r = (2-n)(n-1)c$ olması durumunda ise, σ_i vektör alanı paralel vektör alanıdır. Böylece, ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.5 (M, g) ve $(\bar{M}, \bar{g})$ ile gösterilen iki yarı-Einstein manifoldları arasında $\bar{g} = e^{2\sigma} g$ şeklinde bir konformal dönüşüm mevcut olsun. Bu manifoldların Ricci tensörlerinin Codazzi tensörü olduğu kabul edilsin. Eğer σ_i konsörkılır vektör alanı ise, bu durumda, ϕ_i ve σ_i vektörleri birbirine diktir veya konsörkılır vektör alanının ilişkili fonksiyonu olarak tanımlanan ρ skaler fonksiyonu

$$\rho = \frac{b - (n-2)\Delta_1 \sigma}{n+2}$$

şeklindedir.

İspat: Ricci tensörleri Codazzi tensörü olan (M, g) ve $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Einstein manifoldlarının arasında $\bar{g} = e^{2\sigma} g$ konformal dönüşümü göz önüne alınsın ve σ

tarafından üretilen σ_i vektör alanı konsörkılır vektör alanı olsun. Bu durumda, (2.19) denkleminden,

$$\nabla_j \sigma_i = \rho g_{ij} \tag{3.48}$$

olarak bulunur. Böylece, (3.39) denkleminde, j ve k indisleri yer değiştirilirse ve elde edilen denklemler taraf tarafa çıkarılarak, (3.37), (3.41), (3.42) ve (3.48) bağıntıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &2(n-1)(\rho_k g_{ij} - \rho_j g_{ik}) + [(n-2)\Delta_1\sigma + (n+2)\rho](\sigma_j g_{ik} - \sigma_k g_{ij}) + \sigma_j S_{ik} - \sigma_k S_{ij} \\ &+ \sigma^h S_{hj} g_{ik} - \sigma^h S_{hk} g_{ij} = 0 \end{aligned} \tag{3.49}$$

bulunur. Burada, $\rho_k = \partial_k \rho$ ve $\Delta_1\sigma = \sigma^h \sigma_h$ ile gösterilmektedir.

Böylece, (3.49) denklemi g^{ij} ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} &2(n-1)^2 \rho_k + [(n-2)(1-n)\Delta_1\sigma + (n+2)(1-n)\rho - r]\sigma_k \\ &+ (2-n)\sigma^h S_{hk} = 0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

bağıntısı bulunur.

Öte yandan, Ricci özdeşliği ve (3.48) denklemi kullanılırsa, R^{α}_{ijk} eğrilik tensörünün bileşenlerini göstermek üzere,

$$\sigma_\alpha R^{\alpha}_{ijk} = \rho_k g_{ij} - \rho_j g_{ik} \tag{3.51}$$

denklemi elde edilir.

Bu durumda, (3.51) ifadesi g^{ij} ile çarpılırsa,

$$\sigma_\alpha S^{\alpha}_{k} = (n-1)\rho_k \tag{3.52}$$

bulunur. Bu takdirde, (3.52) denklemindeki ρ_k ifadesi (3.50) denkleminde yerine yazılırsa,

$$n\sigma^h S_{hk} + [(n-2)(1-n)\Delta_1\sigma + (n+2)(1-n)\rho - r]\sigma_k = 0 \tag{3.53}$$

elde edilir.

Böylece, (3.2), (3.4) ve (3.53) ifadeleri kullanılırsa,

$$nb\sigma^h \phi_h \phi_k + [(n-2)(1-n)\Delta_1\sigma + (n+2)(1-n)\rho - b]\sigma_k = 0 \tag{3.54}$$

sonucuna ulaşılır.

Daha sonra, (3.54) denklemi ϕ^k çarpılırsa,

$$[(n-1)b+(n-2)(1-n)\Delta_1\sigma+(n+2)(1-n)\rho]\sigma^k\phi_k=0 \tag{3.55}$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak, (3.55) denkleminden,

$$\sigma^k\phi_k=0$$

veya

$$(n-1)b+(n-2)(1-n)\Delta_1\sigma+(n+2)(1-n)\rho=0$$

koşullarının sağlanması gerektiği bulunur. Dolayısıyla, σ_k ve ϕ_k vektörleri birbirine dik olmalıdır veya ρ fonksiyonu

$$\rho=\frac{b-(n-2)\Delta_1\sigma}{n+2} \tag{3.56}$$

bağıntısını sağlamalıdır. Bu durumda, ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 3.1.5 (M,g), $n-$boyutlu $(n>2)$ bir Riemann manifoldu ve A, M manifolduna ait skaler bir fonksiyon olsun. Eğer A'nın Laplasien'i sıfıra eşitse, yani

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j A=0 \tag{3.57}$$

koşulu sağlanıyorsa, A fonksiyonuna harmonik fonksiyon adı verilir.

Genel olarak, (3.31) şeklinde ele alınan konformal dönüşüm, harmonik bir fonksiyonu harmonik bir fonksiyona dönüştürmek zorunda değildir. Bu durumda,

$$\bar{A}=e^{2p\sigma}A \tag{3.58}$$

dönüşümü göz önüne alınırsa ve A fonksiyonunun g metriğine göre harmonik fonksiyon olduğu kabul edilirse, $p=\frac{2-n}{4}$ olmak kaydıyla, $\bar{A}$ fonksiyonunun da $\bar{g}$ metriğine göre harmonik fonksiyon olması için

$$\nabla_i\sigma^i+\frac{1}{2}(n-2)\sigma_i\sigma^i=0 \tag{3.59}$$

bağıntısının gerçeklenmesi gerektiği bulunmuştur, [21]. Burada, $\sigma_i=\nabla_i\sigma$ ve $\sigma^i=g^{ih}\sigma_h$ ile gösterilmektedir. Böylece, bir konformal dönüşüm (3.59) koşulunu sağlıyorsa, bu dönüşüme *konharmonik dönüşüm* adı verilir, [21].

Teorem 3.1.6 (M,g) ve $(\bar{M},\bar{g})$ ile gösterilen iki yarı-Einstein manifoldu arasında $\bar{g}=e^{2\sigma}g$ şeklinde bir konformal dönüşüm mevcut olsun. Bu dönüşümün aynı zamanda konharmonik dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul, $\bar{a}$ ilişkili skalerinin $\bar{a}=e^{-2\sigma}a$ şeklinde dönüşmesi durumunda, $\bar{b}$ ilişkili skalerinin $\bar{b}=e^{-2\sigma}b$ şeklinde dönüşmesidir.

İspat: (M,g) ve $(\bar{M},\bar{g})$ ile verilen yarı-Einstein manifoldlarının $\bar{g}=e^{2\sigma}g$ konformal dönüşümü göz önüne alınsın. Bu durumda, (3.2) ve (3.35) denklemleri kullanılırsa,

$$\bar{a}\bar{g}_{ij}+\bar{b}\bar{\phi}_i\bar{\phi}_j=ag_{ij}+b\phi_i\phi_j+(n-2)\sigma_{ij}+(\Delta_2\sigma+(n-2)\Delta_1\sigma)g_{ij} \tag{3.60}$$

ifadesi elde edilir.

Daha sonra, (3.60) denklemi $\bar{g}^{ij}$ ile çarpılırsa ve (3.31), (3.37), (3.38) denklemleri kullanılırsa,

$$n\bar{a}+\bar{b}=e^{-2\sigma}[na+b+2(n-1)\Delta_2\sigma+(n-1)(n-2)\Delta_1\sigma] \tag{3.61}$$

bağıntısı bulunur. Eğer konformal dönüşüm aynı zamanda konharmonik dönüşüm ise, (3.38) ve (3.59) denklemleri yardımıyla,

$$2\Delta_2\sigma+(n-2)\Delta_1\sigma=0 \tag{3.62}$$

elde edilir.

Böylece, (3.61) ve (3.62) denklemleri kullanıldığı takdirde,

$$n\bar{a}+\bar{b}=nae^{-2\sigma}+be^{-2\sigma} \tag{3.63}$$

ifadesi bulunur.

Bu durumda, (3.63) denkleminden, $\bar{a}$ ilişkili skalerinin $\bar{a}=e^{-2\sigma}a$ şeklinde dönüşmesi durumunda, $\bar{b}$ ilişkili skalerinin $\bar{b}=e^{-2\sigma}b$ şeklinde dönüşmesi gerektiği görülür.

Tersine, $\bar{a}$ ilişkili skalerinin $\bar{a}=e^{-2\sigma}a$ şeklinde dönüşmesi durumunda, $\bar{b}$ ilişkili skaleri $\bar{b}=e^{-2\sigma}b$ şeklinde dönüşüyorsa, (3.61) denklemi kullanılarak,

$$2(n-1)\Delta_2\sigma+(n-1)(n-2)\Delta_1\sigma=0 \tag{3.64}$$

sonucuna ulaşılır ve böylece, (3.59) koşulunun gerçeklendiği görülür. Bu durumda, göz önüne alınan konformal dönüşüm aynı zamanda konharmonik dönüşümdür. Bu takdirde, ispat tamamlanmış olur. □

3.2 Neredeyse Yarı-Einstein Manifoldları

Yarı-Einstein manifoldlarının genelleştirilmesi çeşitli şekillerde yapılmıştır. Neredeyse yarı-Einstein manifoldları bu özel manifoldlardan birisidir ve bu manifold aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 3.2.1 ([10]) (M,g), $n-$boyutlu $(n>2)$ bir Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun Ricci tensörü sıfırdan farklı olmak üzere, $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + bE(X,Y) \tag{3.65}$$

koşulu sağlanıyorsa, M manifolduna neredeyse yarı-Einstein manifoldu adı verilir. Burada, a ve b sıfırdan farklı skaler fonksiyonlar olup, bu fonksiyonlara M manifoldunun ilişkili skalerleri denir. E sıfırdan farklı, (0,2) tipinden simetrik bir tensör olmak üzere, bu tensöre M manifoldunun ilişkili tensörü denir. $n-$boyutlu, neredeyse yarı-Einstein manifoldu $N(QE)_n$ sembolü ile gösterilmektedir.

Özel bir durum olarak, [39] numaralı makalede, neredeyse yarı-Einstein manifoldunun E ilişkili tensörü

$$E(X,Y) = \phi(X)\psi(Y) + \psi(X)\phi(Y) \tag{3.66}$$

biçiminde göz önüne alınarak, bazı sonuçlar elde edilmiştir. U ve V birbirine dik birim vektör alanları olmak üzere, yani

$$g(U,V) = 0,\ \ g(U,U) = g(V,V) = 1 \tag{3.67}$$

şartları gerçekleniyorsa, ϕ ve ψ tarafından üretilen U ve V vektör alanları

$$g(X,U) = \phi(X),\ g(X,V) = \psi(X) \tag{3.68}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.1 Neredeyse yarı-Einstein manifoldlarının bazı özellikleri ve bu manifoldlar üzerindeki özel vektör alanları

Bu kısımda, neredeyse yarı-Einstein manifoldları üzerinde özel vektör alanları incelenecek ve elde edilen sonuçlar ifade edilecektir. Ayrıca, E ilişkili tensörü (3.66) şeklinde alınacak ve bu manifoldun çeşitli özellikleri araştırılacaktır.

(M,g), $n-$boyutlu $(n>2)$, neredeyse yarı-Einstein manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$, bu manifoldun teğet uzayının ortonormal bir bazı olmak üzere, (3.65) ifadesi kullanılırsa, M manifoldunun r skaler eğrilik fonksiyonu

$$r = na + b\tilde{E} \tag{3.69}$$

şeklinde elde edilir. Burada, a ve b manifoldun ilişkili skalerlerini ve $\tilde{E} = E(e_i,e_i)$, E ilişkili tensörünün izini göstermektedir.

Tanım 3.2.2 (M,g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve T, ikinci mertebeden simetrik bir tensör olsun. $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(Y,Z) + (\nabla_Y T)(Z,X) + (\nabla_Z T)(X,Y) &= \alpha(X)g(Y,Z) \\ &+ \alpha(Y)g(Z,X) + \alpha(Z)g(X,Y)\end{aligned} \tag{3.70}$$

koşulu sağlanıyorsa, T simetrik tensörüne kuadratik konformal Killing tensörü adı verilir. Burada, α, 1-formdur.

Teorem 3.2.1 (M,g), $n-$boyutlu bir $N(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu manifoldun Ricci tensörünün kuadratik konformal Killing tensörü olması için gerek ve yeter koşul, E ilişkili tensörünün bir kuadratik konformal Killing tensörü ve b ilişkili skalerinin sabit olmasıdır.

İspat: $N(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü kuadratik konformal Killing tensörü olsun. Bu durumda (3.70) ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_Y S)(Z,X) + (\nabla_Z S)(X,Y) &= \alpha(X)g(Y,Z) \\ &+ \alpha(Y)g(Z,X) + \alpha(Z)g(X,Y)\end{aligned} \tag{3.71}$$

bulunur. Öte yandan, (3.65) bağıntısının kovaryant türevi alınırsa,

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = (\partial_X a)g(Y,Z) + (\partial_X b)E(Y,Z) + b(\nabla_X E)(Y,Z) \tag{3.72}$$

bağıntısı elde edilir.

(3.72) denkleminde X, Y ve Z vektör alanları dairesel olarak değiştirilirse ve bulunan üç denklem toplanırsa, (3.71) koşulu ve E tensörünün kuadratik konformal Killing tensörü olma koşulu, yani

$$\begin{aligned}(\nabla_X E)(Y,Z) + (\nabla_Y E)(Z,X) + (\nabla_Z E)(X,Y) &= \gamma(X)g(Y,Z) \\ &+ \gamma(Y)g(Z,X) + \gamma(Z)g(X,Y)\end{aligned} \tag{3.73}$$

şeklinde olması da göz önüne alınırsa,

$$(\partial_X b)E(Y,Z)+(\partial_Y b)E(Z,X)+(\partial_Z b)E(X,Y)=0 \tag{3.74}$$

bağıntısı elde edilir. Burada,

$$\gamma(X)=\frac{1}{b}(\alpha(X)-\partial_X a)$$

şeklindedir.

Walker'ın Yardımcı Teoremi'ne göre,

$$a(Y,Z)b(X)+a(Z,X)b(Y)+a(X,Y)b(Z)=0 \tag{3.75}$$

koşulu sağlanıyorsa ve a simetrik ise, tüm $a(X,Y)$'ler veya tüm $b(X)$'ler sıfır olmalıdır, [40]. Bu Yardımcı Teorem'e göre, $E(X,Y)\neq 0$ olduğundan, (3.74) ve (3.75) denklemleri yardımıyla, b ilişkili skalerinin sabit olması gerektiği görülmektedir.

Tersine, E ilişkili tensörü bir kuadratik konformal Killing tensör ve b ilişkili skaleri sabit ise, (3.70) ve (3.72) ifadeleri kullanıldığında, Ricci tensörü kuadratik konformal Killing tensör olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 3.2.3 ([41]) (M,g), $n-$boyutlu $(n>2)$ düz olmayan bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X,Y,Z\in\chi(M)$ için, manifoldun Ricci tensörü S

$$(\nabla_X S)(Y,Z)=\alpha(X)S(Y,Z)+\beta(X)g(Y,Z) \tag{3.76}$$

bağıntısını gerçekliyorsa, M manifolduna, genelleştirilmiş Ricci-reküran manifoldu adı verilir. Burada, α ve β sıfırdan farklı 1-formlardır. $n-$boyutlu bir genelleştirilmiş Ricci-reküran manifoldu, GR_n sembolü ile gösterilmektedir. $\beta=0$ ise, bu manifold Ricci-reküran manifolda indirgenir.

Teorem 3.2.2 $N(QE)_n$ manifoldunun genelleştirilmiş Ricci-reküran manifold olması için gerek ve yeter koşul, bu manifoldun genelleştirilmiş E-reküran manifold olmasıdır.

İspat: $N(QE)_n$ manifoldu genelleştirilmiş Ricci-reküran olsun. Bu durumda, (3.65) koşulunun kovaryant türevi alındığında ve (3.76) ifadesi kullanıldığında,

$$\begin{aligned}(\nabla_X E)(Y,Z)=&\frac{1}{b}(\alpha(X)a+\beta(X)-\partial_X a)g(Y,Z)\\&+\frac{1}{b}(\alpha(X)b-\partial_X b)E(Y,Z)\end{aligned} \tag{3.77}$$

denklemi elde edilir. Bu durumda, Tanım 3.2.3'e göre, $N(QE)_n$ manifoldu genelleştirilmiş E-rekürandır.

Diğer taraftan, $N(QE)_n$ manifoldu genelleştirilmiş E-reküran ise, (3.65) ve (3.72) yardımıyla,

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \gamma(X)S(Y,Z) + \delta(X)g(Y,Z) \tag{3.78}$$

denklemi bulunur. Burada,

$$\gamma(X) = \frac{1}{b}[\partial_X b + \alpha(X)b]$$

ve

$$\delta(X) = [\partial_X a + \beta(X)b - \frac{a(\partial_X b)}{b} - \alpha(X)a]$$

şeklindedir. Böylece, (3.76) koşulu sağlanır ve ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi, $N(QE)_n$ manifoldunun E ilişkili tensörünün (3.66) formu ele alınarak, neredeyse yarı-Einstein manifoldunun özel bir durumu için çeşitli sonuçlar sunulacaktır. Başka bir deyişle, manifoldun Ricci tensörü

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b[\phi(X)\psi(Y) + \psi(X)\phi(Y)] \tag{3.79}$$

biçiminde ele alınacaktır.

Teorem 3.2.3 M, (3.79) koşulunu sağlayan $n-$boyutlu bir neredeyse yarı-Einstein manifoldu, U ve V, bu manifoldun ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen üreteç vektör alanları olsun. Bu durumda, U ve V vektör alanlarının konsörkılır vektör alanları olması mümkün değildir.

İspat: M manifoldu (3.79) koşulunu sağlasın. Bu manifoldun üreteç vektör alanları U ve V, sırasıyla, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanları olsun. Bu takdirde, lokal koordinatlarda

$$\nabla_i \phi_j = \rho g_{ij} \tag{3.80}$$

ve

$$\nabla_i \psi_j = \sigma g_{ij} \tag{3.81}$$

bağıntıları gerçeklenir. Burada, ρ ve σ skaler fonksiyonlardır.

Öte yandan, $g(U,U) = 1$ bağıntısının kovaryant türevi alınırsa,

$$(\nabla_j \phi_i)\phi^i = 0 \tag{3.82}$$

denklemi bulunur. Burada, $\phi^i = g^{ih}\phi_h$ $(h = 1, 2, ..., n)$ şeklindedir.

(3.80) denklemi ϕ^j ile çarpılırsa ve (3.82) ifadesi kullanılırsa,

$$\rho\phi_i = 0$$

bağıntısı elde edilir. Bu durum, ρ skaler fonksiyonunun sıfırdan farklı ve ϕ'nin sıfırdan farklı bir 1-form olmasıyla çelişir. Bu nedenle, U üreteç vektör alanının konsörkılır vektör alanı olması mümkün değildir. Benzer şekilde, V üretecinin de konsörkılır vektör alanı olamayacağı gösterilebilir. O halde, M manifoldunun üreteç vektör alanlarının konsörkılır vektör alanı olamayacağı ispatlanmış olur. □

Eğer, $N(QE)_n$ manifoldunun üreteç vektör alanlarından birinin tors oluşturan vektör alanı olduğu kabul edilirse, örneğin, U üreteç vektör alanı tors oluşturan vektör alanı ise, ρ skaler fonksiyon olmak üzere, (2.17), (3.67) ve (3.68) denklemleri kullanıldığı takdirde,

$$\nabla_j\phi_i = \rho(g_{ij} - \phi_i\phi_j) \tag{3.83}$$

elde edilir.

Bununla birlikte, $g(U,V) = 0$ bağıntısının kovaryant türevi alınırsa ve (3.83) denklemi kullanılırsa,

$$\phi^i(\nabla_k\psi_i) = -\rho\psi_k \tag{3.84}$$

sonucuna ulaşılır. Bu bağıntılar göz önüne alınarak, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2.4 M, (3.79) koşulunu sağlayan ve Ricci tensörü kuadratik konformal Killing tensörü olan, $n-$boyutlu bir neredeyse yarı-Einstein manifoldu, U ve V, bu manifoldun, sırasıyla, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen üreteç vektör alanları olsun. Üreteç vektör alanlarından biri tors oluşturan vektör alanı ise, diğer üreteç vektör alanının diverjansı sıfır olmak zorundadır.

İspat: $N(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörünün kuadratik konformal Killing tensörü olduğu kabul edilsin. Bu durumda, lokal koordinatlarda (3.70) bağıntısı kullanılırsa, α, 1-form olmak üzere,

$$\nabla_k S_{ij} + \nabla_i S_{jk} + \nabla_j S_{ki} = \alpha_k g_{ij} + \alpha_i g_{jk} + \alpha_j g_{ki} \tag{3.85}$$

elde edilir.

Daha sonra, (3.79) koşulunun kovaryant türevi alınırsa,

$$\nabla_k S_{ij} = a_k g_{ij} + b_k(\phi_i \psi_j + \phi_j \psi_i) + b((\nabla_k \phi_i)\psi_j + \phi_i(\nabla_k \psi_j) + (\nabla_k \phi_j)\psi_i + \phi_j(\nabla_k \psi_i)) \tag{3.86}$$

denklemi bulunur. Burada, a ve b manifoldun ilişkili skalerlerini göstermektedir ve $a_k = \partial_k a$, $b_k = \partial_k b$ dir.

Manifoldun ϕ, 1-formuna ait U üreteç vektör alanı tors oluşturan vektör alanı olarak kabul edilirse, (3.83) koşulu sağlanır. Bu takdirde, (3.86) ifadesinde indisler dairesel olarak değiştirilirse ve (3.83), (3.85) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&(a_k + 2b\rho\psi_k - \alpha_k)g_{ij} + (a_i + 2b\rho\psi_i - \alpha_i)g_{jk} + (a_j + 2b\rho\psi_j - \alpha_j)g_{ik}\\ &+ b_k(\phi_i\psi_j + \phi_j\psi_i) + b_i(\phi_j\psi_k + \phi_k\psi_j) + b_j(\phi_k\psi_i + \phi_i\psi_k)\\ &+ b(\phi_i(\nabla_k\psi_j) + \phi_j(\nabla_k\psi_i) + \phi_j(\nabla_i\psi_k) + \phi_k(\nabla_j\psi_i) + \phi_k(\nabla_i\psi_j) + \phi_i(\nabla_j\psi_k))\\ &- 2b\rho(\phi_i\phi_k\psi_j + \phi_j\phi_k\psi_i + \phi_i\phi_j\psi_k) = 0\end{aligned} \tag{3.87}$$

elde edilir. Böylece, (3.87) denklemi g^{ij} ile çarpılırsa ve (3.84) koşulu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}&(n+2)(a_k + 2b\rho\psi_k - \alpha_k) + 2b_i(\phi^i\psi_k + \phi_k\psi^i)\\ &-4b\rho\psi_k + 2b(\phi^i(\nabla_i\psi_k) + \phi_k(\nabla_i\psi^i)) = 0\end{aligned} \tag{3.88}$$

bağıntısının sağlanması gerektiği görülür. Öte yandan, (3.88) ifadesi, sırasıyla, ϕ^k ve ψ^k ile çarpılırsa ve (3.67) koşulu kullanılırsa,

$$(n+2)(a_k - \alpha_k)\phi^k + 2b_k\psi^k + 2b\nabla_k\psi^k = 0 \tag{3.89}$$

$$(n+2)(a_k - \alpha_k)\psi^k + 2nb\rho + 2b_k\phi^k = 0 \tag{3.90}$$

denklemleri bulunur. Ayrıca, (3.87) denklemi, sırasıyla, $\phi^i\phi^j\phi^k$ ve $\psi^i\psi^j\phi^k$ ile çarpılırsa,

$$(a_k - \alpha_k)\phi^k = 0 \tag{3.91}$$

ve

$$(a_k - \alpha_k)\phi^k + 2b_k\psi^k = 0 \tag{3.92}$$

bağıntıları elde edilir. Manifoldun b ilişkili skaleri sıfırdan farklı olduğundan, (3.89), (3.91) ve (3.92) denklemleri kullanıldığı takdirde,

$$\nabla_k\psi^k = 0$$

elde edilir. Böylece, ψ, 1-formuna ait V üreteç vektör alanının diverjansının sıfır olması gerektiği sonucuna ulaşılır ve bu durumda, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.2.5 *M, (3.79) koşulunu sağlayan $n-$boyutlu bir $N(QE)_n$ manifoldu olsun. M genelleştirilmiş Ricci-reküran bir manifold ise, ϕ ve ψ, 1-formları tarafından üretilen U ve V üreteç vektör alanlarının tors oluşturan vektör alanları olması mümkün değildir.*

İspat: M manifoldu (3.79) koşulunu sağlayan, $n-$boyutlu bir neredeyse yarı-Einstein manifoldu olsun. Bu durumda, lokal koordinatlarda, (3.86) bağıntısı mevcuttur. Manifoldun ϕ, 1-formu tarafından üretilen U üreteç vektör alanı tors oluşturan vektör alanı ise, (3.83) koşulu sağlanır. M manifoldu genelleştirilmiş Ricci-reküran bir manifold ise, (3.76), (3.83) ve (3.86) bağıntıları yardımıyla,

$$\begin{aligned}(a_k-\delta_k-a\gamma_k)g_{ij}+(b_k-b\gamma_k)(\phi_i\psi_j+\phi_j\psi_i)+b[\rho(g_{ik}-\phi_i\phi_k)\psi_j\\ +\phi_i(\nabla_k\psi_j)+\rho(g_{jk}-\phi_j\phi_k)\psi_i+\phi_j(\nabla_k\psi_i)]=0\end{aligned} \tag{3.93}$$

denklemi elde edilir. Burada, γ ve δ, Ricci-reküran manifoldun ilişkili 1-formlarıdır.

(3.93) denklemi g^{ij} ile çarpılırsa ve (3.84) koşulu kullanılırsa,

$$a_k=\delta_k+a\gamma_k \tag{3.94}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan, (3.93) denklemi $\phi^i\phi^j$ ile çarpılırsa ve (3.67) kullanılırsa,

$$a_k-\delta_k-a\gamma_k+2b\phi^i(\nabla_k\psi_i)=0 \tag{3.95}$$

elde edilir.

(3.84), (3.94) ve (3.95) denklemleri yardımıyla,

$$b\rho\psi_k=0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise, b ve ρ'nun sıfırdan farklı skaler fonksiyonlar ve ψ'nin sıfırdan farklı 1-form olması ile çelişir. Dolayısıyla, U üreteç vektör alanının tors oluşturan vektör alanı olması mümkün değildir. Benzer şekilde, V üretecinin de tors oluşturan vektör alanı olamayacağı gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

3.2.2 $N(QE)_n$ manifoldlarının konformal dönüşümleri

Bu bölümde, neredeyse yarı-Einstein manifoldlarının konformal dönüşümleri incelenecektir.

M ve $\bar{M}$ $(n > 2)$, sırasıyla, g ve $\bar{g}$ metriklerine sahip, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldları olsun. Bu durumda, (3.31), (3.35) ve (3.65) denklemleri kullanılırsa,

$$\bar{b}\bar{E}_{ij} = bE_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2\sigma + (n-2)\Delta_1\sigma + a - \bar{a}e^{2\sigma})g_{ij} \tag{3.96}$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.2.6 M, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldunun $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ konformal dönüşümü yardımıyla $\bar{M}$ ile gösterilecek olan, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifolduna dönüştüğü kabul edilsin. M manifoldunun, E ilişkili tensörünün ve b ilişkili skalerinin bu dönüşüm altında değişmez kalması halinde, M manifoldu eş mesafeli bir manifolda dönüşür.

İspat: M, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldunun E ilişkili tensörünü ve b ilişkili skalerini koruyan $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ şeklinde bir konformal dönüşüm içerdiği kabul edilsin. Bu durumda, (3.96) denklemi göz önüne alınırsa, $\beta = \Delta_2\sigma + (n-2)\Delta_1\sigma$ olmak üzere,

$$(n-2)\sigma_{ij} + (\beta + a - \bar{a}e^{2\sigma})g_{ij} = 0 \tag{3.97}$$

bağıntısı elde edilir. Buna göre,

$$\sigma_{ij} = \alpha g_{ij} \tag{3.98}$$

ifadesi bulunur. Burada, $\alpha = \frac{1}{n-2}(\bar{a}e^{2\sigma} - a - \beta)$ şeklindedir. $\xi = -\exp(-\sigma)$ olarak alınırsa ve (3.37) kullanılırsa, (3.98) koşulunun (2.19) ifadesiyle eşdeğer olduğu görülür. Dolayısıyla, M eş mesafeli bir manifolddur. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.2.7 M manifoldu eş mesafeli, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldu olsun. Manifoldun a ve b ilişkili skalerleri, $\gamma = (\frac{n-1}{n})[2\ \Delta_2\sigma + (n-2)\Delta_1\sigma]$ olmak koşuluyla, $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ konformal dönüşümü altında, $\bar{b} = b$, $\bar{a} = e^{-2\sigma}(a+\gamma)$ şeklinde dönüşüyorsa, bu manifoldun E ilişkili tensörü konformal invaryanttır.

İspat: M, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldunun eş mesafeli bir manifold olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, (2.19) bağıntısından, $\xi_i \equiv \nabla_i \xi$ olmak üzere,

$$\nabla_j \xi_i = \rho g_{ij} \tag{3.99}$$

elde edilir.

$\sigma = -\ln(-\xi(x))$ olarak alınırsa ve (3.35) denklemi kullanılırsa,

$$\bar{S}_{ij} = S_{ij} + \gamma g_{ij} \tag{3.100}$$

bulunur. Burada, $\gamma = (\frac{n-1}{n})[2\ \Delta_2\sigma + (n-2)\Delta_1\sigma]$ dir. (3.31), (3.65) ve (3.100) denklemleri yardımıyla,

$$\bar{a}e^{2\sigma}g_{ij} + \bar{b}\bar{E}_{ij} = (a+\gamma)g_{ij} + bE_{ij} \tag{3.101}$$

elde edilir.

Bu takdirde, $\bar{a} = e^{-2\sigma}(a+\gamma)$ ve $\bar{b} = b$ olarak alınırsa, (3.101) denkleminden $\bar{E}_{ij} = E_{ij}$ sonucuna ulaşılır ve böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.2.8 M, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldunun E ilişkili tensörününün ve b ilişkili skalerinin invaryant kaldığı $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ şeklinde bir konformal dönüşümü göz önüne alınsın. Bu konformal dönüşümün aynı zamanda konharmonik dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul, $\bar{a}$ ilişkili skalerinin $\bar{a} = e^{-2\sigma}a$ şeklinde dönüşmesidir.

İspat: M, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldunun E ilişkili tensörünü ve b ilişkili skalerini koruyan $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ şeklinde bir konformal dönüşüm içerdiği kabul edilsin. (3.37), (3.38) ve (3.96) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&(n-2)\nabla_j\nabla_i\sigma - (n-2)\sigma_i\sigma_j \\ &+ [\nabla_h\sigma^h + (n-2)\sigma^h\sigma_h + a - \bar{a}e^{2\sigma}]g_{ij} = 0\end{aligned} \tag{3.102}$$

bağıntısı elde edilir. (3.102) bağıntısı g^{ij} ile çarpılırsa,

$$\nabla_h\sigma^h + \frac{1}{2}(n-2)\sigma^h\sigma_h + \frac{n}{2(n-1)}(a - \bar{a}e^{2\sigma}) = 0 \tag{3.103}$$

sonucuna ulaşılır.

Eğer konformal dönüşüm aynı zamanda konharmonik ise, (3.59) ve (3.103) yardımıyla,

$$\bar{a} = e^{-2\sigma} a$$

bulunur. Tersine, manifoldun ilişkili skaleri yukarıdaki şekilde dönüşüyorsa, (3.103) kullanıldığı takdirde, (3.59) denklemi elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır. □

Şimdi, M, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldunun $\sigma(Ric)$ vektör alanı içerdiği kabul edilsin. Bu takdirde, μ bir sabit olmak üzere, lokal koordinatlarda

$$\nabla_j \sigma_i = \mu S_{ij} \tag{3.104}$$

koşulu gerçeklenir.

Teorem 3.2.9 İlişkili skalerleri sabit olan M, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldunun (3.30) konformal dönüşümü aynı zamanda konharmonik olsun. Eğer M manifoldu $\sigma(Ric)$ vektör alanı içeriyorsa, σ'nın boyunun sabit olması için gerek ve yeter koşul, E ilişkili tensörünün izinin sabit olmasıdır.

İspat: İlişkili skalerleri sabit olan M, $n-$boyutlu neredeyse yarı-Einstein manifoldunun konharmonik dönüşümü göz önüne alınsın. Eğer bu manifold, $\sigma(Ric)$ vektör alanı içeriyorsa, (3.59) ve (3.104) bağıntıları kullanılırsa, M manifoldunun skaler eğriliği,

$$r = \frac{(2-n)}{2\mu} \sigma^i \sigma_i \tag{3.105}$$

olarak elde edilir. M manifoldunun ilişkili skalerleri sabit olduğundan, (3.69) ve (3.105) yardımıyla,

$$\tilde{E} = \frac{1}{b} [\frac{(2-n)}{2\mu} \sigma^i \sigma_i - na]$$

bulunur.

Eğer σ'nın boyu sabit ise, c sabiti için,

$$\sigma^i \sigma_i = c$$

olduğundan $\tilde{E}$'nin sabit olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Tersine, $\tilde{E}$ sabit ise, σ'nın boyu sabittir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

3.2.3 $N(QE)_n$ manifoldlarının örnekleri ve $N(QE)_n$ uzay-zamanı

Bu kısımda, neredeyse yarı-Einstein manifoldlarının varlığına ait örnekler verilecek ve $N(QE)_n$ uzay-zamanı incelenecektir.

Örnek 3.2.1 $\mathbb{R}^4$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan g metriği göz önüne alınsın

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1 \sin x^2)^2(dx^3)^2 + e^{x^1}(dx^4)^2. \tag{3.106}$$

Burada, $i, j = 1,2,3,4$ ve $0 < x^1 < 1$ olup x^1, x^2, x^3, x^4, $\mathbb{R}^4$'ün standart koordinatlarıdır. Buna göre, sıfırdan farklı olan Christoffel sembolleri, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün bileşenleri ve skaler eğrilik, sırasıyla,

$$\begin{gathered}
\Gamma^1_{22} = -x^1,\ \Gamma^1_{33} = -x^1(\sin x^2)^2,\ \Gamma^1_{44} = -\frac{e^{x^1}}{2},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{x^1}, \\
\Gamma^3_{23} = \cot x^2,\ \Gamma^2_{33} = -\sin x^2 \cos x^2,\ \Gamma^4_{14} = \frac{1}{2}, \\
R_{1441} = \frac{e^{x^1}}{4},\ R_{2442} = \frac{(x^1)e^{x^1}}{2},\ R_{3443} = \frac{(x^1)e^{x^1}}{2}(\sin x^2)^2, \\
S_{11} = \frac{1}{4},\ S_{22} = \frac{x^1}{2},\ S_{33} = \frac{x^1}{2}(\sin x^2)^2,\ S_{44} = \frac{(x^1+4)e^{x^1}}{4x^1},\ r = \frac{x^1+4}{2x^1}
\end{gathered} \tag{3.107}$$

olarak bulunur. O halde, (M_4, g) bir Riemann manifoldudur. Şimdi, bu manifoldun $N(QE)_4$ olduğu gösterilecektir. Herhangi bir $x \in M_4$ için, a ve b ilişkili skalerleri ile E ilişkili tensörünün bileşenleri, $x^2 \neq \pm\frac{k\pi}{2}$ $(k = 0,1,2,...)$ olmak üzere,

$$a = \frac{1}{4}(\cos x^2)^2\ ,\quad b = \frac{1}{4}(\sin x^2)^2 \tag{3.108}$$

ve

$$E_{ij}(x) = \begin{cases} 1, & i = j = 1 \text{ ise} \\ \frac{2x^1}{(\sin x^2)^2} - (x^1)^2(\cot x^2)^2, & i = j = 2 \text{ ise} \\ 2x^1 - (x^1)^2(\cos x^2)^2, & i = j = 3 \text{ ise} \\ \frac{e^{x^1}}{(\sin x^2)^2}\left(\frac{x^1+4}{x^1} - (\cos x^2)^2\right), & i = j = 4 \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \tag{3.109}$$

şeklinde seçilirse, (3.65) koşulunun sağlanması için, $i = 1,2,3,4$ olmak üzere,

$$S_{ii} = ag_{ii} + bE_{ii}$$

denklemlerinin sağlanması yeterlidir. Çünkü, diğer durumlar aşikar olarak sağlanacaktır. Bu takdirde, (3.107), (3.108) ve (3.109) kullanılırsa,

$$S_{11} = ag_{11} + bE_{11} = \frac{1}{4}(\cos x^2)^2 \times 1 + \frac{1}{4}(\sin x^2)^2 \times 1 = \frac{1}{4}$$

olarak elde edilir. $i = 2,3,4$ için de benzer şekilde, (3.65) bağıntısının gerçekleneceği gösterilebilir. Böylece, (M_4, g) manifoldunun (3.106) metriği ile birlikte bir $N(QE)_4$ olduğu ispatlanmış olur.

Öte yandan, (M_4, g) manifoldu (3.106) metriği ile birlikte bir yarı-Einstein manifoldu değildir. Aksi halde, $i, j = 1,2,3,4$ için,

$$S_{ij} = ag_{ij} + b\phi_i\phi_j$$

koşulunun sağlanması gerekirdi. Bu bağıntıda, $i = j$ için,

$$S_{ii} = ag_{ii} + b\phi_i\phi_i \tag{3.110}$$

bulunur. $S_{ii} \neq 0$ ve $g_{ii} \neq 0$ olduğundan, $i = 1,2,3,4$ için, $a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $\phi_i \neq 0$ olacak şekilde seçilebilir. Fakat, bu değerler için $i \neq j$ olması durumunda, $S_{ij} = ag_{ij} + b\phi_i\phi_j$ denklemi sağlanmayacaktır. Çünkü, $i \neq j$ için, $S_{ij} = g_{ij} = 0$ ve $\phi_i \neq 0$'dır. Dolayısıyla, (M_4, g) bir yarı-Einstein manifoldu değildir.

Örnek 3.2.2 $\mathbb{R}^4$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan g metriği göz önüne alınsın

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = (x^4)^{\frac{4}{3}}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] + (dx^4)^2. \tag{3.111}$$

Burada, $i, j = 1,2,3,4$ ve x^1, x^2, x^3, x^4, $\mathbb{R}^4$'ün standart koordinatlarıdır. Buna göre, sıfırdan farklı olan Christoffel sembolleri, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün bileşenleri ve skaler eğrilik, sırasıyla,

$$\Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} = \frac{2}{3x^4}, \ \Gamma^4_{11} = \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} = -\frac{2}{3}(x^4)^{\frac{1}{3}},$$

$$R_{1441} = R_{2442} = R_{3443} = -\frac{2}{9(x^4)^{2/3}},$$

$$R_{1221} = R_{1331} = R_{2332} = \frac{4}{9}(x^4)^{2/3},$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = \frac{2}{3(x^4)^{2/3}}, \ S_{44} = -\frac{2}{3(x^4)^2}, \ r = \frac{4}{3(x^4)^2} \tag{3.112}$$

şeklinde bulunur. O halde, (M_4, g) bir Riemann manifoldudur. Herhangi bir $x \in M_4$ için, a ve b ilişkili skalerleri ile E ilişkili tensörünün bileşenleri

$$a = -\frac{2}{3(x^4)^2}\ , \quad b = -\frac{1}{9x^4} \tag{3.113}$$

ve

$$E_{ij}(x) = \begin{cases} -12(x^4)^{1/3}, & i = j = 1,2,3 \text{ ise} \\ 0, & i = j = 4 \text{ ve } i \neq j \text{ ise} \end{cases} \tag{3.114}$$

şeklinde seçilirse ve (3.112), (3.113) ve (3.114) bağıntıları kullanılırsa,

$$S_{11} = ag_{11} + bE_{11} = \frac{2}{3(x^4)^{2/3}}$$

elde edilir. Benzer şekilde, S_{22}, S_{33} ve S_{44} bileşenlerinin de (3.65) koşulunu gerçekleyeceği gösterilebilir. Diğer durumlar ise aşikar olarak sağlanacaktır. O halde, (3.113) ve (3.114) koşulları ile birlikte, (M_4, g) manifoldu bir $N(QE)_4$ manifoldudur. Ayrıca, Örnek 3.2.1'deki benzer adımlarla, (M_4, g) manifoldunun bir yarı-Einstein manifoldu olamayacağı gösterilebilir.

Şimdi, (M_4, g) manifoldunun (3.111) metriği ile birlikte, E ilişkili tensörünü ve b ilişkili skalerini koruyan bir konformal dönüşüm içerdiği kabul edilsin. $x^1x^2x^3 > 0$ olmak üzere, σ ve $\bar{a}$ aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\sigma = \ln(x^1x^2x^3), \qquad \bar{a} = -\frac{2}{3(x^1x^2x^3x^4)^2} \tag{3.115}$$

bu ifadelerin Teorem 3.2.8'i sağladığı gösterilebilir. (3.115) koşulundan, $i = 1,2,3$ için $\nabla_i\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x^i} = \sigma_i = \frac{1}{x^i}$ ve $\sigma_4 = 0$ olarak bulunur. Öte yandan, σ_i'nin $(i = 1,2,3,4)$ sıfırdan farklı kovaryant türevleri,

$$\begin{aligned} \nabla_1\sigma_4 &= \nabla_4\sigma_1 = -\frac{2}{3x^1x^4}, \\ \nabla_2\sigma_4 &= \nabla_4\sigma_2 = -\frac{2}{3x^2x^4}, \\ \nabla_3\sigma_4 &= \nabla_4\sigma_3 = -\frac{2}{3x^3x^4}, \\ \nabla_1\sigma_1 &= -\frac{1}{(x^1)^2}, \\ \nabla_2\sigma_2 &= -\frac{1}{(x^2)^2}, \\ \nabla_3\sigma_3 &= -\frac{1}{(x^3)^2} \end{aligned} \tag{3.116}$$

şeklinde elde edilir. (3.116) denklemleri kullanılırsa,

$$g^{11}\nabla_1\sigma_1 + g^{11}\sigma_1\sigma_1 = 0 \tag{3.117}$$

bulunur. Benzer şekilde, diğer koşullar da sağlanır. O halde, (3.59) bağıntısı gerçeklenir. Bu duruma ek olarak, (3.116) ve (3.117) yardımıyla,

$$\bar{a}e^{2\sigma} = -\frac{2e^{2\ln(x^1x^2x^3)}}{3(x^1x^2x^3x^4)^2} = -\frac{2}{3(x^4)^2} = a \tag{3.118}$$

elde edilir. (3.117) ve (3.118) bağıntıları göz önüne alınırsa, (3.103) denkleminin sağlandığı görülür. Böylece, Teorem 3.2.8'in yukarıdaki koşullar altında gerçeklendiği gösterilmiş olur.

Şimdi ise, $N(QE)_n$ manifoldunun uzay-zaman modelleri araştırılacaktır. Bu uzay-zaman, $N(QES)_4$ şeklinde gösterilecektir. Genel görelilik teorisinde, kozmolojik sabitli Einstein alan denklemi

$$kT(X,Y) = S(X,Y) - \frac{r}{2}g(X,Y) + \lambda g(X,Y) \tag{3.119}$$

şeklinde verilir. Burada, S Ricci tensörünü, g metrik tensörü, r skaler eğriliği, λ kozmolojik sabiti ve T gerilme-enerji tensörünü göstermektedir.

(3.65) denkleminde X ve Y üzerinde daraltma yapılırsa ve (3.119) kullanılırsa,

$$T(X,Y) = \frac{1}{k}(\lambda - a - \frac{b\tilde{E}}{2})g(X,Y) + \frac{b}{k}E(X,Y) \tag{3.120}$$

olarak bulunur. Bununla birlikte, mükemmel akışkanlı bir uzay-zamanı için gerilme-enerji tensörü

$$T(X,Y) = (\sigma + p)A(X)A(Y) + pg(X,Y) \tag{3.121}$$

şeklinde verilir. Burada, σ enerji yoğunluğu ve p izotropik basıncı göstermektedir ve $\sigma + p \neq 0$ dır. A, sıfırdan farklı bir formu $g(X,V) = A(X)$ olarak tanımlanır ve V hız vektörü $g(V,V) = -1$ koşulunu sağlar. (3.120) ve (3.121) denklemleri kullanılırsa,

$$E(X,Y) = \frac{(kp - a - \lambda + \frac{r}{2})}{b}g(X,Y) + \frac{k(\sigma + p)}{b}A(X)A(Y) \tag{3.122}$$

bulunur.

Teorem 3.2.10 İlişkili skalerleri sabit olan mükemmel akışkanlı bir $N(QES)_4$ uzayının E ilişkili tensörü lokal olarak simetrikse, bu akışın σ enerji yoğunluğu ve p izotropik basıncı sabittir.

İspat: İlişkili skalerleri sabit olan, mükemmel akışkanlı bir $N(QES)_4$ uzayının E ilişkili tensörü (3.122) formundadır. Bu ifadenin her iki tarafının kovaryant türevi alınırsa, a ve b sabitler olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_Z E)(X,Y) = {} & \frac{[2k(\nabla_Z p) + \nabla_Z r]}{2b} g(X,Y) + \frac{k[(\nabla_Z \sigma) + (\nabla_Z p)]}{b} A(X)A(Y) \\
& + \frac{k(\sigma + p)}{b} [(\nabla_Z A)(X)A(Y) + A(X)(\nabla_Z A)(Y)] \qquad (3.123)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, ilişkili skalerleri sabit olan bir $N(QES)_4$ uzayı için, (3.65) koşulunun kovaryant türevi alınırsa ve E tensörünün lokal olarak simetrik olduğu kullanılırsa,

$$(\nabla_Z S)(X,Y) = 0$$

bağıntısı mevcut olur. O halde, manifoldun skaler eğriliği sabittir. Buna göre, (3.123) denkleminden,

$$
\begin{aligned}
& k(\nabla_Z p) g(X,Y) + k[(\nabla_Z \sigma) + (\nabla_Z p)] A(X)A(Y) \\
& + k(\sigma + p)[(\nabla_Z A)(X)A(Y) + A(X)(\nabla_Z A)(Y)] = 0 \qquad (3.124)
\end{aligned}
$$

ifadesi bulunur.

(3.124) denkleminde, X ve Y üzerine daraltma yapılırsa ve $g(V,V) = -1$ koşulu kullanılırsa, $k \neq 0$ olduğundan,

$$3\nabla_Z p - \nabla_Z \sigma = 0 \qquad (3.125)$$

dir.

Diğer taraftan, (3.124) denkleminde, $X = Y = V$ alınırsa ve $g(V,V) = -1$ koşulu kullanılırsa, $\nabla_Z \sigma = 0$ ve daha sonra, (3.125) denkleminden, $\nabla_Z p = 0$ sonuçları elde edilir. Bu durumda, σ enerji yoğunluğunun ve p izotropik basıncın sabit olduğu anlaşılır. Böylece, ispat tamamlanır. □

Şimdi, (3.79) koşulunu sağlayan bir neredeyse yarı-Einstein manifoldu göz önüne alınsın. Kozmolojik sabit içermeyen Einstein alan denklemi

$$kT(X,Y) = S(X,Y) - \frac{r}{2} g(X,Y) \qquad (3.126)$$

şeklindedir. Bu durumda, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.2.11 (3.79) koşulunu sağlayan bir $N(QES)_4$ göz önüne alındığı takdirde, gerilme-enerji tensörünün izinin sabit olması için gerek ve yeter koşul, a ilişkili skalerinin sabit olmasıdır.

İspat: $N(QES)_4$ manifoldunun (3.79) koşulunu sağladığı kabul edilsin. Bu takdirde, (3.79) ve (3.126) denklemleri kullanılırsa,

$$kT(X,Y) = (a - \frac{r}{2})g(X,Y) + b(\phi(X)\psi(Y) + \phi(Y)\psi(X)) \tag{3.127}$$

elde edilir. Öte yandan, (3.79) koşulundan, manifoldun skaler eğriliği

$$r = 4a \tag{3.128}$$

şeklinde bulunur. (3.127) ve (3.128) bağıntıları yardımıyla,

$$kT(X,Y) = -ag(X,Y) + b(\phi(X)\psi(Y) + \phi(Y)\psi(X)) \tag{3.129}$$

denklemi elde edilir. (3.129) denkleminde, X ve Y üzerinde daraltma yapılırsa, $\widetilde{T}$ gerilme-enerji tensörünün izini göstermek üzere,

$$\widetilde{T} = -\frac{4}{k}a \tag{3.130}$$

sonucuna ulaşılır. (3.130) bağıntısına göre, gerilme-enerji tensörünün izinin sabit olması için gerek ve yeter koşul, a ilişkili skalerinin sabit olmasıdır. Böylece, ispat tamamlanır. □

3.3 Genelleştirilmiş Yarı-Einstein Manifoldları

Genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu kavramı, ilk olarak, 2001 yılında M. C. Chaki tarafından verilmiştir, [7]. Daha sonra, 2004 yılında, U. C. De ve G. C. Ghosh tarafından farklı bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu tanımlanmıştır, [8]. Bu manifoldun her iki tanımı da aşağıda yer almaktadır.

Tanım 3.3.1 ([7]) (M,g) $n-$boyutlu $(n > 2)$ bir Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun Ricci tensörü sıfırdan farklı olmak üzere, $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\phi(X)\phi(Y) + c[\phi(X)\psi(Y) + \phi(Y)\psi(X)] \tag{3.131}$$

bağıntısı gerçekleniyorsa, M manifolduna genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu adı verilir. Burada, a, b, c skaler fonksiyonlardır ve b, c sıfırdan farklıdır. Bu fonksiyonlara

M manifoldunun ilişkili skalerleri denir. U ve V birbirine dik birim vektör alanları olmak üzere, yani

$$g(U,V) = 0, \;\; g(U,U) = g(V,V) = 1 \tag{3.132}$$

şartları gerçekleniyorsa, ϕ ve ψ sıfırdan farklı 1-formlar tarafından üretilen U ve V vektör alanları

$$g(X,U) = \phi(X), \; g(X,V) = \psi(X) \tag{3.133}$$

şeklinde tanımlanır. Bu vektör alanlarına, M manifoldunun üreteçleri denir.

Tanım 3.3.2 ([8]) (M,g) $n-$boyutlu $(n > 2)$ bir Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun Ricci tensörü sıfırdan farklı olmak üzere, $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\phi(X)\phi(Y) + c\psi(X)\psi(Y) \tag{3.134}$$

bağıntısı gerçekleniyorsa, M manifolduna genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu adı verilir. Burada, a, b, c skaler fonksiyonlardır ve b, c sıfırdan farklıdır. Bu fonksiyonlara M manifoldunun ilişkili skalerleri denir. U ve V birbirine dik birim vektör alanları olmak üzere, yani

$$g(U,V) = 0, \;\; g(U,U) = g(V,V) = 1 \tag{3.135}$$

şartları gerçekleniyorsa, ϕ ve ψ sıfırdan farklı 1-formlar tarafından üretilen U ve V vektör alanları

$$g(X,U) = \phi(X), \; g(X,V) = \psi(X) \tag{3.136}$$

şeklinde tanımlanır. Bu vektör alanlarına, M manifoldunun üreteçleri denir. $\sharp$ işareti kullanılarak, $U = \phi^\sharp$ ve $V = \psi^\sharp$ yazılabilir. $n-$boyutlu bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu $G(QE)_n$ sembolü ile gösterilmektedir.

$G(QE)_n$ manifoldunun (3.134)'deki tanımı esas alınarak, [8, 42] numaralı kaynaklarda bu manifoldlarla ilgili örnekler verilmiştir.

Bu çalışmada, (3.134) ve (3.135) koşullarını sağlayan $G(QE)_n$ manifoldu incelenecektir.

3.3.1 Genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları üzerindeki özel vektör alanları

Çalışmanın bu bölümünde, (3.134) ve (3.135) koşullarını sağlayan genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları üzerinde tanımlanan özel vektör alanları göz önüne alınacaktır. İlk olarak, $G(QE)_n$ manifoldunun temel özelliklerinden bahsedilerek, bazı temel tanımlara yer verilecektir.

$(e_i)_{i=1}^n$, $G(QE)_n$ manifoldu üzerinde ortonormal baz olmak üzere, (3.134) ve (3.135) koşulları kullanılırsa, manifoldun skaler eğrilik fonksiyonu

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) = na + b + c \tag{3.137}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$S(U,U) = a + b, \tag{3.138}$$

$$S(V,V) = a + c \tag{3.139}$$

bağıntıları gerçeklenir.

Bu çalışmanın devamında kullanılmak üzere, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldunun üreteç vektör alanlarının paralel vektör alanı olması durumunun göz önüne alındığı aşağıdaki teorem verilmektedir.

Teorem 3.3.1 ([8]) Bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldunun üreteçleri olan U ve V vektör alanları paralel vektör alanları ise, manifoldun ilişkili skalerleri arasında $b = c = -a$ bağıntısı mevcuttur.

Tanım 3.3.3 (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M manifoldunun Ricci tensörü S, $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_Z S)(X,Y) + (\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_Y S)(Z,X) = 0 \tag{3.140}$$

bağıntısını gerçekliyorsa, Ricci tensörüne dairesel paraleldir denir.

Teorem 3.3.2 (M,g), $n-$boyutlu bir $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, manifoldun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda tors oluşturan vektör alanları olması mümkün değildir.

İspat: $G(QE)_n$ manifoldunun üreteç vektör alanları U ve V, sırasıyla, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşı gelen vektör alanları olsun. U ve V üreteç vektör alanlarının her ikisinin de tors oluşturan vektör alanları olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $g(U,U) = 1$, $g(V,V) = 1$ koşulları ve (2.16) kullanılırsa,

$$(\nabla_X \phi)(Y) = \rho(g(X,Y) - \phi(X)\phi(Y)) \tag{3.141}$$

ve

$$(\nabla_X \psi)(Y) = \sigma(g(X,Y) - \psi(X)\psi(Y)) \tag{3.142}$$

denklemleri elde edilir. Burada, ρ ve σ skaler fonksiyonlardır.

Öte yandan, $g(U,V) = 0$ koşulunun kovaryant türevi alınırsa ve (3.141), (3.142) denklemleri kullanılırsa,

$$g(\nabla_X U, V) + g(U, \nabla_X V) = \rho\psi(X) + \sigma\phi(X) = 0 \tag{3.143}$$

denklemi bulunur. Bu durumda, (3.143) denkleminde $X = U$ alınırsa ve (3.135) koşulu kullanılırsa ve daha sonra, (3.143) denkleminde $X = V$ alınarak aynı işlemler yapılırsa,

$$\rho = \sigma = 0$$

bulunur. Bu durum, ρ ve σ'nın sıfırdan farklı skaler fonksiyonlar olması ile çelişir. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.3.3 $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü, Codazzi tensörü ve bu manifoldun üreteçleri olan $\phi^\sharp$, $\psi^\sharp$ vektör alanlarından yalnızca biri tors oluşturan vektör alanı olsun. Bu takdirde,

$$\rho = \frac{1}{b} a_k \phi^k \quad \text{ya da} \quad \sigma = \frac{1}{c} a_k \psi^k$$

koşulu sağlanır. Burada, $a_k = \partial_k a$ ile gösterilmektedir.

İspat: Lokal koordinatlarda, (3.40) denklemi kullanılırsa,

$$\nabla_k S_{ij} = \nabla_j S_{ik} \tag{3.144}$$

elde edilir. Öte yandan, (3.134) koşulunun her iki tarafının kovaryant türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_k S_{ij} = {} & a_k g_{ij} + b_k \phi_i \phi_j + b(\nabla_k \phi_i)\phi_j + b(\nabla_k \phi_j)\phi_i + c_k \psi_i \psi_j \\ & + c(\nabla_k \psi_i)\psi_j + c(\nabla_k \psi_j)\psi_i \end{aligned} \tag{3.145}$$

denklemi bulunur. Burada, a, b, c manifoldun ilişkili skalerleridir ve $a_k = \partial_k a$, $b_k = \partial_k b$ ve $c_k = \partial_k c$ ile gösterilmektedir.

Şimdi, $U = \phi^\sharp$ ve $V = \psi^\sharp$ vektör alanlarından sadece birinin tors oluşturan vektör alanı olduğu kabul edilsin. Örneğin, $U = \phi^\sharp$ vektör alanı tors oluşturan vektör alanı olsun. Bu durumda, (2.17) ve (3.135) denklemleri kullanılırsa, ρ bir skaler fonksiyon olmak üzere,

$$\nabla_k \phi_i = \rho(g_{ik} - \phi_i \phi_k) \tag{3.146}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.145) ve (3.146) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_k S_{ij} = a_k g_{ij} + b_k \phi_i \phi_j + c_k \psi_i \psi_j + b\rho\phi_i(g_{jk} - \phi_j \phi_k) \\ + b\rho\phi_j(g_{ik} - \phi_i \phi_k) + c(\nabla_k \psi_i)\psi_j + c(\nabla_k \psi_j)\psi_i \end{aligned} \tag{3.147}$$

şeklinde bulunur. Böylece, (3.144) ve (3.147) denklemleri göz önüne alındığı takdirde,

$$\begin{aligned} & a_k g_{ij} - a_j g_{ik} + b_k \phi_i \phi_j - b_j \phi_i \phi_k + c_k \psi_i \psi_j - c_j \psi_i \psi_k + b\rho(g_{ik}\phi_j - g_{ij}\phi_k) \\ & + c(\psi_j \nabla_k \psi_i + \psi_i \nabla_k \psi_j - \psi_k \nabla_j \psi_i - \psi_i \nabla_j \psi_k) = 0 \end{aligned} \tag{3.148}$$

bağıntısının sağlanması gerektiği görülür.

Daha sonra, (3.148) denklemi g^{ij} ile çarpılırsa ve elde edilen ifade, sırasıyla, ϕ^k ve ψ^k ile çarpılırsa ve (3.135) koşulu kullanılırsa, $k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere,

$$\big((n-1)a_k + c_k\big)\phi^k + [(1-n)b + c]\rho = 0, \tag{3.149}$$

$$\big((n-1)a_k + b_k\big)\psi^k - c\nabla_k \psi^k = 0 \tag{3.150}$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.148) denklemi $\phi^i \phi^j$ çarpılırsa ve (3.135) koşulu kullanılırsa, $j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere,

$$a_k + b_k - (a_j \phi^j + b_j \phi^j)\phi_k = 0 \tag{3.151}$$

elde edilir. Böylece, (3.151) denklemi ψ^k ile çarpılırsa,

$$(a_k + b_k)\psi^k = 0 \tag{3.152}$$

bağıntısı bulunur.

Ayrıca, (3.148) denklemi $\psi^i \psi^j$ çarpılırsa ve (3.135) koşulu kullanılırsa,

$$a_k + c_k - b\rho\phi_k - c\psi^j \nabla_j \psi_k - (a_j + c_j)\psi^j \psi_k = 0 \tag{3.153}$$

elde edilir. Bu durumda, (3.153) ifadesi, ϕ^k ile çarpılırsa,

$$(a_k + c_k)\phi^k - (b - c)\rho = 0 \tag{3.154}$$

bulunur. Böylece, (3.149) ve (3.154) denklemleri göz önüne alındığı takdirde,

$$\rho = \frac{1}{b} a_k \phi^k \tag{3.155}$$

sonucuna ulaşılır.

Benzer şekilde, $V = \psi^\sharp$ vektör alanının tors oluşturan vektör alanı olduğu kabul edilirse, yukarıdaki adımlar kullanılarak, σ fonksiyonunun

$$\sigma = \frac{1}{c} a_k \psi^k \tag{3.156}$$

şeklinde olması gerektiği görülür ve böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.3.1 $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü, Codazzi tensörü ve bu manifoldun üreteçleri olan $\phi^\sharp$, $\psi^\sharp$ vektör alanlarından yalnızca biri tors oluşturan vektör alanı olsun. Bu takdirde, a ilişkili skalerinin sabit olması mümkün değildir.

İspat: $G(QE)_n$ manifoldunun a ilişkili skaleri sabit olsun. Bu durumda, (3.155) ve (3.156) denklemleri kullanılırsa, $\rho = \sigma = 0$ bulunur. Bu ifade hipotez için çelişki oluşturur. Buna göre, sonuç açıktır. □

Teorem 3.3.4 $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü, Codazzi tensörü ve bu manifoldun üreteçleri olan $\phi^\sharp$, $\psi^\sharp$ vektör alanlarından yalnızca biri tors oluşturan vektör alanı olsun. Bu durumda, $\phi^\sharp$ (veya $\psi^\sharp$) vektör alanının diverjansının sıfır olması için gerek ve yeter koşul, manifoldun a ve c (veya a ve b) ilişkili skalerlerinin gradiyent vektörünün $\phi^\sharp$ (veya $\psi^\sharp$) vektör alanına dik olmasıdır.

İspat: $\phi^\sharp$ vektör alanı tors oluşturan vektör alanı olsun. Bu durumda, (3.150) ve (3.152) denklemleri yardımıyla,

$$\nabla_k \psi^k = \frac{1}{c}(n-2) a_k \psi^k \tag{3.157}$$

bağıntısı mevcuttur.

$\psi^\sharp$ vektör alanının diverjansı sıfırsa, (3.152) ve (3.157) denklemlerinden, $a_k\psi^k$=0 ve $b_k\psi^k$=0 koşullarının sağlanması gerektiği görülür. Başka bir deyişle, $\psi^\sharp$ vektör alanı a ve b ilişkili skalerlerinin gradiyentine diktir. Bu durumun tersi de doğrudur.

Benzer şekilde, $\psi^\sharp$ vektör alanının tors oluşturan vektör alanı olduğu kabul edilirse, Teorem 3.3.3'deki adımlar yardımıyla,

$$\big((n-1)a_k + c_k\big)\phi^k - b\nabla_k\phi^k = 0 \tag{3.158}$$

ve

$$(a_k + c_k)\phi^k = 0 \tag{3.159}$$

denklemleri elde edilir. Bu ifadeler kullanılarak,

$$\nabla_k\phi^k = \frac{1}{b}(n-2)a_k\phi^k \tag{3.160}$$

sonucu bulunur.

Bu durumda, $\phi^\sharp$ vektör alanının diverjansı sıfırsa, (3.159) ve (3.160) denklemlerinden, $a_k\phi^k$=0 ve $c_k\phi^k$=0 sonucu çıkar. O halde, $\phi^\sharp$ vektör alanı a ve c ilişkili skalerlerinin gradiyentine diktir. Bu durumun tersinin de sağlanacağı kolayca görülebilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.3.5 $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü dairesel paralel tensör alanı ve bu manifoldun üreteçleri olan $\phi^\sharp$ve $\psi^\sharp$ vektör alanlarından yalnızca biri tors oluşturan vektör alanı olsun. Bu takdirde,

$$\rho = \frac{1}{2b}b_k\phi^k \quad \text{ya da} \quad \sigma = \frac{1}{2c}c_k\psi^k$$

bağıntıları sağlanır. Burada, $b_k = \partial_k b$ ve $c_k = \partial_k c$ ile gösterilmektedir.

İspat: $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörünün dairesel paralel tensör alanı olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (3.145) ifadesinde indisler dairesel olarak değiştirildiğinde ve daha sonra (3.140) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} & a_k g_{ij} + a_i g_{jk} + a_j g_{ik} + b_k\phi_i\phi_j + b_i\phi_j\phi_k + b_j\phi_i\phi_k \\ & + c_k\psi_i\psi_j + c_i\psi_j\psi_k + c_j\psi_i\psi_k + 2b\rho(\phi_i g_{jk} + \phi_j g_{ik} + \phi_k g_{ij}) \\ & - 6b\rho\phi_i\phi_j\phi_k + c(\psi_j\nabla_k\psi_i + \psi_i\nabla_k\psi_j + \psi_k\nabla_i\psi_j + \psi_j\nabla_i\psi_k \\ & + \psi_i\nabla_j\psi_k + \psi_k\nabla_j\psi_i) = 0 \end{aligned} \tag{3.161}$$

denklemi elde edilir.

Şimdi, (3.161) denklemi g^{ij} ile çarpılırsa ve (3.135) koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(n+2)a_k+b_k+2b_i\phi^i\phi_k+c_k+2c_i\psi^i\psi_k \\ +2(n-1)b\rho\phi_k+2c(\nabla_i\psi^i)\psi_k+2c\psi^i\nabla_i\psi_k=0\end{aligned} \tag{3.162}$$

bağıntısı bulunur. Böylece, (3.162) denklemi, sırasıyla, ϕ^k ve ψ^k ile çarpılırsa ve (3.135) bağıntısı kullanılırsa,

$$[(n+2)a_k+3b_k+c_k]\phi^k+[2(n-1)b-2c]\rho=0 \tag{3.163}$$

ve

$$[(n+2)a_k+b_k+3c_k]\psi^k+2c\nabla_i\psi^i=0 \tag{3.164}$$

denklemleri elde edilir.

Diğer taraftan, (3.161) denklemi $\phi^i\phi^j$ ile çarpılırsa,

$$a_k+b_k+2(a_i+b_i)\phi^i\phi_k=0 \tag{3.165}$$

bulunur.

Bununla birlikte, (3.165) denklemi, sırasıyla, ϕ^k ve ψ^k ile çarpılırsa,

$$(a_k+b_k)\phi^k=0 \tag{3.166}$$

ve

$$(a_k+b_k)\psi^k=0 \tag{3.167}$$

bağıntıları elde edilir.

Benzer şekilde, (3.161) denklemi $\psi^i\psi^j$ ile çarpılırsa,

$$a_k+c_k+2(a_i+c_i)\psi^i\psi_k+2b\rho\phi_k+2c\psi^i\nabla_i\psi_k=0 \tag{3.168}$$

elde edilir. Daha sonra, (3.168) denklemi, sırasıyla, ϕ^k ve ψ^k ile çarpılırsa ve (3.135) ifadesi göz önüne alınırsa,

$$(a_k+c_k)\phi^k+2(b-c)\rho=0 \tag{3.169}$$

ve

$$(a_k+c_k)\psi^k=0 \tag{3.170}$$

bağıntıları bulunur. Böylece, (3.163), (3.166) ve (3.169) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$\rho = \frac{1}{2b} b_k \phi^k \tag{3.171}$$

sonucuna ulaşılır.

Aynı şekilde, $\psi^\sharp$ vektör alanının tors oluşturan vektör alanı olması durumunda da benzer adımlar kullanılarak,

$$\sigma = \frac{1}{2c} c_k \psi^k \tag{3.172}$$

ifadesi elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.3.2 $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörü dairesel paralel ve bu manifoldun üreteçleri olan $\phi^\sharp$, $\psi^\sharp$ vektör alanlarından yalnızca biri tors oluşturan vektör alanı olsun. Bu durumda, a, b ve c ile verilen manifoldun ilişkili skalerlerinin sabit olması mümkün değildir.

İspat: $G(QE)_n$ manifoldunun ilişkili skalerlerinden herhangi birisi sabit olursa, (3.166), (3.170), (3.171) ve (3.172) denklemlerinden $\rho = \sigma = 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece, a, b ve c sabit olamaz. Bu durumda, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.3.6 Dairesel paralel Ricci tensörüne sahip bir $G(QE)_n$ manifoldunun $\phi^\sharp$ (veya $\psi^\sharp$) üreteç vektör alanı tors oluşturan vektör alanı olsun. Bu durumda, diğer vektör alanı olan $\psi^\sharp$ (veya $\phi^\sharp$) vektör alanının diverjansı sıfırdır.

İspat: $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörünün dairesel paralel ve bu manifoldun $\phi^\sharp$ üreteç vektör alanının tors oluşturan vektör alanı olduğu kabul edilsin. II. Bianchi özdeşliği ve (3.140) denklemi kullanıldığı takdirde, manifoldun skaler eğriliğinin sabit olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Böylece, (3.137) ifadesinin her iki tarafının kovaryant türevi alınırsa ve (3.164) ile (3.170) denklemleri kullanılırsa,

$$\nabla_i \psi^i = 0$$

bağıntısı elde edilir. O halde, $\psi^\sharp$ vektör alanının diverjansı sıfırdır. Benzer sonuç, $\psi^\sharp$ vektör alanının tors oluşturan vektör alanı olması durumunda $\phi^\sharp$ üreteci için de elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldunun üreteç vektör alanlarının $\phi(Ric)$ ve $\psi(Ric)$ vektör alanları olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.3.7 $G(QE)_n$ manifoldunun üreteçleri olan $\phi^\sharp$ ve $\psi^\sharp$ vektör alanları, sırasıyla, $\phi(Ric)$ ve $\psi(Ric)$ vektör alanları olsun. Bu durumda, $\phi^\sharp$ ve $\psi^\sharp$ paralel vektör alanlarıdır.

İspat: $G(QE)_n$ manifoldunun $\phi^\sharp$ üreteç vektör alanının $\phi(Ric)$ vektör alanı olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (2.20) denkleminden, μ bir sabit olmak üzere,

$$\nabla_j \phi_i = \mu S_{ij} \tag{3.173}$$

bağıntısı mevcuttur.

Bu takdirde, (3.173) denklemi ϕ^i ile çarpılırsa ve (3.134), (3.135) denklemleri kullanılırsa,

$$\mu S_{ij}\phi^i = \mu(a+b)\phi_j = 0 \tag{3.174}$$

denklemi elde edilir.

μ sabiti sıfırdan farklı olmak üzere, (3.174) denkleminden,

$$a = -b \tag{3.175}$$

olarak elde edilir.

Böylece, (3.134) ve (3.175) ifadeleri yardımıyla, manifoldun Ricci tensörü

$$S_{ij} = a(g_{ij} - \phi_i\phi_j) + c\psi_i\psi_j \tag{3.176}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan (3.176) denklemi ϕ^i ile çarpıldığı takdirde, $S_{ij}\phi^i = 0$ olarak elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının kovaryant türevi alınırsa ve (3.173), (3.174) bağıntıları kullanılırsa, $S_k^i = g^{im}S_{mk}$ olmak üzere,

$$(\nabla_k S_{ij})\phi^i + \mu S_{ij}S_k^i = 0 \tag{3.177}$$

bulunur.

Daha sonra, (3.177) denklemi g^{jk} ile çarpılırsa,

$$(\nabla_k S_i^k)\phi^i + \mu S_{ij}S^{ij} = 0 \tag{3.178}$$

elde edilir.

$\phi^{\sharp}$ birim vektör alanı olduğundan, Teorem 2.2.1'e göre, manifoldun skaler eğriliği sabittir. Öte yandan, daraltılmış II. Bianchi özdeşliği yardımıyla, (3.19) denklemi mevcuttur. Bu durumda, (3.19) ve (3.178) denklemleri kullanılırsa ve μ sabitinin sıfırdan farklı olduğu göz önüne alınırsa,

$$S_{ij}S^{ij} = 0 \tag{3.179}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (3.135), (3.176) ve (3.179) bağıntıları yardımıyla,

$$(n-1)a^2 + 2ac + c^2 = 0 \tag{3.180}$$

bulunur. Buradan,

$$(n-2)a^2 + (a+c)^2 = 0 \tag{3.181}$$

sonucu elde edilir.

Böylece, (3.181) denklemine göre, a ve $a+c$ ifadeleri sıfır olmalıdır. Yani, $a = c = 0$ olmak zorundadır. Bu takdirde, (3.176) bağıntısından, Ricci tensörü özdeş olarak sıfır olmalıdır. Bu durum, hipotez için bir çelişkidir. O halde, μ sabiti sıfır olmak zorundadır. Buna göre, $\phi^{\sharp}$ vektör alanı paralel vektör alanı olmalıdır. Benzer şekilde, $\psi^{\sharp}$ üreteç vektör alanının $\psi(Ric)$ vektör alanı olması halinde de, bu vektör alanının paralel vektör alanına dönüşeceği gösterilebilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur. $\square$

4. PSEUDO RICCI SİMETRİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, Bölüm 3.3'te incelenmiş olan genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldunun aynı zamanda, pseudo Ricci simetrik ve hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifold olması durumu araştırılacak ve bu özel manifoldlar üzerinde vektör alanları incelenecektir. Bu manifoldlar, sırasıyla, pseudo Ricci simetrik genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu ve hemen hemen pseudo Ricci simetrik genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu olarak isimlendirilecektir. Hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifoldlar, pseudo Ricci simetrik manifoldların genelleştirilmişidir. Bu yüzden, ilk olarak, pseudo simetrik ve pseudo Ricci simetrik manifold kavramlarından bahsedilecektir. Daha sonra, hemen hemen pseudo Ricci simetrik genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlar göz önüne alınacaktır.

4.1 Pseudo Simetrik ve Pseudo Ricci Simetrik Manifoldlar

Tanım 4.1.1 ([13]) (M,g) $n-$boyutlu, $(n \geq 2)$ düz olmayan bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için, M manifoldunun R Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y,Z)W = {} & 2A(X)R(Y,Z)W + A(Y)R(X,Z)W + A(Z)R(Y,X)W \\ & + A(W)R(Y,Z)X + g(R(Y,Z)W,X)P \end{aligned} \tag{4.1}$$

koşulunu sağlıyorsa, M manifolduna, pseudo simetrik manifold adı verilir. Burada, A, sıfırdan farklı 1-formdur. Bu forma, M manifoldunun ilişkili 1-formu denir ve manifolda ait $\forall\, X$ vektör alanı için,

$$g(X,P) = A(X) \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır. $n-$boyutlu bir pseudo simetrik manifold, $(PS)_n$ sembolü ile gösterilmektedir.

Tanım 4.1.2 ([14]) (M,g) $n-$boyutlu $(n > 3)$ düz olmayan bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için, manifoldun Ricci tensörü S, sıfırdan farklı olmak üzere,

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = 2A(X)S(Y,Z) + A(Y)S(X,Z) + A(Z)S(Y,X) \tag{4.3}$$

koşulunu sağlıyorsa, M manifolduna, pseudo Ricci simetrik manifold adı verilir. Burada, A sıfırdan farklı 1-formdur. A formuna, M manifoldunun ilişkili 1-formu denir ve bütün X vektör alanları için,

$$g(X,\rho) = A(X) \tag{4.4}$$

olarak tanımlanır. $n-$boyutlu bir pseudo Ricci simetrik manifold, $(PRS)_n$ sembolü ile gösterilmektedir. Eğer $A = 0$ ise, bu manifold Ricci simetrik manifolda indirgenir.

Pseudo Ricci simetrik manifoldlarla ilgili aşağıda yer alan sonuçlar bu bölümde kullanılacaktır.

Teorem 4.1.1 ([14]) $(PRS)_n$ manifoldunun r skaler eğriliği sabit ise, bu durumda sıfıra eşit olmak zorundadır. Eğer $r \neq 0$ ise, manifoldun ilişkili 1-formu A, kapalıdır.

Teorem 4.1.2 ([43]) Eğer $(PRS)_n$ manifoldunun Ricci tensörü Codazzi tipinde ise, bu manifold Ricci-düzdür.

Şimdi, pseudo Ricci simetrik genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlar göz önüne alınarak elde edilen bazı sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.1.3 (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, manifoldun Ricci tensörünün dairesel paralel olması mümkün değildir. Aksi takdirde, bu manifold Ricci simetrik manifolda indirgenir.

İspat: (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu manifoldun Ricci tensörünün dairesel paralel tensör olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (4.3) denkleminde indisler dairesel olarak yer değiştirilirse ve (3.140) denklemi kullanılırsa,

$$A(X)S(Y,Z) + A(Y)S(X,Z) + A(Z)S(Y,X) = 0 \tag{4.5}$$

denklemi elde edilir.

Walker'ın Yardımcı Teoremi, [40] ve (4.5) denklemi göz önüne alınırsa, $S \neq 0$ olduğundan, $A = 0$ olarak elde edilir. Bu ise, M manifoldunun Ricci simetrik manifolda indirgenmesi anlamına gelmektedir. O halde, ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 4.1.1 (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, manifoldun Ricci tensörünün Codazzi tensörü olması mümkün değildir. Aksi takdirde, bu manifold Ricci simetrik manifolda indirgenir.

İspat: (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik manifoldunun Ricci tensörü Codazzi tensörü ise, Teorem 4.1.2'e göre, bu manifold Ricci-düzdür. Bu ise, $G(QE)_n$ manifoldunun Ricci tensörünün sıfırdan farklı olması ile çelişmektedir. O halde, sonuç açıktır. $\square$

Şimdi de, $G(QE)_n$ manifoldunun üreteç vektör alanlarının paralel vektör alanları olduğu kabul edilsin, [8]. Bu durumda, $\nabla_X U = 0$ ve $\nabla_X V = 0$ koşulları sağlanır. Buradan, $R(X,Y)U = 0$ ve $R(X,Y)V = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla, $S(X,U) = 0$ ve $S(X,V) = 0$ denklemleri elde edilir. Bu koşullar (3.134) denkleminde yerine yazılırsa, ilişkili skalerler arasında, $b = c = -a$ bağıntısı ve böylece,

$$S(X,Y) = a[g(X,Y) - \phi(X)\phi(Y) - \psi(X)\psi(Y)] \tag{4.6}$$

bulunur.

Teorem 4.1.4 (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, manifoldun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda paralel vektör alanları olması mümkün değildir.

İspat: (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, (4.3) denkleminde indisler dairesel olarak yer değiştirilirse ve bu üç denklem toplanırsa,

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_Y S)(X,Z) + (\nabla_Z S)(Y,X) &= 4A(X)S(Y,Z) \\ &\quad + 4A(Y)S(X,Z) + 4A(Z)S(Y,X)\end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir.

Lokal koordinatlarda, (4.6) denkleminin kovaryant türevi alınırsa ve U, V üreteç vektör alanları paralel vektör alanları olarak kabul edilirse, $a_k = \partial_k a$ olmak üzere,

$$\nabla_k S_{ij} = a_k(g_{ij} - \phi_i\phi_j - \psi_i\psi_j) \tag{4.8}$$

bulunur.

Bu takdirde, (4.8) denklemi g^{jk} ile çarpılırsa ve (3.19) daraltılmış II. Bianchi özdeşliği kullanılırsa, (3.137) bağıntısı ve hipoteze göre, $r = (n-2)a$ ifadesi mevcut olduğundan,

$$a_i\phi^i = a_i\psi^i = 0$$

elde edilir. Bu bağıntılar ve (3.19) ile verilen daraltılmış II. Bianchi özdeşliği yardımıyla,

$$\nabla_k S_i^k = a_i = \frac{1}{2}(n-2)a_i \tag{4.9}$$

denklemi elde edilir. Bu takdirde, (4.9) ifadesi yardımıyla,

$$(n-4)a_i = 0 \tag{4.10}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre, $n = 4$ veya $a_i = 0$ olmalıdır.

Eğer $n \neq 4$ ise, (4.10) denklemine göre, a ilişkili skaleri sabit olmalıdır. O halde, (4.8) denklemine göre, $\nabla S = 0$ olarak elde edilir.

Diğer taraftan, $n = 4$ ve a ilişkili skaleri sabit değilse, (4.6) ve (4.8) denklemleri kullanılarak, $\gamma_k = \frac{a_k}{a}$ olmak üzere,

$$\nabla_k S_{ij} = \gamma_k S_{ij} \tag{4.11}$$

bulunur. Böylece, (4.11) denklemine göre, $G(QE)_n$ manifoldu Ricci-rekürandır, [8].

İlk olarak, $n = 4$ ise, (4.7) ve (4.11) denklemleri kullanılırsa,

$$\alpha(X)S(Y,Z) + \alpha(Y)S(X,Z) + \alpha(Z)S(Y,X) = 0 \tag{4.12}$$

elde edilir. Burada, her $X \in \chi(M)$ için, $\alpha(X) = 4A(X) - d(\ln|a|)(X)$ şeklindedir. Walker'ın Yardımcı Teoremi [40] ve (4.12) denklemi kullanılırsa

$$A(X) = \frac{1}{4}d(\ln|a|)(X) \tag{4.13}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan, (4.3) ve (4.6) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} da(X)[g(Y,Z) - \phi(Y)\phi(Z) - \psi(Y)\psi(Z)] = 2A(X)S(Y,Z) \\ +A(Y)S(X,Z) + A(Z)S(Y,X) \end{aligned} \tag{4.14}$$

bulunur.

(4.14) ifadesinde, $Y = U$ alınırsa ve (3.135), (4.6) denklemleri kullanılırsa, Ricci tensörü sıfırdan farklı olduğundan,

$$A(U) = 0 \tag{4.15}$$

bulunur. (4.15) denklemine göre, ϕ, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanına diktir.

Benzer şekilde, (4.14) denkleminde, $Y = V$ alınırsa ve (3.135), (4.6) denklemleri kullanılırsa,

$$A(V) = 0 \tag{4.16}$$

bulunur. O halde, (4.16) ifadesine göre, ψ, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanına diktir.

Ayrıca, (4.14) denkleminde, Y ve Z üzerinden daraltma yapılırsa ve (4.15), (4.16) denklemleri kullanılırsa,

$$da(X) = 3aA(X) \tag{4.17}$$

koşulu elde edilir.

Bununla birlikte, (4.13) ve (4.17) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$aA(X) = 0 \tag{4.18}$$

sonucuna ulaşılır.

Bu durumda, a ilişkili skaleri sıfırdan farklı olduğundan, (4.18) denklemine göre, $A = 0$ olmak zorundadır. Bu ise, pseudo Ricci simetrik manifoldlar için A, 1-formunun sıfırdan farklı olması ile çelişmektedir. Benzer ispat, $n \neq 4$ durumu için de yapılabilir. O halde, bu manifoldun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda paralel vektör alanları olması mümkün değildir. Böylece, ispat tamamlanır. □

Teorem 4.1.5 (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu takdirde, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarının her ikisine birden dik olması için gerek ve yeter koşul, a ilişkili skalerinin sıfır olmasıdır.

İspat: (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldunun A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarına dik olduğu kabul edilsin. Bununla birlikte, $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik manifold için

$$\begin{aligned} dr(X) &= 2rA(X) + 2S(X,\rho), \\ dr(X) &= 2rA(X) - 2S(X,\rho) \end{aligned} \tag{4.19}$$

koşulları sağlanmaktadır, [14].

Bu durumda, (4.19) koşullarına göre, $S(X,\rho) = 0$ olduğundan, (3.134) ve (4.19) denklemleri yardımıyla,

$$aA(X) + b\phi(X)\phi(\rho) + c\psi(X)\psi(\rho) = 0 \tag{4.20}$$

bağıntısı elde edilir. A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarına dik olduğundan, $\phi(\rho)$ ve $\psi(\rho)$ ifadeleri sıfıra eşittir. Bu koşullar, (4.20) denkleminde göz önüne alınırsa,

$$a = 0 \tag{4.21}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine, (4.21) denklemi gerçekleniyorsa, (4.20) denklemi kullanılarak, b ve c manifoldun sıfırdan farklı ilişkili skalerleri olmak üzere,

$$b\phi(X)\phi(\rho) + c\psi(X)\psi(\rho) = 0 \tag{4.22}$$

koşulunun sağlanması gerektiği görülür.

Buna göre, (4.22) denkleminde, sırasıyla, $X = U$ ve $X = V$ alınırsa, $\phi(\rho)$ ve $\psi(\rho)$ ifadelerinin sıfır olması gerektiği bulunur. Bu takdirde, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarının her ikisine birden diktir. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.1.6 (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar gerçeklenir.

i. Manifoldun ilişkili skaleri $a \neq 0$ olmak üzere, r skaler eğriliği sabit ise, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarının her ikisine birden dik olması mümkün değildir.

ii. A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarının her ikisine birden dik olmadığı kabul edilsin. Bu durumda, manifoldun ilişkili skalerlerinin hepsinin birden sabit olması mümkün değildir.

İspat: (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldunun skaler eğriliği sabit ise, Teorem 4.1.1'e göre, $r = 0$ olmalıdır. Bu takdirde, (4.20) denklemi kullanılarak,

$$aA(X)+b\phi(X)\phi(\rho)+c\psi(X)\psi(\rho)=0 \tag{4.23}$$

bağıntısının sağlanması gerektiği görülür. Eğer A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarının her ikisine birden dik ise, $a \neq 0$ kabul edildiğinden, (4.23) denklemine göre, $A = 0$ olarak elde edilir. Bu ise, pseudo Ricci simetrik manifold için A, 1-formunun sıfırdan farklı olması ile çelişmektedir. O halde, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarının her ikisine birden dik olması mümkün değildir.

Öte yandan, (4.23) denkleminde, sırasıyla, $X=U$ ve $X=V$ alınırsa,

$$(a+b)A(U)=0, \tag{4.24}$$

$$(a+c)A(V)=0 \tag{4.25}$$

denklemleri elde edilir.

A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarının her ikisine birden dik olmadığı kabul edilsin. Bu takdirde, (4.24) ve (4.25) denklemleri yardımıyla, manifoldun ilişkili skalerlerinin

$$b=c=-a \tag{4.26}$$

bağıntısını sağlaması gerektiği görülür. Bu durumda, (3.137) denklemine göre, manifoldun skaler eğriliği

$$r=(n-2)a \tag{4.27}$$

şeklinde elde edilir.

Eğer a ilişkili skaleri sabit ise, (4.26) denklemine göre, b ve c ilişkili skalerleri de sabittir. Diğer taraftan, (4.27) denklemine göre, r skaler eğriliği sabittir. Bu durumda, Teorem 4.1.1'e göre, $r=0$ olmalıdır. Bununla birlikte, (4.26) denkleminden, $b=c=-a=0$ olmak zorundadır. Bu koşullar (3.134) denkleminde göz önünde bulundurulursa, Ricci tensörünün özdeş olarak sıfıra eşit olduğu çelişkisi elde edilir. O halde, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarının her ikisine birden dik değilse, manifoldun ilişkili skalerlerinin hepsinin birden sabit olması mümkün değildir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.1.7 (M,g), $n-$boyutlu pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, manifoldun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda $\phi(Ric)$ ve $\psi(Ric)$ vektör alanları olması mümkün değildir.

İspat: $G(QE)_n$ manifoldunun üreteçleri olan U ve V vektör alanları, sırasıyla, $\phi(Ric)$ ve $\psi(Ric)$ vektör alanları olsun. Bu durumda, Teorem 3.3.7'ye göre, U ve V paralel vektör alanlarıdır. Teorem 4.1.4'e göre ise, pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldunun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda paralel vektör alanları olamayacağı kanıtlanmıştır. O halde, bu manifoldun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda $\phi(Ric)$ ve $\psi(Ric)$ vektör alanları olması mümkün değildir.

Ayrıca, teoremin ispatı aşağıdaki şekilde de yapılabilir. $G(QE)_n$ manifoldunun üreteç vektör alanları birim vektör alanları olduğundan, Teorem 2.2.1'e göre, manifoldun skaler eğriliği sabittir. Bununla birlikte, hipoteze göre manifoldun Ricci tensörü ve skaler eğriliği, sırasıyla, (4.6) ve (4.27) bağıntılarını gerçekler. Diğer taraftan, manifoldun skaler eğriliği sabit olduğundan, Teorem 4.1.1'e göre, $r = 0$ olmak zorundadır. Bu takdirde, (4.27) denklemine göre, $a = 0$ olarak bulunur ve (4.6) denklemine göre, Ricci tensörünün özdeş olarak sıfır olması çelişkisi elde edilir. Böylece, teorem ispatlanmış olur. □

4.2 Hemen Hemen Pseudo Ricci Simetrik Manifoldlar

Bu kısım, hemen hemen pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu üzerindeki özel vektör alanlarıyla ilgili elde edilen sonuçlardan oluşmaktadır.

Tanım 4.2.1 ([15]) (M,g) $n-$boyutlu $(n > 3)$ düz olmayan bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için, M manifoldunun Ricci tensörü S, sıfırdan farklı olmak üzere,

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = [A(X)+B(X)]S(Y,Z)+A(Y)S(X,Z)+A(Z)S(Y,X) \tag{4.28}$$

koşulunu sağlıyorsa, M manifolduna, hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifold adı verilir. Burada, A ve B sıfırdan farklı 1-formlardır. Bu formlara, manifoldun ilişkili 1-formları denir ve $\forall\, X$ vektör alanı için

$$g(X,\rho) = A(X), \;\; g(X,\nu) = B(X) \tag{4.29}$$

dir. ρ ve ν vektör alanlarına, manifoldun temel vektör alanları denir. $n-$boyutlu bir hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifold $A(PRS)_n$ sembolü ile gösterilmektedir. $B = A$ ise, bu manifold, pseudo Ricci simetrik manifolda indirgenir.

Teorem 4.2.1 (M,g), $n-$boyutlu hemen hemen pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, manifoldun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda paralel vektör alanları olması mümkün değildir.

İspat: $G(QE)_n$ manifoldunun üreteç vektör alanlarının paralel vektör alanları olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\nabla_X U = 0$ ve $\nabla_X V = 0$ koşullarına göre, (4.6) denklemi elde edilir. Öte yandan, (4.28) denklemi kullanılırsa,

$$(\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_Y S)(X,Z) + (\nabla_Z S)(Y,X) = [3A(X) + B(X)]S(Y,Z) \\ + [3A(Y) + B(Y)]S(X,Z) + [3A(Z) + B(Z)]S(Y,X) \tag{4.30}$$

denklemi bulunur. Bununla birlikte, Teorem 4.1.4'de uygulanan yöntemler izlenerek, (4.8), (4.9), (4.10) ve (4.11) denklemlerinin de sağlanması gerektiği görülür. Benzer şekilde, $n \neq 4$ ise, (4.10) denklemine göre, a ilişkili skaleri sabit olmalıdır. O halde, (4.8) denklemine göre, $\nabla S = 0$ olarak elde edilir.

Diğer taraftan, $n = 4$ ve a ilişkili skaleri sabit değilse, (4.6) ve (4.8) denklemleri kullanılarak, (4.11) denklemi bulunur.

Eğer $n = 4$ ise, (4.11) ve (4.30) denklemleri kullanılırsa,

$$[3A(X) + B(X) - d(\ln|a|)(X)]S(Y,Z) + \\ [3A(Y) + B(Y) - d(\ln|a|)(Y)]S(X,Z) + \\ [3A(Z) + B(Z) - d(\ln|a|)(Z)]S(Y,X) = 0 \tag{4.31}$$

elde edilir.

Walker'ın Yardımcı Teoremi [40] ve (4.31) denklemi kullanılırsa,

$$3A(X) + B(X) = d(\ln|a|)(X) \tag{4.32}$$

bağıntısı bulunur.

Öte yandan, (4.6) ve (4.28) ifadeleri göz önüne alınırsa,

$$da(X)[g(Y,Z) - \phi(Y)\phi(Z) - \psi(Y)\psi(Z)] = [A(X) + B(X)]S(Y,Z) \\ + A(Y)S(X,Z) + A(Z)S(Y,X) \tag{4.33}$$

elde edilir.

Bu durumda, (4.33) denkleminde $Y = U$ alınırsa ve (3.135), (4.6) denklemleri kullanılırsa,

$$A(U)S(X,Z) = 0 \tag{4.34}$$

bulunur. Ricci tensörü sıfırdan farklı olduğundan, (4.34) denklemine göre,

$$A(U) = 0 \tag{4.35}$$

bağıntısı elde edilir. (4.35) denklemine göre, ϕ, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanına diktir.

Benzer şekilde, (4.33) denkleminde $Y = V$ alınırsa ve (3.135), (4.6) denklemleri kullanılırsa,

$$A(V) = 0 \tag{4.36}$$

bulunur. O halde, (4.36) ifadesine göre, ψ, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanına diktir.

Öte yandan, (4.33) denkleminde Y ve Z üzerinden daraltma yapılırsa ve (4.35), (4.36) denklemleri kullanılırsa

$$da(X) = a(2A(X) + B(X)) \tag{4.37}$$

bulunur.

Bununla birlikte, (4.32) ve (4.37) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$A(X) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise, hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifold için A, 1-formunun sıfırdan farklı olması ile çelişmektedir. Benzer ispat, $n \neq 4$ durumu için de yapılabilir. O halde, bu manifoldun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda paralel vektör alanları olması mümkün değildir ve ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.2.2 (M, g), ilişkili skalerleri sabit olan hemen hemen pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarına dik olması için gerek ve yeter koşul,

$$B(X) = -\frac{r+2a}{r}A(X)$$

bağıntısının mevcut olmasıdır.

İspat: (M,g), ilişkili skalerleri sabit olan hemen hemen pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olmak üzere, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarına dik olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (4.28) denkleminde Y ve Z üzerinden daraltma yapılırsa,

$$dr(X) = 0 = r[A(X) + B(X)] + 2S(X,\rho) \tag{4.38}$$

elde edilir.

(4.38) denkleminde (3.134) koşulu kullanılarak,

$$(r+2a)A(X) + rB(X) + 2b\phi(\rho)\phi(X) + 2c\psi(\rho)\psi(X) = 0 \tag{4.39}$$

bağıntısı bulunur.

Hipoteze göre, (4.39) denklemi,

$$(r+2a)A(X) + rB(X) = 0 \tag{4.40}$$

ifadesine indirgenir. Bu takdirde, r skaler eğriliği sıfırdan farklı olmak koşuluyla,

$$B(X) = -\frac{r+2a}{r}A(X) \tag{4.41}$$

bağıntısının gerçeklendiği görülür.

Tersine, (4.41) denklemi gerçeklenirse, (4.39) denklemi yardımıyla,

$$b\phi(X)\phi(\rho) + c\psi(X)\psi(\rho) = 0 \tag{4.42}$$

elde edilir.

(4.42) denkleminde, sırasıyla, $X = U$ ve $X = V$ alınırsa, b ve c ilişkili skalerleri sıfırdan farklı sabitler olduğundan, $\phi(\rho) = 0$ ve $\psi(\rho) = 0$ sonuçları bulunur. Bu durumda, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarına dik olması gerektiği görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 4.2.1 (M,g) ilişkili skalerleri sabit olan, hemen hemen pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olmak üzere, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarına dik olduğu kabul edilsin. Eğer M manifoldunun skaler eğriliği $r = -a$ ise, bu manifold, pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifolduna indirgenir.

İspat: İlişkili skalerleri sabit olan M manifoldunun, A, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, ϕ ve ψ, 1-formlarına karşılık gelen vektör alanlarına dik ve bu manifoldun skaler eğriliğinin $r = -a$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (4.41) denklemi kullanılırsa, $B = A$ sonucu elde edilir. O halde, bu manifold, pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifolduna indirgenir ve böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.2.3 (M, g), $n-$boyutlu hemen hemen pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldu olsun. Bu durumda, manifoldun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda $\phi(Ric)$ ve $\psi(Ric)$ vektör alanları olması mümkün değildir.

İspat: $G(QE)_n$ manifoldunun üreteçleri olan U ve V vektör alanları, sırasıyla, $\phi(Ric)$ ve $\psi(Ric)$ vektör alanları olsun. Bu durumda, Teorem 3.3.7'ye göre, U ve V paralel vektör alanlarıdır. Teorem 4.2.1'de, hemen hemen pseudo Ricci simetrik $G(QE)_n$ manifoldunun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda paralel vektör alanları olamayacağı kanıtlanmıştır. O halde, bu manifoldun üreteç vektör alanlarının aynı zamanda $\phi(Ric)$ ve $\psi(Ric)$ vektör alanları olması mümkün değildir. Böylece, ispat tamamlanır. □

5. FARKLI METRİK İŞARETİNE SAHİP 4−BOYUTLU MANİFOLDLAR

Bu bölümde, 4−boyutlu, $(+,+,-,-)$, $(+,+,+,-)$ ve $(+,+,+,+)$ metrik işaretli manifoldlar üzerinde ikinci mertebeden simetrik ve reküran olan tensör alanları incelenecektir. Bu problemde, ilk olarak kullanılan teknik, paralel ya da paralel olacak şekilde düzenlenebilen tensörlerin araştırılmasıdır. Daha sonra, bu kategoriye girmeyen tensörler belirlenecektir. Bu araştırma, ikinci mertebeden simetrik tensörlerin bu metrik işaretlere göre sınıflandırılması ve g metriğinin dolanım grubu göz önüne alınarak yapılacaktır. İkinci olarak, Ricci tensörünün paralel olma durumu ve Ricci-reküran problemleri incelenecektir. İkinci mertebeden simetrik tensör alanları için elde edilen sonuçlar, özel bir ikinci mertebeden simetrik tensör olan Ricci tensörüne uygulanacaktır.

M, g metriğine sahip 4−boyutlu, bağlantılı, düzgün bir manifold olsun. (M,g) manifoldunun düz olmadığı varsayılacaktır. M manifolduna ait bir m noktasındaki teğet uzay T_mM ve bu noktadaki 2−formların uzayı Λ_mM ile gösterilsin. $R^a{}_{bcd}$, S_{ab}, sırasıyla, Riemann eğrilik tensörünün ve Ricci tensörünün bileşenleridir ve $S_{ab} = R^c{}_{acb}$ olarak alınacaktır. $u,v \in T_mM$ vektörlerinin iç çarpımı $u.v$ olmak üzere, $< >$ sembolü üreteç kümesini, $\perp$ sembolü dik bütünleyeni ifade edecektir.

Tanım 5.0.2 ([28]) $F \in \Lambda_mM$ için,

$$F \to R^a{}_{bcd}F^{cd}$$

$F^{ab} = -F^{ba}$ şeklinde tanımlanan

$$f : \Lambda_mM \to \Lambda_mM \tag{5.1}$$

dönüşümüne eğrilik dönüşümü adı verilir.

5.1 Bir Tensör Alanının Reküran Olma Koşulu ve Geometrik Yorumu

Bu kısımda, reküran tensör alanları ve reküran vektör alanları ile ilgili birtakım geometrik özellikler verilecektir. Öncelikle, Tanım 2.2.2'de ve Tanım 3.2.3'de bahsedilen reküran olma koşulu hatırlatılacaktır. Ayrıca, reküranlığın geometrik yorumundan bahsedilecektir.

Tanım 5.1.1 T, M manifoldu üzerinde düzgün bir tensör alanı olsun. Eğer,

$$\nabla T = T \otimes P \tag{5.2}$$

koşulu sağlanıyorsa, T tensörüne reküran tensör alanı adı verilir. Burada, P, M manifoldu üzerinde düzgün bir 1-formdur.

Uyarı: M manifoldu üzerindeki T reküran tensör alanının, bu manifold üzerinde hiçbir yerde sıfır olmaması koşulu sağlanmak zorunda değildir. Hatta, T'nin sıfır olduğu durumlarda, bu sıfırların oluşturduğu küme, M manifoldunun kapalı bir alt kümesine sınırlandırılabilmektedir (manifold topolojisine göre bu alt kümenin içi boş kümedir). Bu durum aşağıdaki şekilde görülebilir.

T, reküran tensör alanı ve $\psi : M \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyon olsun. Bu takdirde, ψT ifadesinin kovaryant türevi alınırsa ve (5.2) koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\psi T) &= \nabla_X \psi \otimes T + \psi \nabla_X T \\
&= \nabla_X \psi \otimes T + \psi P(X) \otimes T \\
&= \left(\frac{\nabla_X \psi}{\psi} + P(X) \right) \otimes \psi T
\end{aligned} \tag{5.3}$$

elde edilir. O halde, (5.3) denklemine göre, ψT, reküran 1-formu $P + \nabla \log |\psi|$ olan reküran bir tensör alanıdır. ψ, M manifoldu üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklı olsun. Bununla birlikte, ψ'nin bir $V \subset M$ kapalı alt kümesinde sıfır olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, ψT tensör alanı V kümesi üzerinde sıfır olmalıdır. Bu sebepten dolayı, bu çalışmada, T tensör alanının M manifoldunun açık ve bağlantılı $U \neq \emptyset$ alt kümesi üzerinde sıfırdan farklı olduğu varsayılacaktır.

Reküran Olma Koşulunun Geometrik Yorumu: T tensör alanı, M manifoldu üzerinde reküran bir tensör alanı olsun. Bu takdirde, (5.2) denklemine göre, lokal koordinatlarda

$$\nabla_e T^{a \ldots b}_{c \ldots d} = T^{a \ldots b}_{c \ldots d} P_e \tag{5.4}$$

bağıntısı gerçeklenir. Öte yandan, $m, m' \in U$ ve U kümesinde parçalı düzgün

$$c : (a,b) \to M,\ m \to m'$$

eğrisi göz önüne alınsın. Bu eğrinin teğet vektörü, $\tau(t)$ olmak üzere ve $T'(t)$ ise, $c(t)$'de, $T(m)$'nin c eğrisi boyunca paralel kaydırılmasıyla meydana gelen tensör olsun. T, M üzerinde düzgün bir tensör alanı olmak üzere, $T(m)$'nin m' noktasına paralel kayması, genel olarak, $T(m')$ olmak zorunda değildir. Fakat, T tensörü reküran ise, T tensörünün m' noktasındaki değeri ile $T(m)$'nin m' noktasına paralel kaymasının değeri orantılıdır. Bu özellik aşağıdaki şekildedir.

$x, y, \ldots, z$, $T_{c(t)}M$ için bir baz olsun. Bu takdirde, α, T tensörünün bir bileşeni olmak üzere, (5.4) koşulu kullanılırsa,

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \alpha(P_a \tau^a)$$

denklemi bulunur. Buradan, c eğrisi boyunca

$$\alpha(t) = \alpha(m) e^{\int (P_a \tau^a)} \tag{5.5}$$

koşulunun sağlanması gerektiği elde edilir. Bu takdirde, (5.5) denklemine göre, her t için,

$$T(c(t)) = e^{\int (P_a \tau^a)} T'(c(t)) \tag{5.6}$$

sonucuna ulaşılır. m ve m' noktaları keyfi olduğundan, T reküran tensör alanı için şu özellik mevcuttur: $m, m' \in U$ ve U kümesi üzerinde $m \to m'$ parçalı düzgün c eğrisi göz önüne alınırsa, T tensörünün m' noktasındaki değeri, $T(m)$'nin c eğrisi boyunca m' noktasına paralel kayması ile orantılıdır. Bu oran, P, 1-formuna ve c eğrisine bağlıdır.

Tersine, U kümesi üzerinde yukarıda ifade edilen özelliğe sahip olan, sıfırdan farklı, düzgün bir T tensörü göz önüne alındığı takdirde, her $m, m' \in U$ ve $m \to m'$ parçalı düzgün c eğrisi için,

$$T(t) = \gamma(t) T'(t) \tag{5.7}$$

bağıntısı gerçeklenir. Burada, γ, c eğrisi üzerinde sıfırdan farklı, düzgün bir fonksiyondur ve T', $T(m)$'nin c eğrisi boyunca paralel kaymasını göstermektedir. Bu takdirde, c eğrisi boyunca yukarıda kullanılan $x, y, \ldots, z$ bazı göz önüne alınırsa, $\nabla_\tau T' = 0$ olduğundan, c eğrisi boyunca

$$\nabla_\tau T = \dot{\gamma} T' \tag{5.8}$$

denklemi gerçeklenmelidir. Burada, $\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ şeklindedir. Buna göre, m noktasında, lokal koordinatlarda, her $\tau(m)$ için,

$$\nabla_e T^{a\ldots b}_{c\ldots d} \tau^e = \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right) T^{a\ldots b}_{c\ldots d} \tag{5.9}$$

gerçeklenir. O halde, m noktası keyfi olduğundan, T tensörü reküran olmalıdır, [44].

Reküran tensör alanlarının sahip olduğu bu özellikten dolayı, U kümesi üzerinde reküran olan bir k vektör alanı için, $k.k$ iç çarpımının işareti U üzerinde değişmez.

Tanım 5.1.2 T tensör alanının M manifoldunun $U \neq \emptyset$ açık ve bağlantılı alt kümesi üzerinde reküran olduğu kabul edilsin. Eğer P, 1-formu, U üzerinde özdeş olarak sıfır ise, T tensör alanına paralel tensör adı verilir.

Yukarıda bahsedildiği üzere, eğer T tensörü paralel ise, geometrik olarak, T tensörünün m' noktasındaki değeri ile $T(m)$'nin c eğrisi boyunca m' noktasına paralel kaymasının değeri birbirine eşittir. T reküran tensörü için, U kümesi üzerinde ψT tensörü paralel olacak şekilde, sıfırdan farklı bir $\psi : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olduğu kabul edilirse ve (5.2) koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X(\psi T) = \nabla_X \psi \otimes T + \psi \nabla_X T \\ &= \nabla_X \psi \otimes T + \psi P(X) \otimes T = (\nabla_X \psi + \psi P(X)) \otimes T \end{aligned} \tag{5.10}$$

denklemi elde edilir. Buna göre, (5.10) denkleminden, $P = \nabla(-\log|\psi|)$ bulunur. O halde, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, bir gradiyent vektör alanıdır. Tersine, P gradiyent vektör alanı oluşturuyorsa, $P = \nabla\phi$ koşulu gerçeklenir. Diğer taraftan, bu koşul ve (5.2) yardımıyla,

$$\begin{aligned} \nabla_X(e^{-\phi}T) &= \nabla_X e^{-\phi} \otimes T + e^{-\phi}\nabla_X T \\ &= -e^{-\phi}\nabla_X \phi \otimes T + e^{-\phi}P(X) \otimes T \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

olarak elde edilir. (5.11) denklemine göre, $e^{-\phi}T$ tensör alanı U üzerinde paraleldir. (T reküran tensörün ilişkili 1-formu konusunda yapılmış bazı çalışmalar [45,46] numaralı kaynaklarda da mevcuttur.)

Yukarıda sözü edilen paralel tensör alanı ve gradiyent vektör alanı olma koşulları, “öz reküran” olma tanımını verme ihtiyacını doğurmaktadır. Bu tanımı verebilmek için, öncelikle U kümesi üzerinde sıfırdan farklı ve reküran olan bir k vektör alanı ile U üzerinde sıfırdan farklı, ikinci mertebeden simetrik ve reküran olan bir T tensör alanı göz önüne alınsın. k ve T'nin ilişkili 1-formları, sırasıyla, q ve P, ile gösterilsin. Bu durumda, (5.2) koşuluna göre, lokal koordinatlarda

$$\nabla_c k_a = k_a q_c \tag{5.12}$$

ve

$$\nabla_c T_{ab} = T_{ab} P_c \tag{5.13}$$

bağıntıları gerçeklenir.

Ayrıca, Ricci özdeşliği ve (5.12), (5.13) bağıntıları yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\nabla_c \nabla_b k_a - \nabla_b \nabla_c k_a \,(= k^d R_{dabc}) &= \nabla_c (k_a q_b) - \nabla_b (k_a q_c) \\
&= \nabla_c k_a q_b + k_a \nabla_c q_b - (\nabla_b k_a q_c + k_a \nabla_b q_c) \\
&= k_a q_c q_b + k_a \nabla_c q_b - k_a q_b q_c - k_a \nabla_b q_c \\
&= k_a \,(\nabla_c q_b - \nabla_b q_c)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

ve benzer şekilde,

$$\nabla_d \nabla_c T_{ab} - \nabla_c \nabla_d T_{ab} \,(= T_{ae} R^e{}_{bcd} + T_{be} R^e{}_{acd}) = T_{ab} \,(\nabla_d P_c - \nabla_c P_d) \tag{5.15}$$

denklemleri elde edilir.

Eğer U üzerinde,

$$k^d R_{dabc} = 0$$

koşulu gerçekleniyor ise, (5.14) denklemine göre,

$$\nabla_c q_b = \nabla_b q_c \tag{5.16}$$

şeklinde bulunur. O halde, (5.16) bağıntısına göre, q, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, $m \in U$ noktasının bir komşuluğu üzerinde bir gradiyent vektör alanıdır. Dolayısıyla, (5.11) denklemine göre, bu vektör alanı söz konusu komşuluk üzerinde paralel olacak şekilde düzenlenebilir. Benzer şekilde, U kümesi üzerinde,

$$T_{ae} R^e{}_{bcd} + T_{be} R^e{}_{acd} = 0$$

oluyorsa, (5.15) denklemine göre, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, bu komşuluk üzerinde bir gradiyent vektör alanıdır. Bu takdirde, T ikinci mertebeden simetrik tensörü, bu komşuluk üzerinde, paralel olacak şekilde düzenlenebilir. Bu durumda, “öz reküran” olma kavramı aşağıdaki şekilde verilecektir.

Tanım 5.1.3 Eğer, $\{m \in U : k^d R_{dabc}(m) \neq 0\}$ alt kümesi, U'da açık ve U'dan indirgenen alt uzay topolojisine göre yoğun ise, k vektör alanına, U kümesi üzerinde öz reküran vektör alanı adı verilir. Benzer şekilde, T ikinci mertebeden simetrik tensörü için $\{m \in U : (T_{ae}R^e{}_{bcd} + T_{be}R^e{}_{acd})(m) \neq 0\}$ alt kümesi, U'da açık ve U'dan indirgenen alt uzay topolojisine göre yoğun ise, T tensör alanına, U kümesi üzerinde öz reküran tensör alanı adı verilir.

Şimdi ise, U kümesi üzerinde sıfırdan farklı, k reküran bir vektör alanı göz önüne alınsın. Bu durumda, (5.2) koşuluna göre,

$$\nabla_b k^a = k^a q_b \tag{5.17}$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan, $m \in U$ noktasında, $k.k \neq 0$ olduğu kabul edilirse, $k.k$ iç çarpımı U üzerinde sıfırdan farklıdır. Bu takdirde, (5.17) reküran koşulu k_a ile çarpılırsa,

$$(\nabla_b k^a)k_a = \frac{1}{2}\nabla_b(k^a k_a) = (k^a k_a)q_b \tag{5.18}$$

denklemi bulunur. $k.k \neq 0$ olduğundan, (5.18) denklemi, $k^a k_a$ ile bölündüğü takdirde, q, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının $(\frac{1}{2})(log|k.k|)$ fonksiyonunun gradiyenti olduğu sonucuna varılır. O halde, k vektör alanı, U kümesi üzerinde paralel olacak şekilde düzenlenebilir. Bu durumda, yalnızca $k.k = 0$ koşulunu sağlayan ve *null vektör alanı* olarak isimlendirilen vektör alanlarının, öz reküran vektör alanı olabilme ihtimali vardır. Buna göre, eğer g metriği pozitif tanımlı bir metrik ise, herhangi bir reküran vektör alanı, lokal olarak, paralel olacak şekilde düzenlenebilmektedir.

Benzer şekilde, U kümesi üzerinde ikinci mertebeden simetrik, reküran olan T tensörü için, $T^{ab}T_{ab} \neq 0$ ise, T tensörü bu küme üzerinde paralel olacak şekilde düzenlenebilir. Benzer uygulamalar, kompleks reküran tensör alanları için de yapılabilmektedir.

Bütün bunlara ek olarak, U kümesi üzerinde sıfırdan farklı ve reküran olan bir k vektör alanı için (5.12) koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} k_{[c}\nabla_b k_{a]} &= \frac{1}{6}(k_c\nabla_b k_a + k_a\nabla_c k_b + k_b\nabla_a k_c - k_a\nabla_b k_c - k_b\nabla_c k_a - k_c\nabla_a k_b) \\ &= \frac{1}{6}(k_c k_a q_b + k_a k_b q_c + k_b k_c q_a - k_a k_c q_b - k_b k_a q_c - k_c k_b q_a) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

olarak bulunur. (5.19) denklemine göre, k vektör alanı *hiperyüzey dik* olma koşulunu sağlar. Başka bir deyişle, $m \in U$ noktasının açık bir V komşuluğunda $k \neq 0$ olmak üzere, bu küme üzerinde tanımlı olan uygun ξ ve ϕ fonksiyonları için

$$k_a = \xi \, \partial_a \phi \tag{5.20}$$

koşulu sağlanır. Burada, ∂_a, x^a'ya göre kısmi türevi göstermektedir. Öte yandan, (5.20) koşulu kullanıldığı takdirde, $k' = \xi^{-1} k$ ve $q' = q - \nabla(\log|\xi|)$ olmak üzere,

$$\nabla_b \, k'_a = k'_a q'_b \tag{5.21}$$

bağıntısı gerçeklenir. O halde, k' vektör alanı V üzerinde bir reküran vektör alanıdır. Bununla birlikte, tanıma göre k' bir gradiyent vektör alanı olduğundan,

$$\nabla_b \, k'_a = \nabla_a \, k'_b \tag{5.22}$$

koşulu sağlanır. (5.21) ve (5.22) denklemleri göz önüne alındığı takdirde, q' ve k' vektör alanlarının orantılı olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu durumda, (5.21) koşuluna göre, μ, V kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\nabla_b \, k'_a = \mu k'_a k'_b \tag{5.23}$$

olarak elde edilir. O halde, (5.23) denklemine göre lokal olarak, reküran bir vektör alanının ilişkili vektör alanı, söz konusu reküran vektör alanı ile orantılı olacak şekilde düzenlenebilir.

5.2 $(+,+,-,-)$ İşaretine Sahip $4-$Boyutlu Manifoldlar

Bu kısımda, $4-$boyutlu düzgün ve bağlantılı M manifoldu üzerindeki g metriğinin $(+,+,-,-)$ işaretli olması halinde, bu çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 5.2.1 $k \in T_mM$ sıfırdan farklı teğet vektör olmak üzere, k vektörüne $k.k > 0$ ise uzaysal; $k.k < 0$ ise zamansal ve $k.k = 0$ ise null vektör adı verilir.

Öte yandan, $m \in M$ noktasında aşağıdaki şekilde verilen standart bazlar göz önüne alınacaktır. İlk olarak, x,y,s,t; $m \in M$ noktasında *ortonormal baz* olmak üzere,

$$x.x = y.y = -s.s = -t.t = 1 \tag{5.24}$$

koşulları gerçeklenmektedir.

Diğer taraftan, $\sqrt{2}l = x+t$, $\sqrt{2}n = x-t$, $\sqrt{2}L = y+s$ ve $\sqrt{2}N = y-s$ olarak tanımlansın. Bu durumda, l,n,L,N null vektörlerdir. Söz konusu null vektörler arasındaki sıfırdan farklı olan iç çarpımlar yalnızca,

$$l.n = L.N = 1 \tag{5.25}$$

çarpımlarından ibarettir. Bu şekilde tanımlanan l,n,L,N bazına, $m \in M$ noktasındaki *null baz* adı verilir. Bu bazlara göre, g metriği için tamlık bağıntıları,

$$g_{ab} = x_a x_b + y_a y_b - s_a s_b - t_a t_b \tag{5.26}$$

ve

$$g_{ab} = l_a n_b + n_a l_b + L_a N_b + N_a L_b \tag{5.27}$$

şeklinde verilir.

Tanım 5.2.2 V, T_mM teğet uzayının $2-$boyutlu bir alt uzayı olsun. V uzayının sıfırdan farklı bütün elemanları uzaysal (ya da zamansal) ise, V uzayına uzaysal $2-$uzay denir. Eğer V uzayı tam olarak iki tane null $1-$boyutlu alt uzay içeriyorsa, V uzayına zamansal $2-$uzay; bu uzay yanlızca bir tane null doğrultu içeriyorsa null $2-$uzay adı verilir. Sıfırdan farklı bütün elemanları null olan $2-$uzaya tamamen null $2-$uzay denir.

Tamamen null $2-$uzayın meydana gelebilmesi için, g metriğinin en az iki artı ve en az iki eksi işareti içermesi gerekmektedir. Dolayısıyla, $4-$boyutlu bir manifold söz konusu ise, yalnızca $(+,+,-,-)$ nötr işaret için bu durum mümkün olabilmektedir.

Tanım 5.2.3 (M,g) $4-$boyutlu bir manifold ve F, $m \in M$ noktasında (2,0) tipinden anti-simetrik bir tensör olsun. F, $2-$formu bivektör olarak adlandırılır. Bu formun bileşenleri F^{ab} ile gösterilsin. Bu durumda, F anti-simetrik olduğundan, F'e karşılık gelen matrisin rankı çift sayı olmalıdır. Eğer bu rank 2 ise, F formuna basit bivektör, rank 4'e eşit ise, F formuna basit olmayan bivektör adı verilir. Herhangi bir basit bivektör, $u,v \in T_mM$ olmak üzere,

$$F^{ab} = u^a v^b - v^a u^b \tag{5.28}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, u ve v vektörleri tarafından gerilen $2-$uzay tek türlü belirlidir ve bu uzaya, F formunun blade'i denir ve $u \wedge v$ şeklinde gösterilir.

Şimdi, $m \in M$ noktasındaki bütün $2-$formların uzayı, $\Lambda_m M$ ile gösterilsin. Bu küme üzerinde, her $F,G \in \Lambda_m M$ için,

$$P(F,G) = P_{abcd}F^{ab}G^{cd} = F^{ab}G_{ab}, \quad P_{abcd} = \frac{1}{2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \tag{5.29}$$

şeklinde tanımlanan bir P metriği mevcuttur.

F basit bivektörünün blade'i sırasıyla, uzaysal, zamansal, null ya da tamamen null ise, bu bivektör uzaysal, zamansal, null ya da tamamen null olarak adlandırılacaktır.

Örnek 5.2.1 $F = x \wedge y$ olsun. Bu durumda, Tanım 5.2.3'e göre, F bivektörü basittir ve

$$F_{ab} = x_a y_b - y_a x_b \tag{5.30}$$

olarak yazılır. Böylece, (5.24) ve (5.30) denklemleri kullanılarak,

$$P(F,F) = F^{ab}F_{ab} = (x^a y^b - y^a x^b)(x_a y_b - y_a x_b) = 2 \tag{5.31}$$

bulunur. O halde, (5.31) denkleminden, F, uzaysal bivektör olarak elde edilir. Benzer şekilde, $s \wedge t$ uzaysal bivektör örneği olarak verilebilir. Diğer taraftan, $G = l \wedge n$ olarak alınsın. Bu takdirde, G bivektörü basittir ve

$$G_{ab} = l_a n_b - n_a l_b \tag{5.32}$$

olarak yazılır. (5.25) ve (5.32) denklemleri kullanıldığı takdirde,

$$P(G,G) = G^{ab}G_{ab} = (l^a n^b - n^a l^b)(l_a n_b - n_a l_b) = -2 \tag{5.33}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, (5.33) denkleminden, G, zamansal bivektör olarak elde edilir. Daha sonra, $H = l \wedge y$ basit bivektörü göz önüne alınırsa,

$$P(H,H) = H^{ab}H_{ab} = (l^a y^b - y^a l^b)(l_a y_b - y_a l_b) = 0 \tag{5.34}$$

olarak bulunur. O halde, (5.34) denkleminden, H bivektörünün null olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde, $l \wedge s$ null bivektör olmalıdır. Son olarak, $J = l \wedge L$ bivektörü göz önüne alınırsa, $P(J,J) = 0$ koşulu gerçeklenir. Ayrıca, l ve L birbirine dik olan null vektörler olduğundan, J bivektörü, tamamen null olan bir bivektördür.

Diğer taraftan, $\Lambda_m M$, $6-$boyutlu vektör uzayı matrislerin komütatörü altında bir Lie cebri oluşturur. Bu komütatör $[\quad]$ sembolü ile gösterilecektir. Bu cebrin $3-$boyutlu iki özel alt cebri, $\overset{+}{S}_m = \{F : F = \overset{*}{F}\}$ ve $\overset{-}{S}_m = \{F : F = -\overset{*}{F}\}$ olarak verilir. Burada, $F \in \Lambda_m M$ ve "$*$" ile Hodge eşleklik operatörü gösterilmektedir. $\overset{+}{F} \in \overset{+}{S}_m$ ve $\overset{-}{F} \in \overset{-}{S}_m$ olmak üzere, $F \in \Lambda_m M$ bivektörü,

$$F = \overset{+}{F} + \overset{-}{F}$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. Bununla birlikte, $\overset{+}{F}$ ve $\overset{-}{F}$ için $[\overset{+}{F}, \overset{-}{F}] = 0$ koşulu gerçeklenir. Bu durumda,

$$\Lambda_m M = \overset{+}{S}_m \oplus \overset{-}{S}_m$$

olarak bulunur.

Öte yandan, $\widetilde{S_m} = \overset{+}{S}_m \cup \overset{-}{S}_m$ olsun. Bu takdirde, $F \in \widetilde{S_m}$ ise, F basit olmayan bivektördür veya basit ve tamamen null olan bir bivektördür. F, basit bivektör ise, $\overset{*}{F}$ da basittir. l,n,L,N null baz olmak üzere, $\alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N) \in \widetilde{S_m}$ olması için gerek ve yeter koşul, $\alpha = \pm\beta$ $(\alpha \neq 0)$ olmasıdır. Eğer,

$$(x \wedge y)^* = s \wedge t, \quad (x \wedge t)^* = s \wedge y \quad \text{ve} \quad (x \wedge s)^* = y \wedge t \tag{5.35}$$

yönlendirmesi seçilirse, bu durumda, $l \wedge n - L \wedge N \in \overset{+}{S}_m$ ve $l \wedge n + L \wedge N \in \overset{-}{S}_m$ olarak bulunur. Bunlara ek olarak, $l \wedge N, n \wedge L \in \overset{+}{S}_m$ ve $l \wedge L, n \wedge N \in \overset{-}{S}_m$ şeklindedir, [35]. Ayrıca, $\overset{+}{S}_m$ Lie cebri $2-$boyutlu $\overset{+}{B} = < l \wedge n - L \wedge N, l \wedge N >$ alt cebrini içerir.

Yardımcı Teorem 5.2.1 ([28]) $F \in \Lambda_m M$ ve $F \neq 0$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

i. k sıfırdan farklı, 1-form olmak üzere, $F_{[ab}k_{c]} = 0$ koşulunun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul, F bivektörünün basit bivektör ve k'nın, F bivektörünün blade'i içinde olmasıdır.

ii. F, 2-formunun basit bivektör olması için gerek ve yeter koşul, $F_{a[b}F_{cd]} = 0$ koşulunun sağlanmasıdır.

5.3 Dolanım Teorisi

Bu kısımda, çalışmanın temel araçlarından biri olan dolanım teorisi kavramı ele alınacaktır. İlk olarak, (M,g) manifoldunun dolanım grubu tanımı verilecektir ve $4-$boyutlu, $(+,+,-,-)$ metrik işaretli manifoldların dolanım tiplerinden bahsedilecektir. (Dolanım grubu ile ilgili ayrıntılı bilgi [47] numaralı kaynakta mevcuttur.)

Tanım 5.3.1 $m \in M$ ve c, m noktasında kapalı ve düzgün bir eğri olsun. $T_m M$ uzayındaki teğet vektörlerin c kapalı eğrisi boyunca paralel kayması, $T_m M$ üzerinde bir lineer izomorfizma oluşturur. Bu izomorfizma f_c ile gösterilsin ve eğrilerin birleşmesi ve ters çevrilmesi için, sırasıyla, $f_{c_1} \circ f_{c_2} = f_{c_1 \cdot c_2}$ ve $f_c^{-1} = f_{c^{-1}}$ tanımları kullanılsın. Bu dönüşümlerin kolleksiyonuna, (M,g) manifoldunun (başka bir deyişle, g metriğinin ∇, Levi-Civita konneksiyonunun) m noktasındaki dolanım grubu adı verilir ve bu grup Φ_m ile gösterilir.

M manifoldu bağlantılı ve dolayısıyla yol bağlantılı olduğundan, her $m, m' \in M$ için, bu noktalar arasında parçalı düzgün bir eğri vardır. O halde, m noktasındaki dolanım grubu olan Φ_m ve m' noktasındaki dolanım grubu olan $\Phi_{m'}$ eşleniktir ve böylece dolanım grupları izomorfiktir. Buna göre, (M,g) manifoldunun Φ ile gösterilecek olan dolanım grubu söz konusudur. Φ dolanım grubu bir Lie grubudur. Bu grubun Lie cebri ϕ ile gösterilsin. M manifoldunun $4-$boyutlu bir manifold ve bu manifold üzerindeki g metriğinin $(+,+,-,-)$ işaretli olması durumunda, g metriği paralel kayma altında invaryanttır ve ϕ cebri, $o(2,2)$ ortogonal cebrinin bir alt cebridir. Öte yandan, $\varepsilon=$diag$(1,1,-1,-1)$ ve T matris transpozesini göstermek üzere, $o(2,2)$ cebri

$$\Omega=\{A\in M_4\mathbb{R}:(A\varepsilon)+(A\varepsilon)^T=0\}$$

kümesi ile temsil edilebilir. Bu takdirde, ϕ cebrinin *bivektör temsili* bulunur. Söz konusu dolanım cebirlerinin bivektör temsili [29, 35] numaralı kaynaklarda incelenmiştir. Bu alt cebirlerden bazıları metrik konneksiyona olanak vermemektedir (veya vermeyebilir). Bu çalışmada, [35] numaralı kaynakta yer alan ve metrik konneksiyona olanak veren alt cebirler göz önüne alınacaktır. Buna göre, $4-$boyutlu, nötr metrik işaretli manifoldlar için, izomorfizmalardan vazgeçildiği takdirde, mümkün olan bütün dolanım cebirleri aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Çizelge 5.1 : $(+,+,-,-)$ metriğinin dolanım cebirleri.

Tip	Boyut	Baz
$1(a)$	1	$l\wedge n$
$1(b)$	1	$x\wedge y$
$1(c)$	1	$l\wedge y$ veya $l\wedge s$
$1(d)$	1	$l\wedge L$
$2(a)$	2	$l\wedge n-L\wedge N, l\wedge N(=\overset{+}{B})$
$2(b)$	2	$l\wedge n, L\wedge N$
$2(c)$	2	$l\wedge n-L\wedge N, l\wedge L+n\wedge N$
$2(d)$	2	$l\wedge n-L\wedge N, l\wedge L$
$2(e)$	2	$x\wedge y, s\wedge t$
$2(f)$	2	$l\wedge N+n\wedge L, l\wedge L$
$2(g)$	2	$l\wedge N, l\wedge L$
$2(h)$	2	$l\wedge N, \alpha(l\wedge n)+\beta(L\wedge N)$
$2(j)$	2	$l\wedge N, \alpha(l\wedge n-L\wedge N)+\beta(l\wedge L)$
$2(k)$	2	$l\wedge y, l\wedge n$ veya $l\wedge s, l\wedge n$
$3(a)$	3	$l\wedge n, l\wedge N, L\wedge N$
$3(b)$	3	$l\wedge n-L\wedge N, l\wedge N, l\wedge L$
$3(c)$	3	$x\wedge y, x\wedge t, y\wedge t$ veya $x\wedge s, x\wedge t, s\wedge t$
$3(d)$	3	$l\wedge N, l\wedge L, \alpha(l\wedge n)+\beta(L\wedge N)$
$4(a)$	4	$\overset{+}{S}, l\wedge n+L\wedge N$
$4(b)$	4	$\overset{+}{S}, l\wedge L+n\wedge N$
$4(c)$	4	$\overset{+}{B}, \overset{-}{B}=<l\wedge L, l\wedge N, l\wedge n, L\wedge N>$
5	5	$\overset{+}{S}, \overset{-}{B}$
6	6	$o(2,2)$

Burada, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ve $2(j)$ dolanım tipi için $\alpha\neq 0\neq\beta$, $2(h)$ ve $3(d)$ tipleri için $\alpha\neq\pm\beta$ bağıntıları mevcuttur. Ayrıca, $\overset{+}{S}$, $o(1,2)$ cebrini ve $\overset{+}{B}$, $\overset{-}{B}$, sırasıyla, $<l\wedge n-L\wedge N, l\wedge N>$, $<l\wedge n+L\wedge N, l\wedge L>$ $2-$boyutlu cebirlerini göstermektedir.

Not 5.3.1 Dolanım grubu kavramına ek olarak, $m \in M$ noktasında iyi tanımlı olan kavramlardan biri de, bu noktada Φ_m^* ile gösterilen lokal dolanım grubudur, [47]. (U,g)'nin m noktasındaki lokal dolanım grubu, M manifoldunun boştan farklı, açık ve bağlantılı olan bir U komşuluğunun (alt manifoldunun), g metriğinden kısıtlanan metrik ile birlikte oluşturduğu dolanım grubudur. Bu çalışmada, manifoldun her noktası için, bir noktadaki lokal dolanım grubunun, M manifoldunun söz konusu noktadaki kısıtlanmış dolanım grubuna izomorfik olduğu kabul edilecektir. Böylece, Φ_m^* ile M manifoldundan kısıtlanan dolanım grubunun boyutları aynıdır ve dolayısıyla, bu grup aynı ϕ, Lie cebrine sahip olacaktır. Bu varsayımda bulunulmasının nedeni, M manifoldu üzerindeki lokal dolanım özelliklerinin homojenliğinin sağlanmasıdır. Bunun sonucu olarak ve (M,g) manifoldunun düz olmadığı varsayımı ile, Riemann eğrilik tensörünün, M manifoldunun boştan farklı, açık bir alt kümesi üzerinde özdeş olarak sıfır olmasının mümkün olamayacağı elde edilmiş olur.

Şimdi de, bu çalışma açısından temel bir teorem olan Ambrose-Singer Teoremi'nden [48] bahsedilecektir.

$m, m' \in M$ ve c:$m \to m'$ diferansiyellenebilir parçalı bir eğri olsun. $\tau_c : T_mM \to T_{m'}M$, c eğrisi boyunca paralel kayma ile tanımlanan lineer dönüşüm olsun.

Teorem 5.3.1 (Ambrose-Singer Teoremi [28,48]) M bağlantılı, yantıkız ve düzgün bir manifold ve Γ, bu manifold üzerinde simetrik ve düzgün bir konneksiyon olsun. Γ konneksiyonu ile ilişkilendirilen eğrilik yapısı $\tilde{R}$ ile gösterilsin ve $m \in M$ olsun. Her $m' \in M$ ve c, $m \to m'$ parçalı eğrisi ve her $X,Y,Z \in T_mM$ için,

$$f(Z) = \tau_c^{-1}\left[\tilde{R}(\tau_c(X),\tau_c(Y))\tau_c(Z)\right] \tag{5.36}$$

şeklinde tanımlanan $f : T_mM \to T_mM$ lineer dönüşümü tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan bütün lineer dönüşümlerin kümesi, T_mM teğet uzayının bir bazına göre matris formunda temsil edilir. Bu takdirde, M manifoldunun Φ dolanım grubu, söz konusu baza göre, $GL(n,\mathbb{R})$ genel lineer grubunun bir matris Lie alt grubu olarak tanımlandığında, bu küme, ϕ dolanım cebrinin matris temsiline karşılık gelir.

Burada, *genel lineer grup* olarak isimlendirilen $GL(n,\mathbb{R})$, $n \times n$'lik tekil olmayan reel matrislerin oluşturduğu grubu göstermektedir. Bu grup, n^2 boyutlu bir Lie grubudur, [28].

Başka bir deyişle, Teorem 5.3.1, aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir. M manifoldu üzerinde belirli bir m noktası ve herhangi bir $m' \in M$ noktası için, Tanım 5.0.2, (5.1) ile tanımlanan f eğrilik dönüşümünün rg$f$ ile gösterilecek olan değer kümesi hesaplansın. $c : m' \to m$ eğrisi boyunca, rg$f$'in m noktasına paralel kayması göz önüne alınarak, bu işlem tüm m' noktaları ve c eğrileri için yapılırsa, m noktasında elde edilen bivektörlerin kolleksiyonu, ϕ cebrini üretir. Buna göre, eğrilik dönüşümünün değer kümesi olan rg$f$, ϕ cebrinin bir alt uzayıdır ve böylece, Riemann eğrilik tensörü, ϕ cebrinin elemanlarının çarpımlarının simetrik toplamı olarak yazılabilmektedir. Bu sonuç, Bölüm 5.6'da ele alınacak olan Ricci-reküran probleminde temel olarak kullanılacaktır.

Şimdi verilecek olan sonuç, $4-$boyutlu farklı metrik işaretli manifoldların dolanım tiplerine göre reküran veya paralel olan özel vektör alanlarını belirlemeyi sağlayacak olması sebebiyle önem teşkil etmektedir.

Sonuç 5.3.1 ([28,30,49]) Her $F \in \phi$ için, $k \in T_mM$, F bivektörünün bir özvektörü ise, m noktasının bir komşuluğu üzerinde, lokal ve düzgün olan bir reküran vektör alanı vardır. Buna ilaveten, her bivektör için, k özvektörüne karşılık gelen özdeğerlerin hepsi sıfır ise, bu reküran vektör alanı, paralel vektör alanı olacak şekilde inşa edilebilir.

O halde, Sonuç 5.3.1'e göre, $4-$boyutlu $(+,+,-,-)$ metrik işaretli manifoldlar için reküran ve paralel vektör alanlarının varlığı, Çizelge 5.1'in üçüncü sütununda görülebilmektedir. Bölüm 5.5'te bu özel vektör alanları ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

5.4 $(+,+,-,-)$ İşaretine Sahip $4-$Boyutlu Manifoldlar Üzerinde İkinci Mertebeden Simetrik Tensörler

Bu kısımda, ikinci mertebeden simetrik tensör alanlarının $4-$boyutlu, $(+,+,-,-)$ işaretli manifoldlar üzerinde sınıflandırılmasından bahsedilecektir. Ayrıca, metrik işaretin $(+,+,+,+)$ (pozitif tanımlı) ve $(+,+,+,-)$ (Lorentz) olması durumları için de, bazı bilgiler verilecektir. T, $m \in M$ noktasında, ikinci mertebeden simetrik bir tensör olsun. Bu durumda, T tensörü lineer bir dönüşüm ile ilişkilendirilebilir. T_mM üzerinde, $u^a \to T^a{}_b u^b$ ile verilen $f : T_mM \to T_mM$ lineer dönüşümü göz önüne alınsın ve k, T tensörünün reel veya kompleks olan bir özvektörü olsun. Bu takdirde, α, k

özvektörüne karşılık gelen özdeğer olmak üzere,

$$T^a{}_b k^b = \alpha k^a, \quad (T_{ab}k^b = \alpha g_{ab}k^b) \tag{5.37}$$

koşulu gerçeklenir.

İkinci mertebeden simetrik olan tensörlerin 4−boyutlu, $(+,+,-,-)$ işaretli manifoldlar üzerinde sınıflandırılması [50–52] numaralı kaynaklarda yapılmıştır. Bu sınıflandırma, Bölüm 5.7'de göz önüne alınacak olan 4−boyutlu, $(+,+,+,-)$ işaretli manifoldlar üzerindeki sınıflandırmaya benzemektedir. Bununla birlikte, söz konusu sınıflandırma, 4−boyutlu nötr işaretli manifoldlar için birbirine dik olan null vektör alanlarının ve birbirine dik, zamansal 2−uzay çiftlerinin varlığı sebebiyle biraz daha karmaşıktır. Bu çalışmada, [51] numaralı kaynakta ele alınan sınıflandırma kullanılacaktır. Bu sınıflandırma, f, lineer dönüşümünün mümkün olan bütün Jordan kanonik formlarının belirlenmesine göre yapılmıştır. Bu kanonik formlara karşılık gelen Segre tipleri göz önüne alınacaktır.

İlk olarak, T ikinci mertebeden simetrik tensörünün bütün özdeğerlerinin reel olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, mümkün olan bütün Jordan kanonik formları,

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} \rho_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} \rho_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} \rho_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{pmatrix} \rho_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix} \quad \text{(v)} \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

olarak verilir. Burada, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \mathbb{R}$'dir. Segre notasyonuna göre, (5.38) ile verilen matrislere karşılık gelen Segre tipleri, sırasıyla, $\{4\}$, $\{22\}$, $\{31\}$, $\{211\}$ ve $\{1111\}$ şeklindedir. Dejenere olan özdeğerler parantez ile belirtilecektir. Örneğin, (5.38)−(iv) matrisi için $\rho_2 = \rho_3 \neq \rho_1$ ise, Segre tipi $\{2(11)\}$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ ise, Segre tipi $\{(211)\}$ olarak gösterilecektir.

Eğer g metriği pozitif tanımlı ise, T tensörü $\mathbb{R}$ üzerinde köşegenleştirilebilirdir. Bununla birlikte, g metriğinin Lorentz veya nötr işaretli olması durumunda, T tensörünün özdeğerlerinin hepsi reel olmak zorunda değildir. Öte yandan, $\{4\}$ ve $\{22\}$ Segre tipleri $\det g_{ab} \geq 0$ olmasını gerektirir. 4−boyutlu Lorentz metrik işaretine sahip olan manifoldlar için bu koşul sağlanmadığından, bu manifoldlar üzerindeki ikinci mertebeden simetrik tensörler için, $\{4\}$ ve $\{22\}$ Segre tiplerinin meydana gelmesi mümkün değildir. Bu metrik işaretinde T tensörü için mümkün olan Segre tipleri, $\{1,111\}$, $\{211\}$, $\{31\}$, $\{z\bar{z}11\}$ ve bu tiplerin dejenere durumlarından oluşmaktadır. Burada, $\{1,111\}$ tipinde yer alan virgül işareti, zamansal özvektöre karşılık gelen özdeğeri, uzaysal özvektörlere karşılık gelen özdeğerlerden ayırt etmek için kullanılacaktır. $\{z\bar{z}11\}$ Segre tipindeki z ve $\bar{z}$ ise, T tensörünün kompleks eşlenik özvektör çiftinin olması durumunu gösterecektir. Öte yandan, $4-$boyutlu nötr metrik işaretli manifoldlar üzerindeki ikinci mertebeden simetrik olan tensörler için mümkün olan Segre tipleri $\{1111\}$, $\{11z\bar{z}\}$, $\{z\bar{z}w\bar{w}\}$, $\{211\}$, $\{2z\bar{z}\}$, $\{22\}$ (özdeğerlerin reel olması durumu), $\{22\}$ (özdeğerlerin kompleks olması durumu), $\{31\}$, $\{4\}$ ve bu tiplerin mümkün olan dejenere durumlarından oluşmaktadır, [51].

Buna göre, $4-$boyutlu, $(+,+,-,-)$ işaretli M manifoldu üzerindeki T, ikinci mertebeden simetrik tensörü için mümkün olan bütün kanonik tipler aşağıda yer alan (5.39)$-$(5.48) ifadelerinde belirtilmiştir, [51].

$$\alpha x_a x_b + \beta y_a y_b - \gamma s_a s_b - \delta t_a t_b. \tag{5.39}$$

$$\alpha y_a y_b - \beta s_a s_b + \gamma(l_a n_b + n_a l_b) + \delta(l_a l_b - n_a n_b). \tag{5.40}$$

$$\alpha(l_a n_b + n_a l_b) + \beta(l_a l_b - n_a n_b) + \gamma(L_a N_b + N_a L_b) + \delta(L_a L_b - N_a N_b). \tag{5.41}$$

$$\alpha g_{ab} + \beta(l_a N_b + N_a l_b - n_a L_b - L_a n_b). \tag{5.42}$$

$$\alpha(l_a n_b + n_a l_b) + \lambda l_a l_b + \beta y_a y_b - \gamma s_a s_b. \tag{5.43}$$

$$\alpha(l_a n_b + n_a l_b) + \lambda l_a l_b + \gamma(L_a N_b + N_a L_b) + \delta(L_a L_b - N_a N_b). \tag{5.44}$$

$$\alpha(l_a n_b + n_a l_b) + \beta(L_a N_b + N_a L_b) + \mu l_a l_b + \nu L_a L_b + \omega(l_a L_b + L_a l_b). \tag{5.45}$$

$$\alpha g_{ab} + \omega(l_a L_b + L_a l_b) + \mu l_a l_b + \beta(l_a N_b + N_a l_b - n_a L_b - L_a n_b). \tag{5.46}$$

$$\alpha(l_a n_b + n_a l_b) + (l_a y_b + y_a l_b) + \alpha y_a y_b - \beta s_a s_b. \tag{5.47}$$

$$\alpha g_{ab} + (l_a L_b + L_a l_b + \nu N_a N_b). \tag{5.48}$$

Şimdi ise, bu kanonik formların elde edilişinden bahsedilecektir. İlk olarak, T tensörünün $\mathbb{R}$ üzerinde köşegenleştirilebilir olduğu kabul edilsin ve x,y,s,t; $m \in M$ noktasında bir (pseudo)-ortonormal baz olsun. Bu takdirde, T tensörünün null olmayan ve birbirine dik olan x,y,s,t reel özvektörleri seçilebilmektedir. Bu özvektörlere karşılık gelen reel özdeğerler, sırasıyla, α, β, γ, δ ile gösterilsin. O halde, (5.39) kanonik formu elde edilir ve T tensörünün Segre tipi $\{1111\}$ olmalıdır. Öte yandan, T tensörünün $\mathbb{C}$ üzerinde köşegenleştirilebilir olduğu kabul edilsin. Böylece, iki durum söz konusu olmaktadır. Birinci durum, T tensörünün iki reel ve iki kompleks eşlenik özdeğerinin olmasıdır. Bu durumda, T tensörünün reel özvektörleri y ve s, kompleks eşlenik özvektörleri $l \pm in$ olarak seçilebilir. Bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerler, sırasıyla, α, β ve $\gamma \pm i\delta$ $(\delta \neq 0)$ ile gösterilsin. Dolayısıyla, (5.40) kanonik formu elde edilir ve T tensörünün Segre tipi $\{11z\bar{z}\}$ olmalıdır. Gerçekten, (5.24), (5.25) denklemleri ve (5.40) kanonik formu kullanılırsa,

$$T_{ab}l^b = \gamma l_a - \delta n_a\ , \quad T_{ab}n^b = \gamma n_a + \delta l_a\ , \quad T_{ab}y^b = \alpha y_a\ , \quad T_{ab}s^b = \beta s_a \tag{5.49}$$

şeklinde elde edilir. (5.49) bağıntılarının son ikisine göre, T tensörünün y ve s özvektörlerine karşılık gelen reel özdeğerlerinin, sırasıyla, α ve β olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, $(5.49)_1$ ve $(5.49)_2$ bağıntıları yardımıyla,

$$T_{ab}(l^b + in^b) = \gamma l_a - \delta n_a + i(\gamma n_a + \delta l_a) = (\gamma + i\delta)(l_a + in_a) \tag{5.50}$$

ve

$$T_{ab}(l^b - in^b) = \gamma l_a - \delta n_a - i(\gamma n_a + \delta l_a) = (\gamma - i\delta)(l_a - in_a) \tag{5.51}$$

bulunur. O halde, (5.50) ve (5.51) denklemlerine göre, T tensörünün $l \pm in$ kompleks eşlenik özvektör çiftine karşılık gelen özdeğerleri $\gamma \pm i\delta$ $(\delta \neq 0)$ olarak elde edilir.

İkinci durum ise, iki kompleks eşlenik özvektör çiftinin bulunmasıdır. Bu durumda, (5.41) kanonik formu elde edilir ve T tensörünün Segre tipi $\{z\bar{z}w\bar{w}\}$ olmalıdır. Böylece, (5.24), (5.25) denklemleri ve (5.41) kanonik formu göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} T_{ab}l^b &= \alpha l_a - \beta n_a\ , \quad T_{ab}n^b = \alpha n_a + \beta l_a\ , \\ T_{ab}L^b &= \gamma L_a - \delta N_a\ , \quad T_{ab}N^b = \gamma N_a + \delta L_a \end{aligned} \tag{5.52}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre, (5.52) bağıntıları kullanılırsa, T tensörünün $l \pm in$ ve $L \pm iN$ kompleks eşlenik özvektör çiftlerine karşılık gelen özdeğerlerinin, sırasıyla, $\alpha \pm i\beta$ ve $\gamma \pm i\delta$ $(\beta \neq 0 \neq \delta)$ olduğu görülmektedir. Öte yandan, bu durum için, kompleks özdeğerlerin dejenere olması ihtimali de mümkündür. Örneğin, $\alpha = \gamma$ ve $\beta = \delta$ ise, özdeğerlerin dejenere olma durumu söz konusudur. Bu takdirde, Segre tipi

$\{(zz)(\bar{z}\bar{z})\}$ şeklinde yazılacaktır. $l+in$ ve $L+iN$ özvektörleri tarafından üretilen $\alpha+i\beta$ özuzayı, tam olarak birbirinden bağımsız ve null olan $(l\mp N)+i(n\pm L)$ kompleks elemanlarını içermektedir. Baz değişimi yardımıyla, söz konusu kompleks eşlenik null özvektörler $l\pm iL$ şeklinde gösterilebilir ve böylece, (5.42) kanonik formu elde edilir. Gerçekten, (5.42) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T_{ab}l^b &= \alpha l_a - \beta L_a\,, \quad T_{ab}n^b = \alpha n_a + \beta N_a\,, \\ T_{ab}L^b &= \alpha L_a + \beta l_a\,, \quad T_{ab}N^b = \alpha N_a - \beta n_a \end{aligned} \tag{5.53}$$

elde edilir. Bu ifadelerden,

$$\begin{aligned} T_{ab}(l^b \pm iL^b) &= (\alpha \pm i\beta)(l_a \pm iL_a) \\ T_{ab}(n^b \pm iN^b) &= (\alpha \mp i\beta)(n_a \pm iN_a) \end{aligned} \tag{5.54}$$

bulunur. O halde, T tensörünün $l+iL$ ve $n-iN$ kompleks özvektörlerine karşılık gelen özdeğerinin $\alpha+i\beta$; $l-iL$ ve $n+iN$ kompleks özvektörlerine karşılık gelen özdeğerinin $\alpha-i\beta$ olduğu görülmektedir.

Bunun dışında, basit olmayan elemanter bölenlerin olması durumu söz konusu olabilir, [28]. Eğer reel ve ikinci dereceden basit olmayan bir elemanter bölen meydana geliyorsa, $\{211\}$ Segre tipi elde edilir. Bu durumda, l özvektörü tarafından üretilen, tek türlü belirli bir null doğrultu ile null olmayan y ve s özvektörleri mevcuttur ve $\lambda\neq 0$ olmak üzere, (5.43) kanonik formu bulunur. Böylece, (5.43) formuna göre,

$$T_{ab}l^b = \alpha l_a\,, \quad T_{ab}y^b = \beta y_a\,, \quad T_{ab}s^b = \gamma s_a \tag{5.55}$$

koşulları gerçeklenmektedir. O halde, (5.55) bağıntılarına göre, T tensörünün l, y ve s özvektörlerine karşılık gelen özdeğerleri, sırasıyla, α, β ve γ olarak bulunur. Ayrıca, bu özvektörlerin dışında, T tensörünün lineer bağımsız olan başka özvektörlere sahip olamayacağı kolayca gösterilebilir. Buna göre, $\{211\}$ Segre tipi elde edilmiş olur. Bunlara ek olarak, l null vektörü tekrar düzenlenerek, (5.43) kanonik formunda, $\lambda=1$ veya $\lambda=-1$ olarak alınabilmektedir, [51]. Öte yandan, ikinci dereceden basit olmayan elemanter bölene karşılık gelen (reel ve null olan) l özvektörü ile kompleks eşlenik özvektör çifti meydana geliyorsa, bu takdirde, Segre tipi $\{2z\bar{z}\}$ olarak gösterilir ve (5.44) kanonik formu elde edilir. Bu durumda, kompleks eşlenik özvektör çifti ile ilişkilendirilen zamansal $2-$uzay, tek türlü belirli olan l null doğrultusuna diktir ve bu

2−uzay, $L \wedge N$ olarak seçilebilir. l, n, L, N null bazı göz önüne alınarak, (5.44) kanonik formu yardımıyla,

$$T_{ab} l^b = \alpha l_a \ , \quad T_{ab} L^b = \gamma L_a - \delta N_a \ , \quad T_{ab} N^b = \gamma N_a + \delta L_a \tag{5.56}$$

bağıntıları elde edilir. Buna göre, (5.56) denkleminden, T tensörünün özvektörleri l ve $L \pm iN$ olarak elde edilir. Bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerler, sırasıyla, α ve $\gamma \pm i\delta$ $(\delta \neq 0)$ olarak bulunur. Benzer şekilde, T'nin l null vektörü dışında reel özvektörü olamayacağı gösterilebilir. Ayrıca, (5.44) kanonik formunda, (5.43) kanonik formunda olduğu gibi, $\lambda = 1$ veya $\lambda = -1$ olarak düzenlenebilir.

Daha önce bahsedildiği üzere, 4−boyutlu, nötr metrik işaretli manifoldlar üzerindeki ikinci mertebeden simetrik tensörler için, $\{22\}$ Segre tipinin meydana gelme durumu da söz konusudur. Eğer özvektörler reel ise, (5.45) kanonik formu, ikinci dereceden basit olmayan elemanter bölene karşılık gelen kompleks özdeğer olması durumu söz konusu ise, (5.46) kanonik formu elde edilir. Yukarıdaki adımlara benzer şekilde, (5.45) kanonik formu göz önüne alındığı takdirde, T tensörünün özvektörleri, l ve L şeklinde elde edilir. Bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerler, sırasıyla, α ve β olarak bulunur. Bütün bunlara ek olarak, eğer $\alpha \neq \beta$ ise, $\omega = 0$ ve $\mu \neq 0 \neq \nu$ olacak şekilde düzenlenebilir. Ayrıca, $\alpha = \beta$ ise, $\mu = \nu = 0 \neq \omega$ veya $\omega = 0 < \mu\nu$ olacak şekilde düzenlenebilir. Böylece, $\alpha = \beta$ ve $\omega^2 = \mu.\nu$ olması durumunda, $\{(211)\}$ Segre tipi elde edilir, [51]. Diğer taraftan, (5.46) kanonik formu göz önüne alınırsa, T tensörünün kompleks özvektör çiftinin $l \pm iL$ ve bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerlerin $\alpha \pm i\beta$ $(\beta \neq 0)$ olması gerektiği gösterilebilir.

Eğer reel ve üçüncü dereceden basit olmayan elemanter bölen meydana geliyorsa, $\{31\}$ Segre tipi söz konusudur ve (5.47) kanonik formu elde edilir. Bu durumda, (5.47) formu kullanılırsa,

$$T_{ab} l^b = \alpha l_a \ , \quad T_{ab} s^b = \beta s_a \tag{5.57}$$

olarak bulunur. Bu takdirde, (5.57) denkleminden, l vektörü tarafından üretilen tek türlü belirli null doğrultu ile null olmayan, s reel vektörünün T tensörünün, sırasıyla, α ve β özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Ayrıca, T tensörünün null olmayan reel özvektörü y olacak şekilde de (5.47) kanonik formu düzenlenebilir. Bunun için, söz konusu kanonik formda, s ve y vektörlerinin birbirleriyle yer değiştirmesi ve son iki terimde işaret değişimi yapılması yeterli olacaktır.

Son olarak, l vektörü tarafından üretilen (tek türlü belirli) null doğrultudan meydana gelen dördüncü dereceden basit olmayan elemanter bölen durumu söz konusu ise, Segre tipi $\{4\}$ olmalıdır ve (5.48) kanonik formu elde edilir. Burada,

$$T_{ab}l^b = \alpha l_a$$

koşulu sağlandığından, T tensörünün özvektörü yalnızca l (reel) özvektörüdür ve α, bu özvektöre karşılık gelen özdeğerdir. Öte yandan, $\nu = \pm 1$ olacak şekilde seçilebilir, [51].

Daha önce açıklandığı üzere, yukarıda ifade edilen Segre tipleri için, özdeğerler arasındaki dejenere olma durumu parantez ile belirtilecektir. Bununla birlikte, $\{2z\bar{z}\}$, $\{22\}$ (kompleks eşlenik özdeğer çifti olması durumu) ve $\{4\}$ Segre tipleri için dejenere özdeğerler olması mümkün değildir. Fakat, $\{22\}$ Segre tipinin reel özvektörler olması durumu için dejenere özdeğerler söz konusu olabilir. Bu durumda, Segre tipi $\{(22)\}$ olarak gösterilecektir.

Şimdi de, ikinci mertebeden, simetrik olan T tensörünün M manifoldunun U alt kümesi üzerinde reküran bir tensör alanı olduğu kabul edilsin. Bu tensör alanının reküran 1-formu P ile gösterilsin. Ayrıca, $m, m' \in U$ ve U kümesi üzerinde $c{:}m \to m'$ düzgün eğrisi göz önüne alınsın. Öte yandan, $k \neq 0$ $(k \in T_mM)$, $T(m)$'nin $\alpha \in \mathbb{C}$ özdeğerine karşılık gelen reel ya da kompleks olan bir özvektörü olsun. Bu takdirde, m noktasında,

$$T^a{}_b k^b = \alpha k^a \tag{5.58}$$

koşulu gerçeklenir. k ve $T(m)$'nin, c eğrisi boyunca paralel kayması, sırasıyla, $k'(t)$ ve $T'(t)$ ile gösterilsin. Buna ek olarak, α özdeğerinin c eğrisi boyunca paralel kaymasına karşılık gelen ve bu eğri boyunca sabit olan bir α fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda, $T'^a{}_b k'^b - \alpha k'^a$ paralel kayması m noktasında sıfır olmalıdır. Dolayısıyla, c eğrisi üzerindeki her nokta için,

$$T'^a{}_b k'^b = \alpha k'^a \tag{5.59}$$

koşulu sağlanmış olur. Bölüm 5.1'de açıklandığı üzere, T tensörü reküran olduğundan, c eğrisinin her noktası için, $T(c(t))$ ile $T'(c(t))$ orantılıdır. O halde, c eğrisinin her noktası için, k' vektörü T tensörünün özvektörüdür. Dolayısıyla, tüm reel veya kompleks olan özuzaylarının, c eğrisi boyunca paralel kaydığı sonucuna ulaşılır. Buna göre, T tensörünün Segre tipi (dejenere özdeğer olma durumu da dahil olmak üzere), c eğrisinin her noktası için değişmez kalır. Diğer taraftan, U kümesi bağlantılı ve böylece yol bağlantılı olduğundan, T tensörünün Segre tipi U kümesinin her noktasında aynıdır, [44]. Bu durumda, her Segre tipi ve her $m \in U$ için, m noktasının açık bir $V \subset U$ komşuluğu üzerinde, (5.39)$-$(5.48) ifadeleri geçerli olacak şekilde, düzgün olan bir ortonormal veya null baz takımı seçilebilir. Böylece, tüm vektör alanları, özdeğerler ile birlikte kanonik formlarda yer alan μ, ν ve ω skalerleri, V kümesi üzerinde düzgün olacak şekilde seçilebilmektedir, [53].

5.5 Temel Sonuçlar

Bu kısımda, Segre sınıflandırması yardımıyla, ikinci mertebeden simetrik tensör alanlarının paralel ve öz reküran olma problemleri göz önüne alınacaktır. Bu inceleme, 4$-$boyutlu, nötr işaretli manifoldların dolanım tipleri üzerinde yapılacaktır ve bu durumda, T reküran tensör alanının P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının gradiyent olması durumları belirlenecektir. Böylece, paralel tensör alanları veya paralel bir tensör alanı ile orantılı olan tensör alanları elde edilecektir. Daha sonra, öz reküran tensör alanı olmaya aday olan, ikinci mertebeden, simetrik tensörler bulunarak söz konusu durumlar analiz edilecektir.

5.5.1 Paralel olma durumu

Bölüm 5.1'de, T reküran tensör alanının P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, bir gradiyent vektör alanı ise, bu tensörün paralel olacak şekilde düzenlenebileceğinden bahsedilmiştir. Aşağıda ispatlanacak olan teorem, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının gradiyent olma durumunun tespit edilmesi açısından önem taşımaktadır.

Yardımcı Teorem 5.5.1 T, M manifoldu (veya M'nin boş olmayan açık ve bağlantılı bir U alt kümesi) üzerinde ikinci mertebeden, simetrik ve reküran bir tensör alanı olsun. Bu tensörün reküran 1-formu olarak tanımlanan, P, T tensörünün lokal, düzgün, reel veya kompleks bir özvektörü olarak bulunan, k ve bu özvektöre karşılık gelen (reel veya kompleks olan) özdeğer de, α olmak üzere, α özdeğeri, $V \neq \emptyset$ ve $V \subset U$ açık ve bağlantılı alt kümesi üzerinde sıfırdan farklı ise, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, V kümesi üzerinde bir gradiyent vektör alanıdır.

İspat: k, T tensörünün α özdeğerine karşılık gelen lokal, düzgün, reel veya kompleks bir özvektörü olsun. Bu takdirde, lokal koordinatlarda,

$$T_{ab}k^b = \alpha k_a \tag{5.60}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İlk olarak, α özdeğerinin reel olmadığı kabul edilsin. Bu durumda, α, V kümesi üzerinde sıfırdan farklıdır. O halde, k özvektörü için iki durum söz konusu olur. Birinci durum, α özdeğerinin dejenere olmaması halidir. Bu takdirde, T tensörü için mümkün olabilecek Segre tipleri, $\{11z\bar{z}\}$ (veya bu tip için reel özdeğerlerin dejenere olması durumu), $\{z\bar{z}w\bar{w}\}$ $(z \neq \pm w)$, $\{2z\bar{z}\}$ veya $\{22\}$ (kompleks özdeğerlerin olması durumu) şeklindedir. İkinci durum ise, α kompleks özdeğerinin dejenere olması halidir. Bu takdirde, Bölüm 5.4'den, kompleks eşlenik null özvektörleri mevcut olan T tensörünün Segre tipi $\{(zz)(\bar{z}\bar{z})\}$ olmalıdır. Her iki durumda da, her $m \in V$ ve V kümesi üzerinde bu noktadan geçen herhangi bir c eğrisi için, $k(m)$'nin bu eğri boyunca paralel kayması, T tensörünün $\alpha-$özuzayında yer almaktadır ve bu değer, c eğrisi üzerindeki her noktada k ile orantılıdır. Bu sonuç, α özdeğerinin birinci durum için, dejenere olmamasından ve ikinci durum için, null özvektöre karşılık gelen özdeğer olmasından kaynaklanmaktadır. Çünkü ikinci durumda, k özvektörü null olduğundan, paralel kayma altında bu özvektörün null olma özelliği korunacaktır. O halde, Bölüm 5.1'de verilen reküran olma koşuluna göre, k özvektörünün V kümesi üzerinde reküran olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu durumda, q, V kümesi üzerinde 1-form olmak üzere,

$$\nabla_b k_a = k_a q_b \tag{5.61}$$

koşulu gerçeklenir. Diğer taraftan, T tensörü reküran olduğundan (5.13) bağıntısı mevcuttur. (5.60) koşulunun kovaryant türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_c(T_{ab}k^b) &= \nabla_c(\alpha k_a) \\ (\nabla_c T_{ab})k^b + T_{ab}\nabla_c k^b &= (\partial_c \alpha)k_a + \alpha \nabla_c k_a \end{aligned} \tag{5.62}$$

bulunur. Daha sonra, (5.13) ve (5.61) denklemleri, (5.62) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
P_c T_{ab} k^b + T_{ab} q_c k^b &= (\partial_c \alpha) k_a + \alpha q_c k_a \\
\alpha k_a P_c + \alpha k_a q_c &= k_a \partial_c \alpha + \alpha k_a q_c \\
\alpha k_a P_c &= k_a \partial_c \alpha
\end{aligned} \tag{5.63}
$$

elde edilir. Böylece, (5.63) denklemine göre, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, V kümesi üzerinde $\log|\alpha|$ fonksiyonunun gradiyentidir.

Fakat, T tensörünün bütün özdeğerlerinin reel olması durumunda yukarıdaki ispat geçerli olmayabilir. Bu durumda, $T^a{}_c T^c{}_b$ ifadesinin izi olan $T^{ab}T_{ab}$ göz önüne alınırsa, söz konusu iz, T tensörünün özdeğerlerinin karelerinin toplamına karşılık gelmektedir. Böylece, (5.13) reküran olma koşulunda T^{ab} üzerinden daraltma yapılırsa,

$$
T_{ab} T^{ab} P_c = (\nabla_c T_{ab}) T^{ab} = \frac{1}{2} \nabla_c (T_{ab} T^{ab}) \tag{5.64}
$$

bulunur. Bununla birlikte, $T^{ab}T_{ab} \neq 0$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, (5.64) denkleminden, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının, $\psi = \frac{1}{2}\log|T^{ab}T_{ab}|$ fonksiyonunun bir gradiyenti olduğu sonucuna ulaşılır. O halde, T tensörünün α özdeğerinin reel ve sıfırdan farklı olması durumunda da, $T^{ab}T_{ab} \neq 0$ koşulu sağlanacağından, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, V kümesi üzerinde bir gradiyent vektör alanı olarak elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır. □

Yardımcı Teorem 5.5.1'e göre, ikinci mertebeden simetrik ve reküran T tensörünün en az bir özdeğerinin sıfırdan farklı olması durumunda, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı bir gradiyent vektör alanı olacağından, (5.11) denklemine göre, T tensörü paralel olacak şekilde düzenlenebilir. Başka bir deyişle, T tensörü paralel bir tensör alanı ile orantılıdır. Bu durumda, yalnızca T tensörünün bütün özdeğerlerinin reel ve sıfır olması durumunda, bu tensörün öz reküran tensör alanı olabilmesi mümkündür. O halde, öz reküranlık için kontrol edilmesi gereken Segre tipleri, tüm özdeğerler sıfır olmak koşuluyla, $\{(211)\}$, $\{(22)\}$, $\{(31)\}$, $\{4\}$ şeklindedir.

Şimdi, $\nabla T = 0$ koşulunu sağlayan, yani, paralel olan T tensör alanlarının mümkün olan bütün Segre tipleri bulunacaktır. Bunun için, dolanım teorisinden ve [28, 30, 49] kaynaklardaki tekniklerden faydalanılacaktır. Çizelge 5.1'de verilen her dolanım cebri için, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan, ikinci mertebeden simetrik ve düzgün h tensörleri aşağıdaki teknik ile belirlenecektir. Eğer ϕ cebri biliniyor ise, her $F \in \phi$ için,

$$h_{ac}F^{c}{}_{b} + h_{bc}F^{c}{}_{a} = 0 \tag{5.65}$$

denklemi cebirsel olarak çözülebilmektedir, [28, 30, 35, 49]. Buna göre, F bivektörü için, $F_{ab} = -F_{ba}$ olduğundan, $h = g$ olması durumu (5.65) denkleminin bir çözümüdür. Aşağıda ifade edilecek olan teorem, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan h tensörlerinin elde edilmesinde kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 5.5.2 ([35]) $F \in \Lambda_m M$ ve $F \neq 0$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

i. Eğer (5.65) denklemi, m noktasında, basit bir F bivektörü için gerçekleniyorsa, F bivektörünün blade'i, h tensörünün m noktasında g metriğine göre özuzayıdır.

ii. Eğer (5.65) denklemi, m noktasında, $F = \alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N)$ ve $\alpha \neq \pm\beta$ ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$) için gerçekleniyorsa, $l \wedge n$ ve $L \wedge N$ uzayları, h tensörünün m noktasındaki özuzaylarıdır.

iii. Eğer (5.65) denklemi, m noktasında, $F = \alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N)$ ve $\alpha = -\beta \neq 0$ için gerçekleniyorsa, $l \wedge N$ ve $n \wedge L$ uzayları, h tensörünün m noktasındaki invaryant $2-$uzaylarıdır ($\alpha = \beta \neq 0$ olması durumunda da benzer sonuç gerçeklenir).

Şimdi ise, yukarıda ifade edilen bilgilerden yararlanarak, ikinci mertebeden simetrik h tensörü için, $m \in M$ noktasının bir komşuluğu üzerinde, $\nabla h = 0$ denkleminin çözümleri bulunacaktır. Daha önce belirtildiği gibi, uygun kısıtlamaları sağlayan M manifoldunun açık ve bağlantılı $U \neq \emptyset$ kümesi üzerinde çalışılacaktır. Ayrıca, U kümesi üzerinde ekstra çözümlerin olabilmesi ihtimalini önlemek açısından, Not 5.3.1'de belirtildiği gibi, her $m \in M$ için, Φ_m^* lokal dolanım gruplarının dolanım cebirlerinin, Φ grubunun dolanım cebirleri ile aynı olduğu kabul edilecektir. Böylece, $\nabla h = 0$ denkleminin çözümleri aşağıda yer almaktadır.

1) İlk olarak, $1(a)$ dolanım tipi göz önüne alınsın. Çizelge 5.1'e göre, $F = l \wedge n$ olarak alınan bivektörü, ϕ cebri için bir baz oluşturmaktadır. Bu durumda, F bivektörü lokal koordinatlarda,

$$F_{ab} = l_a n_b - n_a l_b \tag{5.66}$$

şeklinde yazılmaktadır. Bu durumda, (5.66) denklemi, sırasıyla, L^b, N^b, l^b ve n^b ile çarpılırsa ve (5.25) koşulları kullanılırsa,

$$F_{ab}L^b = F_{ab}N^b = 0 \tag{5.67}$$

ve

$$F_{ab}l^b = l_a,\; F_{ab}n^b = -n_a \tag{5.68}$$

koşullarının sağlanması gerektiği elde edilir. Böylece, (5.67) bağıntısına göre, L ve N vektör alanları, F bivektörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir. Benzer şekilde, (5.68) koşulu, l ve n vektör alanlarının, F bivektörünün, sırasıyla, 1 ve -1 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri olduğunu gösterebilir. Diğer taraftan, Bölüm 5.4'ün son kısmında belirtildiği üzere, $m \in M$ noktasındaki, l, n, L, N null bazının, bu noktanın açık ve bağlantılı olan bir U komşuluğuna düzgün olarak genişletilmesi mümkündür. Bu takdirde, Sonuç 5.3.1'e göre, L ve N null vektör alanları, F bivektörünün sıfır özdeğerine karşılık geldiğinden, bu vektör alanları U kümesi üzerinde paraleldir. Başka bir deyişle,

$$\nabla L = \nabla N = 0 \tag{5.69}$$

koşulları gerçeklenir. Bununla birlikte, Sonuç 5.3.1'e göre, l ve n null vektör alanları, U kümesi üzerinde öz reküran vektör alanları olmalıdır. O halde, r ve s, sırasıyla, l ve n null vektör alanlarına karşılık gelen ilişkili 1-formlar olmak üzere,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b, \quad \nabla_b n_a = n_a s_b \tag{5.70}$$

koşulları sağlanır.

Diğer taraftan, $\alpha : U \to \mathbb{R}$ sıfırdan farklı fonksiyonu için, Riemann eğrilik tensörü U kümesi üzerinde,

$$R_{abcd} = \alpha F_{ab}F_{cd} = \alpha(l_a n_b - n_a l_b)(l_c n_d - n_c l_d) \tag{5.71}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu takdirde, (5.71) denklemi, sırasıyla, l^a ve n^a ile çarpılırsa ve (5.25) denklemi kullanılırsa,

$$l^a R_{abcd} = -\alpha l_b F_{cd}, \quad n^a R_{abcd} = \alpha n_b F_{cd} \tag{5.72}$$

bağıntıları elde edilir. Ayrıca, (5.25) denklemindeki $l^a n_a = 1$ koşulunun kovaryant türevi alınırsa ve bu koşulla birlikte (5.70) reküran olma bağıntıları kullanılırsa,

$$\nabla_b(l^a n_a) = (\nabla_b l^a)n_a + l^a \nabla_b n_a = (l^a r_b)n_a + l^a(n_a s_b) = r_b + s_b = 0 \tag{5.73}$$

bulunur. O halde, (5.73) denklemine göre, l ve n, öz reküran vektör alanlarının ilişkili 1-formları arasında $r = -s$ bağıntısının sağlanması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu bağıntının sağlanması gerektiği aşağıdaki yöntemle de görülebilmektedir. Ricci özdeşliği ve (5.70) koşulu yardımıyla, $G_{ab} = \nabla_b r_a - \nabla_a r_b$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} l^a R_{abcd} &= \nabla_d \nabla_c l_b - \nabla_c \nabla_d l_b = \nabla_d(r_c l_b) - \nabla_c(r_d l_b) \\ &= (\nabla_d r_c) l_b + r_c \nabla_d l_b - (\nabla_c r_d) l_b - r_d \nabla_c l_b \\ &= (\nabla_d r_c) l_b + l_b r_c r_d - (\nabla_c r_d) l_b - l_b r_c r_d \\ &= l_b(\nabla_d r_c - \nabla_c r_d) \\ &= l_b G_{cd} \end{aligned} \tag{5.74}$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde, (5.70) koşulu kullanılarak, n vektör alanı için, $H_{ab} = \nabla_b s_a - \nabla_a s_b$ olmak üzere,

$$n^a R_{abcd} = n_b H_{cd} \tag{5.75}$$

bağıntısının gerçeklenmesi gerektiği görülür. Bu durumda, (5.72), (5.74) ve (5.75) denklemleri kullanılırsa,

$$G_{ab} = \nabla_b r_a - \nabla_a r_b = -\alpha F_{ab}, \quad H_{ab} = \nabla_b s_a - \nabla_a s_b = \alpha F_{ab} \tag{5.76}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, (5.76) bağıntılarından, $G = -H$ olarak elde edilir. Bu ise, $r+s$ formuna karşılık gelen vektör alanının, gradiyent vektör alanı olması anlamına gelmektedir. O halde, ψ, U kümesi üzerinde bir fonksiyon olmak üzere, $r + s = \nabla\psi$ bağıntısı mevcuttur. Bununla birlikte, l veya n vektör alanlarından birinin aşağıda verilen yeniden düzenlenişi göz önüne alınırsa, $r + s = 0$ olarak yazılabilmektedir. Örneğin, $l' = e^{-\psi} l$ olsun. Bu takdirde, $r + s = \nabla\psi$ ve (5.70) koşulları yardımıyla,

$$\begin{aligned} \nabla_b l'_a &= \nabla_b(e^{-\psi} l_a) = -(\nabla_b \psi) e^{-\psi} l_a + e^{-\psi} \nabla_b l_a \\ &= -(r_b + s_b) e^{-\psi} l_a + e^{-\psi} l_a r_b \\ &= -e^{-\psi} l_a s_b \\ &= -l'_a s_b \end{aligned} \tag{5.77}$$

sonucuna ulaşılır. O halde, l', ilişkili 1-formu $-s$ olan reküran bir vektör alanıdır. Böylece, l vektör alanı yeniden düzenlendiğinde, ilişkili 1-formlar arasında $r = -s$ bağıntısı gerçeklenmiş olur (bu duruma benzer bir yaklaşım [54] numaralı kaynakta da incelenmiştir). Böylece, yukarıdaki her iki ispatta da, l ve n öz reküran vektör alanlarının ilişkili 1-formlarının birbirinin ters işaretlisi olduğu sonucu elde edilmiştir. Göz önüne alınan öz reküran vektör alanları birbirine dik olduğu takdirde, bu ispatlardan ikincisini kullanmak faydalı olacaktır. Çünkü, böyle bir durum söz konusu olduğunda, birinci ispat yöntemi geçerli olamamaktadır.

Diğer taraftan, bu dolanım tipi için, $\nabla h = 0$ denkleminin çözümü ele alınsın. Bu takdirde, F bivektörü basit olduğundan, Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $l \wedge n$ uzayı, h tensörünün özuzayıdır. O halde, $l \wedge n$ uzayı, h tensörünün invaryant $2-$uzayıdır. Dolayısıyla, $l \wedge n$, $2-$uzayının dik bileşeni olan $L \wedge N$, $2-$uzayı da h tensörünün invaryant $2-$uzayı olmalıdır. Bununla birlikte, l, n, L, N; m noktasında bir null baz oluşturmak üzere, h ikinci mertebeden simetrik tensörü

$$\begin{aligned} h_{ab} = S^1 l_a l_b + S^2(l_a n_b + n_a l_b) + S^3 n_a n_b + S^4(l_a L_b + L_a l_b) \\ + S^5(l_a N_b + N_a l_b) + S^6(n_a L_b + L_a n_b) + S^7(n_a N_b + N_a n_b) \\ + S^8 L_a L_b + S^9 N_a N_b + S^{10}(L_a N_b + N_a L_b) \end{aligned} \tag{5.78}$$

olarak yazılabilir. Burada, $S^1, ..., S^{10} \in \mathbb{R}$ şeklindedir. $l \wedge n$, h tensörünün özuzayı olduğundan, λ bu özvektörlere karşılık gelen özdeğer olmak üzere,

$$h_{ab} l^b = \lambda l_a, \quad h_{ab} n^b = \lambda n_a \tag{5.79}$$

bağıntıları gerçeklenir. (5.78) ifadesi, sırasıyla, l^b ve n^b ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} h_{ab} l^b &= S^2 l_a + S^3 n_a + S^6 L_a + S^7 N_a, \\ h_{ab} n^b &= S^1 l_a + S^2 n_a + S^4 L_a + S^5 N_a \end{aligned} \tag{5.80}$$

olarak bulunur. Bu takdirde, (5.79) ve (5.80) bağıntıları göz önüne alınırsa, $S^2 = \lambda$, $S^1 = S^3 = S^4 = S^5 = S^6 = S^7 = 0$ olarak elde edilir. Bu sonuçlar (5.78) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$h_{ab} = \lambda(l_a n_b + n_a l_b) + S^8 L_a L_b + S^9 N_a N_b + S^{10}(L_a N_b + N_a L_b) \tag{5.81}$$

olarak bulunur. Buna göre, (5.81) ifadesinde, (5.27) tamlık bağıntısı kullanılırsa ve katsayılar düzenlenirse, U kümesi üzerindeki a, b, c, d düzgün reel fonksiyonları için,

h tensörü

$$h_{ab} = ag_{ab} + bL_aL_b + cN_aN_b + d(L_aN_b + N_aL_b) \tag{5.82}$$

şeklinde elde edilir. Böylece, $\nabla h = 0$ denklemi ile (5.69), (5.82) bağıntıları göz önüne alınırsa, a, b, c, d katsayılarının U üzerinde sabit olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu durumda, (5.39)$-$(5.48) ifadeleri ve a, b, c, d sabitlerinin uygun seçimi altında h tensörü için mümkün olan bütün Segre tipleri elde edilir. (5.82) ifadesine göre,

$$\begin{aligned} &h_{ab}l^b = al_a, \quad h_{ab}n^b = an_a \\ &h_{ab}L^b = (a+d)L_a + cN_a, \quad h_{ab}N^b = (a+d)N_a + bL_a \end{aligned} \tag{5.83}$$

bulunur. Bu durumda, $a \neq 0$ ve $b = c = d = 0$ olarak alınırsa (yani h tensörü metrik tensörün bir katı ise), l, n, L ve N özvektörlerine karşılık gelen özdeğerlerin eşit olduğu görülür. O halde, h tensörünün Segre tipi $\{(1111)\}$ olarak elde edilir. Diğer taraftan, $b = c = d \neq 0$ olması durumunda,

$$\begin{aligned} &h_{ab}l^b = al_a, \quad h_{ab}n^b = an_a, \quad h_{ab}(L^b - N^b) = a(L_a - N_a) \\ &h_{ab}(L^b + N^b) = (a+2b)(L_a + N_a) \end{aligned} \tag{5.84}$$

bağıntıları elde edilir. Buna göre, (5.84) bağıntılarından, l, n, $L-N$ vektör alanları, h tensörünün a özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir. $L+N$ vektör alanı da, h'nin $a+2b$ özdeğerine karşılık gelir. Böylece, h tensörünün Segre tipi $\{1(111)\}$ olmalıdır. Diğer bir durum ise, $b = c = 0$ ve $d \neq 0$ olması halidir. Bu takdirde, l, n özvektörlerine karşılık gelen (dejenere) özdeğer a ve L, N özvektörlerine karşılık gelen (dejenere) özdeğer ise $a+d$ olarak bulunur. O halde, h tensörünün Segre tipi $\{(11)(11)\}$ olarak elde edilir. Benzer şekilde, $b = c \neq 0$ ve $b \neq \pm d$ ise,

$$\begin{aligned} &h_{ab}l^b = al_a, \quad h_{ab}n^b = an_a, \quad h_{ab}(L^b - N^b) = (a-b+d)(L_a - N_a) \\ &h_{ab}(L^b + N^b) = (a+b+d)(L_a + N_a) \end{aligned} \tag{5.85}$$

olarak bulunur. Buna göre, (5.85) bağıntılarına göre, h tensörünün $L-N$, $L+N$, l ve n özvektörlerine karşılık gelen özdeğerler, sırasıyla, $a-b+d$, $a+b+d$, a ve a olmalıdır. Dolayısıyla, Segre tipi $\{11(11)\}$ şeklinde elde edilir. Diğer taraftan, $d = -a \neq 0$, $b \neq 0 = c$ olması durumunda, (5.83) bağıntılarından, h tensörünün özvektörleri L, l ve n olarak bulunur. Segre tipi ise, $\{2(11)\}$ şeklinde elde edilecektir. Benzer şekilde, $a = c = d = 0$ ve $b \neq 0$ koşulları altında, $\{(211)\}$ Segre tipi elde edilir.

Son olarak, $b = -c \neq 0$ ise,

$$h_{ab}l^b = al_a, \quad h_{ab}n^b = an_a, \quad h_{ab}(L^b \pm iN^b) = (a + d \pm ib)(L_a \pm iN_a) \tag{5.86}$$

olarak bulunur. O halde, h tensörü, özdeğerleri eşit olan reel iki özvektör ile kompleks eşlenik özvektör çiftine sahiptir. Bu takdirde, h tensörünün Segre tipi $\{z\bar{z}(11)\}$ olmalıdır. Özet olarak, $1(a)$ dolanım tipi için, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörünün mümkün olan bütün Segre tipleri; $\{(1111)\}$, $\{1(111)\}$, $\{(11)(11)\}$, $\{11(11)\}$, $\{2(11)\}$, $\{(211)\}$ ve $\{z\bar{z}(11)\}$ şeklindedir.

Şimdi de, $< x \wedge y >$ cebri ile birlikte $1(b)$ dolanım tipi göz önüne alınsın. Bu takdirde, F bivektörü, lokal koordinatlarda,

$$F_{ab} = x_a y_b - y_a x_b \tag{5.87}$$

şeklinde yazılmaktadır. Bu durumda, (5.24) ve (5.87) denklemlerine göre,

$$F_{ab}s^b = 0, \; F_{ab}t^b = 0 \tag{5.88}$$

koşullarının sağlanması gerektiği elde edilir. Böylece, (5.88) koşullarına göre, s ve t vektör alanları, F bivektörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir. O halde, $m \in M$ noktasındaki x, y, s, t bazı göz önüne alındığı takdirde, Sonuç 5.3.1'e göre, bu vektör alanları, söz konusu noktanın açık ve bağlantılı olan bir U komşuluğu üzerinde paralel vektör alanlarıdır. Başka bir deyişle, $\nabla s = \nabla t = 0$ koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca, x, y, s, t; m noktasında bir (pseudo)-ortonormal baz ve $S^1, \ldots, S^{10} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, h ikinci mertebeden simetrik tensörü

$$\begin{aligned} h_{ab} = {} & S^1 x_a x_b + S^2(x_a y_b + y_a x_b) + S^3 y_a y_b + S^4(x_a s_b + s_a x_b) \\ & + S^5(x_a t_b + t_a x_b) + S^6(y_a s_b + s_a y_b) + S^7(y_a t_b + t_a y_b) \\ & + S^8 s_a s_b + S^9 t_a t_b + S^{10}(s_a t_b + t_a s_b) \end{aligned} \tag{5.89}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, F bivektörü basit olduğundan, Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $x \wedge y$, h tensörünün özuzayıdır. Dolayısıyla, λ, h tensörünün x ve y özvektörlerine karşılık gelen özdeğeri olmak üzere,

$$h_{ab}x^b = \lambda x_a, \quad h_{ab}y^b = \lambda y_a \tag{5.90}$$

bağıntıları mevcuttur. Bu takdirde, $1(a)$ dolanım tipinde uygulanan benzer adımlar yardımıyla, (5.26) tamlık bağıntısı ile (5.89) ve (5.90) ifadeleri kullanılarak, U kümesi üzerindeki a, b, c, d düzgün reel fonksiyonları için h tensörü,

$$h_{ab} = ag_{ab} + bs_a s_b + ct_a t_b + d(s_a t_b + t_a s_b) \tag{5.91}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, $\nabla h = 0$, $\nabla s = \nabla t = 0$ bağıntıları ve (5.91) denklemi kullanılırsa, $1(a)$ dolanım tipinde olduğu gibi, a, b, c, d katsayılarının sabit olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Ayrıca, (5.91) ifadesine göre,

$$\begin{aligned} &h_{ab}x^b = ax_a, \quad h_{ab}y^b = ay_a, \quad h_{ab}s^b = (a-b)s_a - dt_a, \\ &h_{ab}t^b = (a-c)t_a - ds_a \end{aligned} \tag{5.92}$$

bağıntıları bulunur. Eğer $a \neq 0$ ve $b = c = d = 0$ ise, h tensörü, g metriğinin sabit bir katıdır. O halde, h tensörünün Segre tipi $\{(1111)\}$ olarak elde edilir. Diğer taraftan, $b \neq c,\ b \neq 0, c \neq 0$ ve $d = 0$ ise, (5.92) koşullarından, $\{11(11)\}$ Segre tipi elde edilir. Bununla birlikte, $b = c \neq 0$ ve $d = 0$ ise, Segre tipi $\{(11)(11)\}$ olmalıdır. Ayrıca, $b = d = 0$ ve $c \neq 0$ ise, $\{1(111)\}$ Segre tipinin de mümkün olabileceği görülmektedir. Sonuç olarak, $1(b)$ dolanım tipi göz önüne alındığı takdirde, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörü için mümkün olan bütün Segre tipleri; $\{(1111)\}$, $\{1(111)\}$, $\{(11)(11)\}$ ve $\{11(11)\}$ şeklinde elde edilir.

Şimdi ise, $F = < l \wedge y >$ bazına sahip olan $1(c)$ dolanım tipi göz önüne alınsın. Bu takdirde,

$$F_{ab} = l_a y_b - y_a l_b \tag{5.93}$$

olarak yazılır ve buradan,

$$F_{ab}l^b = 0,\ F_{ab}s^b = 0 \tag{5.94}$$

şeklinde bulunur. O halde, (5.94) denklemlerine göre, l ve s vektör alanları, F bivektörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir. Bu durumda, $m \in M$ noktasındaki l, n, y, s bazı göz önüne alındığı takdirde, Sonuç 5.3.1'e göre, bu vektör alanları, söz konusu noktanın açık ve bağlantılı olan bir U komşuluğu üzerinde paralel vektör alanlarıdır. Bununla birlikte, $S^1, \ldots, S^{10} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, h ikinci mertebeden simetrik tensörü

$$\begin{aligned} h_{ab} = {} & S^1 l_a l_b + S^2(l_a n_b + n_a l_b) + S^3 n_a n_b + S^4(l_a y_b + y_a l_b) \\ & + S^5(l_a s_b + s_a l_b) + S^6(n_a y_b + y_a n_b) + S^7(n_a s_b + s_a n_b) \\ & + S^8 y_a y_b + S^9 s_a s_b + S^{10}(y_a s_b + s_a y_b) \end{aligned} \tag{5.95}$$

olarak yazılır. Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $< l \wedge y >$, h tensörünün özuzayıdır. Bu koşul ile birlikte, (5.95) ifadesi göz önüne alınırsa ve $1(a)$, $1(b)$ dolanım tiplerinde kullanılan benzer teknikler uygulanırsa, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan h tensörü, a, b, c, d sabitler olmak üzere,

$$h_{ab} = ag_{ab} + bl_a l_b + cs_a s_b + d(l_a s_b + s_a l_b) \tag{5.96}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, (5.96) ifadesinden,

$$\begin{aligned} &h_{ab} l^b = al_a, \quad h_{ab} n^b = an_a + bl_a + ds_a, \\ &h_{ab} s^b = (a-c)s_a - dl_a, \quad h_{ab} y^b = ay_a \end{aligned} \tag{5.97}$$

bulunur. Eğer $d \neq 0$ ise, h tensörünün özvektörleri yalnızca, l (null) ve y (uzaysal) vektör alanlarıdır ve (5.97) koşullarına göre, bu vektör alanları h tensörünün a özdeğerine karşılık gelir. O halde, a özdeğeri dejeneredir ve h tensörünün Segre tipi $\{(31)\}$ olmalıdır. Eğer, $b \neq 0$, $c \neq 0$ ve $d = 0$ ise, h tensörünün özvektörleri (özdeğerleri), sırasıyla, l (a), y (a) ve s ($a-c$) şeklinde bulunur. Bu takdirde, h tensörünün Segre tipi $\{(21)1\}$ olarak bulunur. Eğer, $b \neq 0$ ve $c = d = 0$ ise, bu tensörün özvektörleri (özdeğerleri), sırasıyla, l (a), y (a) ve s (a) olarak bulunur. Böylece, $\{(211)\}$ Segre tipi elde edilir. Eğer, $b = d = 0$ ve $c \neq 0$ ise, $\{1(111)\}$ Segre tipinin de mümkün olduğu görülmektedir. Son olarak, $b = c = d = 0$ ($a \neq 0$) olması durumunda, daha önce açıklandığı üzere, $\{(1111)\}$ Segre tipi bulunur. Özetlemek gerekirse, $1(c)$ dolanım tipi için, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörünün mümkün olan bütün Segre tipleri; $\{(1111)\}$, $\{1(111)\}$, $\{(21)1\}$, $\{(211)\}$ ve $\{(31)\}$ şeklinde elde edilmiş olur.

Diğer taraftan, $< l \wedge L >$ cebri ile birlikte $1(d)$ dolanım tipi ele alınsın. Bu durumda, F bivektörü

$$F_{ab} = l_a L_b - L_a l_b \tag{5.98}$$

şeklinde yazılır. O halde, (5.98) ifadesinde uygun daraltmalar yapılırsa,

$$F_{ab} l^b = 0, \; F_{ab} L^b = 0 \tag{5.99}$$

bulunur. Bu takdirde, (5.99) koşulları ve Sonuç 5.3.1'e göre, l ve L null vektör alanları, U komşuluğu üzerinde paralel vektör alanları olmalıdır. Yukarıdaki adımlara benzer şekilde, h tensörünün l, n, L, N null bazına göre verilen (5.78) açılımı göz önüne alınırsa ve Yardımcı Teorem 5.5.2 ile birlikte $\nabla h = 0$, $\nabla l = \nabla L = 0$ koşulları kullanılırsa, a, b, c, d katsayıları sabitler olmak üzere, h tensörü,

$$h_{ab} = ag_{ab} + bl_a l_b + cL_a L_b + d(l_a L_b + L_a l_b) \tag{5.100}$$

biçiminde elde edilir. Buna göre, (5.100) ifadesinden,

$$\begin{aligned} h_{ab} l^b &= al_a, \quad h_{ab} n^b = an_a + bl_a + dL_a, \\ h_{ab} L^b &= aL_a, \quad h_{ab} N^b = aN_a + cL_a + dl_a \end{aligned} \tag{5.101}$$

bağıntıları bulunur. Eğer $b = c = d = 0$ $(a \neq 0)$ ise, (5.101) koşullarına göre, h tensörünün Segre tipi $\{(1111)\}$ olarak elde edilir. Eğer, $c = d = 0$ ve $b \neq 0$ ise, h tensörünün özvektörleri (özdeğerleri), sırasıyla, l (a), L (a) ve N (a) olarak bulunur. Bu durumda, $\{(211)\}$ Segre tipi elde edilir. Ayrıca, (5.45) kanonik formunda da bahsedildiği üzere, (5.100) açılımında $b \neq 0 \neq c$ olması durumunda, h tensörünün özvektörleri (özdeğerleri), sırasıyla, l (a) ve L (a) olarak bulunur. Böylece, $\{(22)\}$ (reel özdeğerler) Segre tipi elde edilir. Sonuç olarak, $1(d)$ dolanım tipi için, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörünün mümkün olan bütün Segre tipleri; $\{(1111)\}$, $\{(211)\}$ ve $\{(22)\}$ (özdeğerlerin reel olması hali) şeklindedir.

2) Şimdi ise, $2-$boyutlu dolanım tiplerini incelemek için, ilk olarak, $< l \wedge n - L \wedge N, l \wedge N >$ cebrine sahip olan $2(a)$ dolanım tipi göz önüne alınsın. Bu durumda, Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $l \wedge N$, h tensörünün özuzayıdır. Bununla birlikte, $l \wedge N$ ve $n \wedge L$, h tensörünün invaryant $2-$uzaylarıdır. Bu takdirde,

$$h_{ab} l^b = \lambda l_a, \quad h_{ab} N^b = \lambda N_a$$

koşulları ile (5.78) ifadesi ve tamlık bağıntısı kullanılırsa,

$$h_{ab} = \lambda g_{ab} + S^1 l_a l_b + S^5 (l_a N_b + N_a l_b) + S^9 N_a N_b \tag{5.102}$$

olarak bulunur. Öte yandan, $n \wedge L$, h tensörünün invaryant $2-$uzayı olduğundan, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için,

$$h_{ab} n^b = an_a + bL_a, \quad h_{ab} L^b = cn_a + dL_a \tag{5.103}$$

koşulları gerçeklenir. Buna göre, (5.102) ve (5.103) bağıntıları yardımıyla, $a = d = \lambda$, $b = c = S^1 = S^5 = S^9 = 0$ sonucuna ulaşılır. O halde, l, n, L, N vektörleri h tensörünün özvektörleridir. Dolayısıyla T_mM uzayı, h tensörünün özuzayıdır. Bu sonuçlar (5.102) ifadesinde yerine yazılırsa, U kümesi üzerinde,

$$h_{ab} = ag_{ab} \tag{5.104}$$

olarak bulunur. Bu takdirde, (5.104) ifadesi ve $\nabla h = 0$ denklemi kullanılırsa, a katsayısının sabit olması gerektiği elde edilir. Böylece, $2(a)$ dolanım tipi söz konusu ise, $\nabla h = 0$ denklemini sağlayan h tensörü için mümkün olan Segre tipi yalnızca $\{(1111)\}$ şeklindedir.

Ayrıca, bu dolanım tipi için, $F = l \wedge n - L \wedge N$ ve $F' = l \wedge N$ olmak üzere, lokal koordinatlarda,

$$F_{ab} = l_a n_b - n_a l_b - L_a N_b + N_a L_b, \quad F'_{ab} = l_a N_b - N_a l_b \tag{5.105}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda, (5.105) ifadelerine göre,

$$\begin{aligned} &F_{ab}l^b = l_a,\ F_{ab}n^b = -n_a,\ F_{ab}L^b = -L_a,\ F_{ab}N^b = N_a \\ &F'_{ab}l^b = 0,\ F'_{ab}n^b = -N_a,\ F'_{ab}L^b = l_a,\ F'_{ab}N^b = 0 \end{aligned} \tag{5.106}$$

bağıntıları bulunur. Bu takdirde, (5.106) koşulları, l ve N vektör alanlarının F ve F' bivektörlerinin, sırasıyla, 1 ve 0 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri olduğunu gösterebilir. O halde, Sonuç 5.3.1'e göre, l ve N reküran vektör alanlarıdır. Bu durumda, r ve q düzgün 1-formları için,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b, \quad \nabla_b N_a = N_a q_b \tag{5.107}$$

denklemleri sağlanır. Ricci özdeşliği ve (5.107) koşulları kullanılırsa, bu takdirde, (5.74) denklemine benzer şekilde,

$$l^a R_{abcd} = l_b G_{cd}, \quad N^a R_{abcd} = N_b H_{cd} \tag{5.108}$$

bağıntıları bulunur. Burada, $G_{cd} = \nabla_d r_c - \nabla_c r_d$ ve $H_{cd} = \nabla_d q_c - \nabla_c q_d$ şeklindedir. Bu dolanım tipi için, Riemann eğrilik tensörü,

$$R_{abcd} = AF_{ab}F_{cd} + BF'_{ab}F'_{cd} + C(F_{ab}F'_{cd} + F'_{ab}F_{cd}) \tag{5.109}$$

olarak yazılmaktadır. Burada, A, B ve C, U kümesi üzerinde düzgün fonksiyonlardır. Bu durumda, (5.109) denkleminde, sırasıyla, l^a ve N^a üzerinden daraltma yapılırsa ve

(5.105) ifadeleri kullanılırsa, $G = -AF - CF'$ ve $H = -AF - CF'$ bağıntıları elde edilir. O halde, $G = H$ olarak bulunur. Bu ise, $r - q$ formuna karşılık gelen vektör alanının U üzerinde gradiyent olması anlamına gelmektedir. Başka bir deyişle, ξ, U üzerinde bir fonksiyon olmak üzere,

$$r = q + \nabla\xi \tag{5.110}$$

koşulu sağlanır. Buna göre, $l \to e^{-\xi} l$ ve $N \to N$ düzenlemeleri yapılırsa ve (5.110) kullanılırsa, (5.77) denkleminde uygulanan benzer adımlar yardımıyla, $r - q = 0$ olarak yazılabileceği görülmektedir. Bu takdirde, l ve N rekürан vektör alanlarının ilişkili 1-formlarının özdeş olacak şekilde düzenlenebileceği sonucuna ulaşılır. Son olarak, (5.107) koşulları yeniden düzenlenirse, U kümesi üzerinde,

$$\nabla_b l_a = l_a q_b, \quad \nabla_b N_a = N_a q_b \tag{5.111}$$

bağıntıları elde edilir. Böylece, (5.111) bağıntıları, $l \pm iN$ vektör alanlarının, kompleks rekürан vektör alanları olduğu ve bu vektör alanlarına karşılık gelen rekürан 1-formların reel ve q olduğu sonucunu verir. Bu sonuç, daha sonra kullanılacaktır.

Diğer taraftan, $< l \wedge n, L \wedge N >$ cebri ile birlikte $2(b)$ dolanım tipi göz önüne alınsın. Bu takdirde, $F = l \wedge n$ ve $G = L \wedge N$ olmak üzere, lokal koordinatlarda,

$$F_{ab} = l_a n_b - n_a l_b, \quad G_{ab} = L_a N_b - N_a L_b \tag{5.112}$$

biçiminde yazılır. Buradan, (5.25) ve (5.112) denklemleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} &F_{ab} l^b = l_a, \; F_{ab} n^b = -n_a, \; F_{ab} L^b = 0, \; F_{ab} N^b = 0 \\ &G_{ab} l^b = 0, \; G_{ab} n^b = 0, \; G_{ab} L^b = L_a, \; G_{ab} N^b = -N_a \end{aligned} \tag{5.113}$$

bağıntıları elde edilir. Sonuç 5.3.1 ve (5.113) bağıntılarına göre, l, n, L, N null vektör alanları, U kümesi üzerinde rekürан vektör alanları olmalıdır. Bu takdirde, (5.25) ve (5.73) denklemleri kullanılırsa, l ve n ile L ve N vektör alanlarının rekürан 1-formlarının birbirlerinin ters işaretlisi olması gerektiği sonucuna ulaşılır. O halde, r ve q, U üzerinde düzgün 1-formlar olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\nabla_b l_a = l_a r_b, \quad \nabla_b n_a = -n_a r_b, \\ &\nabla_b L_a = L_a q_b, \quad \nabla_b N_a = -N_a q_b \end{aligned} \tag{5.114}$$

bulunur.

Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $l \wedge n$ ve $L \wedge N$, h tensörünün özuzaylarıdır. Yukarıda incelenmiş olan dolanım tipleri için göz önüne alınan benzer adımlar yardımıyla, (5.27) tamlık bağıntısı ve (5.78) ifadesi kullanılarak, h tensörü

$$h_{ab} = a g_{ab} + b(l_a n_b + n_a l_b) \tag{5.115}$$

şeklinde elde edilir. Bununla birlikte, (5.114) koşulları yardımıyla,

$$\begin{aligned}\nabla_c(l_a n_b + n_a l_b) &= (\nabla_c l_a) n_b + l_a \nabla_c n_b + (\nabla_c n_a) l_b + n_a \nabla_c l_b \\ &= l_a n_b r_c - l_a n_b r_c - n_a l_b r_c + n_a l_b r_c = 0\end{aligned} \tag{5.116}$$

olarak bulunur. $\nabla h = 0$ ve (5.116) koşulları göz önüne alınırsa, (5.115) ifadesindeki a ve b katsayılarının sabit olduğu sonucuna ulaşılır. Bu durumda, (5.115) ifadesinden,

$$\begin{aligned}&h_{ab} l^b = (a+b) l_a, \quad h_{ab} n^b = (a+b) n_a, \\ &h_{ab} L^b = a L_a, \quad h_{ab} N^b = a N_a\end{aligned} \tag{5.117}$$

şeklinde elde edilir. Bu takdirde, $b \neq 0$ ise, (5.117) koşullarına göre, h tensörünün Segre tipi $\{(11)(11)\}$ olmalıdır. Eğer, $b = 0$ $(a \neq 0)$ ise, $\{(1111)\}$ Segre tipi elde edilir. O halde, $2(b)$ dolanım tipi için, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörünün mümkün olan bütün Segre tipleri; $\{(1111)\}$ ve $\{(11)(11)\}$ şeklindedir.

Şimdi de, $< l \wedge n - L \wedge N, l \wedge L + n \wedge N >$ cebri ile birlikte $2(c)$ dolanım tipi göz önüne alınsın. Bu durumda, $F = l \wedge n - L \wedge N$ ve $F' = l \wedge L + n \wedge N$ bivektörleri, lokal koordinatlarda,

$$F_{ab} = l_a n_b - n_a l_b - L_a N_b + N_a L_b, \quad F'_{ab} = l_a L_b - L_a l_b + n_a N_b - N_a n_b \tag{5.118}$$

biçiminde yazılır. Bu durumda, (5.118) ifadelerinden,

$$\begin{aligned}&F_{ab} l^b = l_a, \ F_{ab} n^b = -n_a, \ F_{ab} L^b = -L_a, \ F_{ab} N^b = N_a \\ &F'_{ab} l^b = -N_a, \ F'_{ab} n^b = -L_a, \ F'_{ab} L^b = n_a, \ F'_{ab} N^b = l_a\end{aligned} \tag{5.119}$$

bağıntıları bulunur. Buna göre, (5.119) koşulları göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}&F_{ab}(l^b \pm i N^b) = l_a \pm i N_a, \ F_{ab}(n^b \pm i L^b) = -(n_a \pm i L_a) \\ &F'_{ab}(l^b \pm i N^b) = \pm i (l_a \pm i N_a), \ F'_{ab}(n^b \pm i L^b) = \pm i (n_a \pm i L_a)\end{aligned} \tag{5.120}$$

olarak elde edilir. Bu takdirde, (5.120) koşulları ve Sonuç 5.3.1 yardımıyla, $l \pm iN$ ve $n \pm iL$ null vektör alanlarının, U kümesi üzerinde kompleks reküran vektör alanları olması gerektiği sonucuna varılır. Öte yandan, (5.25) denklemi kullanıldığı takdirde, bu vektör alanları arasında,

$$(l \pm iN).(n \mp iL) = 2 \tag{5.121}$$

koşulları mevcuttur. Bu durumda, (5.121) denklemine göre, $l+iN$ ve $n-iL$ (veya $l-iN$ ve $n+iL$) vektör alanlarının kompleks reküran 1-formlarının, birbirinin ters işaretlisi olması gerekir. Başka bir deyişle,

$$\nabla_b(l_a + iN_a) = (l_a + iN_a)(r_b + iq_b), \quad \nabla_b(n_a - iL_a) = -(n_a - iL_a)(r_b + iq_b) \tag{5.122}$$

bağıntıları mevcuttur. Böylece, (5.122) bağıntılarından,

$$\begin{aligned} \nabla_b l_a &= l_a r_b - N_a q_b, & \nabla_b N_a &= N_a r_b + l_a q_b, \\ \nabla_b n_a &= -n_a r_b - L_a q_b, & \nabla_b L_a &= -L_a r_b + n_a q_b \end{aligned} \tag{5.123}$$

sonuçlarına ulaşılır.

Diğer taraftan, $l \wedge n - L \wedge N$ bivektörüne Yardımcı Teorem 5.5.2 uygulandığı takdirde, $l \wedge N$ ve $n \wedge L$ bivektörlerinin h tensörünün invaryant $2-$uzayları olduğu sonucuna varılır. Bu durumda, h tensörünün simetrik olduğu da göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} h_{ab}l^b &= al_a + bN_a, & h_{ab}N^b &= cl_a + dN_a, \\ h_{ab}n^b &= an_a + cL_a, & h_{ab}L^b &= dL_a + bn_a \end{aligned} \tag{5.124}$$

denklemleri elde edilir. Buna göre, (5.124) sonuçları $F' = l \wedge L + n \wedge N$ bivektörü için, (5.65) denkleminde yerine yazılırsa, $a = d$ ve $b = -c$ olarak bulunur. Böylece, h ikinci mertebeden simetrik tensörü, a ve b, U kümesi üzerinde reel değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$h_{ab} = ag_{ab} + b(n_a N_b + N_a n_b - l_a L_b - L_a l_b) \tag{5.125}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, $\nabla h = 0$ ve (5.125) denklemleri göz önüne alındığı takdirde, $\nabla(g^{ab}h_{ab}) = 0$ koşulu sağlandığından, a sabit olmalıdır. Buna ek olarak, (5.123) bağıntıları kullanılırsa,

$$\nabla_c(n_a N_b + N_a n_b - l_a L_b - L_a l_b) = 0 \tag{5.126}$$

denkleminin de sağlanması gerektiği görülür. O halde, bu koşullar altında, b fonksiyonunun da sabit olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Eğer $b = 0$ ise, (5.125) ifadesinden h tensörünün Segre tipi $\{(1111)\}$ olarak bulunur. Diğer taraftan, $b \neq 0$ olması durumunda ise, (5.42) kanonik formuna benzer şekilde, h tensörünün kompleks dejenere özdeğer çiftleri mevcuttur ve Segre tipi $\{(zz)(\bar{z}\bar{z})\}$ olmalıdır. Sonuç olarak, $2(c)$ dolanım tipi için, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörünün mümkün olan bütün Segre tipleri; $\{(1111)\}$ ve $\{(zz)(\bar{z}\bar{z})\}$ şeklindedir.

Daha sonra, $< l \wedge n - L \wedge N, l \wedge L >$ bazına sahip olan $2(d)$ dolanım tipi incelenirse ve Yardımcı Teorem 5.5.2 kullanılırsa, $l \wedge L$ bivektörü, h tensörünün özuzayı ve $l \wedge N$ ile $n \wedge L$, h tensörünün invaryant $2-$uzaylarıdır. Yukarıda ele alınan dolanım tiplerindeki adımlar, bu dolanım tipine uygulanırsa, U kümesi üzerinde düzgün olan a ve b fonksiyonları için, h tensörü,

$$h_{ab} = a g_{ab} + b(l_a L_b + L_a l_b) \tag{5.127}$$

olarak bulunur.

Bununla birlikte, $F = l \wedge n - L \wedge N$ ve $F' = l \wedge L$ olmak üzere, lokal koordinatlarda,

$$F_{ab} = l_a n_b - n_a l_b - L_a N_b + N_a L_b, \quad F'_{ab} = l_a L_b - L_a l_b \tag{5.128}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &F_{ab} l^b = l_a,\ F_{ab} n^b = -n_a,\ F_{ab} L^b = -L_a,\ F_{ab} N^b = N_a \\ &F'_{ab} l^b = 0,\ F'_{ab} n^b = -L_a,\ F'_{ab} L^b = 0,\ F'_{ab} N^b = l_a \end{aligned} \tag{5.129}$$

bağıntıları bulunur. Bu takdirde, (5.129) koşulları ve Sonuç 5.3.1'e göre, l ve L null vektör alanları, reküran vektör alanlarıdır. Böylece, r ve q düzgün 1-formları için,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b, \quad \nabla_b L_a = L_a q_b \tag{5.130}$$

denklemleri mevcuttur. Bununla birlikte, $2(a)$ dolanım tipinde uygulanan benzer teknikler yardımıyla, (5.109) denkleminde, sırasıyla, l^a ve L^a üzerinden daraltma yapılırsa, Ricci özdeşliği ve (5.130) bağıntıları kullanılırsa,

$$r_a + q_a = \nabla_a \phi (= \partial_a \phi) \tag{5.131}$$

koşulu sağlanır. Burada, ϕ, U kümesi üzerinde bir fonksiyondur. O halde, $l \to l$ ve $L \to e^{-\phi} L$ olarak yeniden düzenlenirse ve (5.131) denklemi göz önünde bulundurulursa, l ve L reküran vektör alanlarının ilişkili 1-formları arasında $r = -q$ bağıntısının mevcut olduğu görülür. Böylece, (5.130) denklemi,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b, \quad \nabla_b L_a = -L_a r_b \tag{5.132}$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu durumda, (5.132) bağıntıları yardımıyla,

$$\nabla_c (l_a L_b + L_a l_b) = 0 \tag{5.133}$$

denklemi mevcuttur. Buna göre, (5.127) ifadesine $\nabla h = 0$ koşulu uygulandığı takdirde, a ve b katsayıları sabitler olarak elde edilir. Bu durumda, eğer $b = 0$ $(a \neq 0)$ ise, h tensörünün Segre tipi $\{(1111)\}$ olmalıdır. Eğer $b \neq 0$ ise, l ve L vektör alanları, h tensörünün a özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir. Böylece, h tensörünün Segre tipi $\{(22)\}$ olarak bulunur. O halde, $2(d)$ dolanım tipi için, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörünün mümkün olan bütün Segre tipleri; $\{(1111)\}$ ve $\{(22)\}$ (özdeğerlerin reel olması hali) şeklindedir.

Şimdi ise, $2(e)$ dolanım tipi göz önüne alınsın. Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $x \wedge y$ ve $s \wedge t$ şeklindeki $2-$uzayları, h tensörünün özuzaylarıdır. Yukarıda incelenen dolanım tiplerine uygulanan benzer adımlar izlenirse ve (5.26) tamlık bağıntısı ile (5.89) ifadesi kullanılırsa, h tensörü

$$h_{ab} = a g_{ab} + b(x_a x_b + y_a y_b) \tag{5.134}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, (5.134) ifadesine göre, h tensörü için mümkün olan Segre tipleri $\{(1111)\}$ ($b = 0$, $a \neq 0$) veya $\{(11)(11)\}$ ($b \neq 0$) olarak elde edilir. Öte yandan, söz konusu dolanım tipi için, $F = x \wedge y$ ve $F' = s \wedge t$ olmak üzere,

$$\begin{gathered} F_{ab} x^b = -y_a, \;\; F_{ab} y^b = x_a, \;\; F_{ab} s^b = 0, \;\; F_{ab} t^b = 0 \\ F'_{ab} x^b = 0, \;\; F'_{ab} y^b = 0, \;\; F'_{ab} s^b = t_a, \;\; F'_{ab} t^b = -s_a \end{gathered} \tag{5.135}$$

bağıntıları mevcuttur. Bu takdirde, (5.135) koşulları ve Sonuç 5.3.1 göz önüne alınırsa, $x \pm iy$ ve $s \pm it$ null vektör alanlarının, kompleks reküran vektör alanları olduğu elde edilir. Buna göre, $r \pm iq$, $x \pm iy$ vektör alanlarının reküran 1-formları olmak üzere,

$$\nabla_b (x_a + i y_a) = (x_a + i y_a)(r_b + i q_b) \tag{5.136}$$

koşulu gerçeklenir. Böylece, (5.136) denkleminden,

$$\nabla_b x_a = x_a r_b - y_a q_b, \quad \nabla_b y_a = x_a q_b + y_a r_b \tag{5.137}$$

elde edilir. Daha sonra, (5.137) koşulları, sırasıyla, x^a ve y^a ile çarpılırsa, $(\nabla_b x_a)x^a = (\nabla_b y_a)y^a = 0$ olduğundan, $r = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuç (5.137) bağıntılarında yerine yazılırsa,

$$\nabla_b x_a = -y_a q_b, \quad \nabla_b y_a = x_a q_b \tag{5.138}$$

bulunur. Bu durumda, (5.138) koşulları yardımıyla,

$$\nabla_c(x_a x_b + y_a y_b) = 0 \tag{5.139}$$

ifadesi mevcuttur. Benzer şekilde, $s \pm it$ kompleks vektör alanlarının, reküran vektör alanı olma özelliği kullanılırsa, $(s_a s_b + t_a t_b)$ ifadesinin de paralel olması gerektiği sonucuna ulaşılacaktır. O halde, (5.134), (5.139) ve $\nabla h = 0$ denklemleri göz önüne alınırsa, a ve b fonksiyonlarının U kümesi üzerinde sabit olarak elde edilir.

Eğer, $F = l \wedge N + n \wedge L$ ve $F' = l \wedge L$ bivektörleri tarafından üretilen $2(f)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa,

$$F_{ab}(l^b \pm iL^b) = \pm i(l_a \pm iL_a), \quad F'_{ab}l^b = F'_{ab}L^b = 0 \tag{5.140}$$

bağıntıları gerçeklenir. Bu durumda, (5.140) denklemlerinden, $l \pm iL$ vektör alanının, F ve F' bivektörlerinin ortak özvektörleri olduğu elde edilir. Sonuç 5.3.1'e göre, $l \pm iL$ null vektör alanları, kompleks reküran vektör alanlarıdır. O halde, $K = l + iL$ ve r, q 1-formlar olmak üzere,

$$\nabla_b K_a = K_a(r_b + iq_b) \tag{5.141}$$

bağıntısı elde edilir. Diğer dolanım tiplerinde olduğu gibi, Ricci özdeşliği ve (5.141) koşulu kullanılırsa, $w = r + iq$ ve $G_{ab} = \nabla_b w_a - \nabla_a w_b$ olmak üzere,

$$K^a R_{abcd} = K_b G_{cd} \tag{5.142}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan, (5.140) denklemine göre, $F_{ab}K^b = iK_a$ bağıntısı gerçeklenir. Bu durumda, (5.109), (5.140) ve (5.142) denklemleri kullanılarak, $G = -i(AF + CF')$ olarak elde edilir. Dolayısıyla, G_{ab} ifadesinin reel kısmı sıfır olmalıdır. O halde,

$$\nabla_b r_a - \nabla_a r_b = 0 \tag{5.143}$$

denklemi sağlanır. Bu takdirde, (5.143) denkleminden, r, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı, bir gradiyent vektör alanı olmalıdır. Buna göre, ξ, U kümesi üzerinde bir fonksiyon olmak üzere, $r = \nabla\xi$ koşulu sağlanır. Böylece, $K' = e^{-\xi}K$ için,

$$\nabla_b K'_a = iK'_a q_b \tag{5.144}$$

şeklinde elde edilir. O halde, $l' = e^{-\xi}l$ ve $L' = e^{-\xi}L$ olacak şekilde, l ve L vektör alanları yeniden düzenlendiği takdirde,

$$\nabla_b l'_a = -L'_a q_b, \quad \nabla_b L'_a = l'_a q_b \tag{5.145}$$

ifadeleri bulunur. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $l \wedge L (= l' \wedge L')$ $2-$uzayı h tensörünün özuzayıdır. O halde, yukarıdaki dönüşüm ve (5.65) denklemi kullanılırsa, U kümesi üzerindeki a ve b fonksiyonları için,

$$h_{ab} = ag_{ab} + b(l_a l_b + L_a L_b) \tag{5.146}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, (5.145) bağıntıları ele alınırsa,

$$\nabla_c(l_a l_b + L_a L_b) = 0 \tag{5.147}$$

denkleminin sağlanması gerektiği görülmektedir. Bu takdirde, (5.147) ve $\nabla h = 0$ denklemleri yardımıyla, (5.146) ifadesindeki a ve b katsayıları sabitler olarak elde edilir. Eğer $b = 0$ $(a \neq 0)$ ise, h tensörünün Segre tipi $\{(1111)\}$ olmalıdır. Bununla birlikte, $b \neq 0$ olduğu takdirde, h tensörünün a reel (dejenere) özdeğerine karşılık gelen l ve L özvektörleri mevcut olacaktır. O halde, $\{(22)\}$ Segre tipi elde edilir.

Eğer, $< l \wedge N, l \wedge L >$ cebri ile birlikte $2(g)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, $F = l \wedge N$ ve $G = l \wedge L$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &F_{ab}l^b = 0,\ F_{ab}n^b = -N_a,\ F_{ab}L^b = l_a,\ F_{ab}N^b = 0 \\ &G_{ab}l^b = 0,\ G_{ab}n^b = -L_a,\ G_{ab}L^b = 0,\ G_{ab}N^b = l_a \end{aligned} \tag{5.148}$$

bağıntıları elde edilir. (5.148) denklemine göre, l vektör alanı, F ve G bivektörlerinin sıfır özdeğerine karşılık gelen özvektörüdür. O halde, Sonuç 5.3.1'ten, l vektör alanı paraleldir. Önceki dolanım tiplerine benzer şekilde, Yardımcı Teorem 5.5.2 kullanılırsa, h tensörü

$$h_{ab} = ag_{ab} + bl_a l_b \tag{5.149}$$

olarak elde edilir. Bununla birlikte, l vektör alanının paralel olması ve $\nabla h = 0$ koşulu göz önünde bulundurulursa, (5.149) ifadesindeki a ve b katsayıları sabitler olarak bulunur. Bu durumda, (5.149) ifadesinden,

$$h_{ab}l^b = al_a, \quad h_{ab}n^b = an_a + bl_a,$$
$$h_{ab}L^b = aL_a, \quad h_{ab}N^b = aN_a \tag{5.150}$$

bağıntıları elde edilir. O halde, $b \neq 0$ ise, (5.150) koşullarına göre, h tensörünün a özdeğerine karşılık gelen özvektörleri l, L ve N olarak bulunur. Bu takdirde, h tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ olmalıdır. Eğer $b = 0$ $(a \neq 0)$ ise, $\{(1111)\}$ Segre tipi elde edilir.

Öte yandan, $\alpha \neq \pm\beta$ olmak üzere, $< l \wedge N, \alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N) >$ cebri ile birlikte $2(h)$ dolanım tipi söz konusu ise, $F = l \wedge N$ ve $G = \alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N)$ olmak üzere,

$$F_{ab}l^b = 0, \; F_{ab}n^b = -N_a, \; F_{ab}L^b = l_a, \; F_{ab}N^b = 0 \tag{5.151}$$
$$G_{ab}l^b = \alpha l_a, \; G_{ab}n^b = -\alpha n_a, \; G_{ab}L^b = \beta L_a, \; G_{ab}N^b = -\beta N_a$$

koşulları gerçeklenir. Bu durumda, $\alpha \neq 0 \neq \beta$ ise, Sonuç 5.3.1 ve (5.151) bağıntılarına göre, l ve N vektör alanları rekürandır. Eğer, $\alpha = 0$ fakat $\beta \neq 0$ ise, l paralel vektör alanı ve N reküran vektör alanıdır. Eğer, $\beta = 0$ fakat $\alpha \neq 0$ ise, l vektör alanı reküran ve N vektör alanı paraleldir. Bu takdirde, $\alpha \neq 0 \neq \beta$ koşulu sağlanıyorsa, Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $l \wedge N$, $l \wedge n$ ve $L \wedge N$, $2-$uzayları, h tensörünün özuzaylarıdır. Buradan, h tensörü,

$$h_{ab} = ag_{ab} \tag{5.152}$$

şeklinde bulunur ve $\nabla h = 0$ denklemi kullanılırsa, a katsayısı sabit olarak elde edilir. Böylece, h tensörünün Segre tipi $\{(1111)\}$ olmalıdır.

Daha sonra, $\alpha = 0 \neq \beta$ ve $\alpha \neq 0 = \beta$ olması durumları göz önüne alınırsa, h tensörü, sırasıyla,

$$h_{ab} = ag_{ab} + bl_al_b \tag{5.153}$$

ve

$$h_{ab} = ag_{ab} + bN_aN_b \tag{5.154}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, (5.153) ve (5.154) ifadelerinde, $\nabla h = 0$ denklemi ile birlikte, l ve N vektör alanlarının ilgili koşula göre paralel vektör alanları olması göz önünde bulundurulursa, a ve b katsayıları sabitler olarak elde edilir. Bu takdirde, $2(g)$ dolanım tipine benzer şekilde, h tensörünün Segre tipleri $\{(1111)\}$ veya $\{(211)\}$ olarak bulunur.

Şimdi de, $< l\wedge N, \alpha(l\wedge n - L\wedge N)+\beta(l\wedge L) >$ cebrine sahip olan $2(j)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, $F=\alpha(l\wedge n-L\wedge N)+\beta(l\wedge L)$ $(\alpha\neq 0\neq\beta)$ ve $G=l\wedge N$ olmak üzere,

$$F_{ab}l^b=\alpha l_a,\;\; F_{ab}n^b=-\alpha n_a-\beta L_a,\;\; F_{ab}L^b=-\alpha L_a,\;\; F_{ab}N^b=\alpha N_a+\beta l_a$$
$$G_{ab}l^b=0,\;\; G_{ab}n^b=-N_a,\;\; G_{ab}L^b=l_a,\;\; G_{ab}N^b=0 \tag{5.155}$$

bağıntıları mevcuttur. Sonuç 5.3.1 ve (5.155) koşulları kullanılırsa, l vektör alanının, söz konusu dolanım tipi için reküran vektör alanı olduğu görülmektedir. Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $l\wedge N$ şeklindeki $2-$uzayı h tensörünün özuzayıdır. Bu takdirde, $\lambda\in\mathbb{R}$ için,

$$h_{ab}l^b=\lambda l_a,\quad h_{ab}N^b=\lambda N_a \tag{5.156}$$

koşulları, (5.78) ifadesi ve (5.27) tamlık bağıntısı yardımıyla,

$$h_{ab}=\lambda g_{ab}+S^1 l_a l_b+S^5(l_a N_b+N_a l_b)+S^9 N_a N_b \tag{5.157}$$

olarak bulunur. Öte yandan,

$$F^a{}_b=\alpha(l^a n_b-n^a l_b-L^a N_b+N^a L_b)+\beta(l^a L_b-L^a l_b)$$

ve (5.157) bağıntısı (5.65) denkleminde yerine yazılırsa ve (5.25) denklemleri kullanılırsa, h tensörü,

$$h=ag$$

şekline indirgenir. Burada, $\nabla h=0$ koşulundan, a sabit olmalıdır. O halde, $2(j)$ dolanım tipi için, $\nabla h=0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörünün mümkün olan Segre tipi yalnızca $\{(1111)\}$ olarak bulunur.

Benzer şekilde, $< l\wedge y, l\wedge n >$ (veya $< l\wedge s, l\wedge n >$) bazına sahip olan $2(k)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, l vektör alanının reküran, s (veya y) vektör alanının ise paralel vektör alanı olduğu sonucuna varılır. Ayrıca, h tensörü,

$$h_{ab}=ag_{ab}+bs_a s_b \quad (\text{veya } h_{ab}=ag_{ab}+by_a y_b) \tag{5.158}$$

şeklinde elde edilir. $\nabla h=0$ koşuluna göre, (5.158) ifadesindeki a ve b katsayıları sabit olmalıdır. Bununla birlikte, $b\neq 0$ ve $b=0$ fakat $a\neq 0$ olması durumunda, h tensörünün Segre tipleri, sırasıyla, $\{1(111)\}$ ve $\{(1111)\}$ olarak elde edilir.

3) Eğer, $3(a)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, $F = l \wedge n$, $G = l \wedge N$ ve $H = L \wedge N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &F_{ab}l^b = l_a, \; F_{ab}n^b = -n_a, \; F_{ab}L^b = 0, \; F_{ab}N^b = 0, \\ &G_{ab}l^b = 0, \; G_{ab}n^b = -N_a, \; G_{ab}L^b = l_a, \; G_{ab}N^b = 0, \\ &H_{ab}l^b = 0, \; H_{ab}n^b = 0, \; H_{ab}L^b = L_a, \; H_{ab}N^b = -N_a \end{aligned} \tag{5.159}$$

koşulları sağlanmaktadır. Böylece, (5.159) bağıntılarına göre, l ve N vektör alanlarının F, G ve H bivektörlerinin ortak özvektörleri olduğu görülmektedir. O halde, Sonuç 5.3.1'e göre, l ve N reküran vektör alanlarıdır. Yardımcı Teorem 5.5.2'ye göre, $l \wedge n$, $l \wedge N$ ve $L \wedge N$ şeklindeki $2-$uzayları, h tensörünün özuzaylarıdır. Bu durumda, daha önce incelendiği üzere, a sabiti için, $h = ag$ olarak elde edilir. Dolayısıyla, $3(a)$ dolanım tipi için, h tensörünün Segre tipi yalnızca $\{(1111)\}$ olarak bulunur.

Benzer şekilde, $< l \wedge n - L \wedge N, l \wedge N, l \wedge L >$ cebrine sahip olan $3(b)$ dolanım tipi için, l vektör alanının reküran vektör alanı ve $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörünün mümkün olan Segre tipinin yalnızca $\{(1111)\}$ olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan, $< x \wedge y, x \wedge t, y \wedge t >$ (veya $< x \wedge s, x \wedge t, s \wedge t >$) cebri tarafından üretilen $3(c)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, $F = x \wedge y$, $G = x \wedge t$ ve $H = y \wedge t$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &F_{ab}x^b = -y_a, \; F_{ab}y^b = x_a, \; F_{ab}s^b = 0, \; F_{ab}t^b = 0, \\ &G_{ab}x^b = -t_a, \; G_{ab}y^b = 0, \; G_{ab}s^b = 0, \; G_{ab}t^b = -x_a, \\ &H_{ab}x^b = 0, \; H_{ab}y^b = -t_a, \; H_{ab}s^b = 0, \; H_{ab}t^b = -y_a \end{aligned} \tag{5.160}$$

denklemleri elde edilir. Bu takdirde, (5.160) denklemlerine göre, s zamansal vektör alanı, F, G ve H bivektörlerinin sıfır özdeğerine karşılık gelen özvektörüdür. O halde, Sonuç 5.3.1'e göre, s, paralel vektör alanı olmalıdır. Benzer şekilde, bu dolanım tipi için, $< x \wedge s, x \wedge t, s \wedge t >$ cebri göz önüne alındığı takdirde, y vektör alanının paralel vektör alanı olması gerektiği gösterilebilir. Önceki dolanım tiplerine uygulanan adımlara benzer şekilde, $\nabla h = 0$ denklemini sağlayan h ikinci mertebeden simetrik tensörü, s (veya y) vektör alanının paralel vektör alanı olmasına bağlı olarak,

$$h_{ab} = ag_{ab} + bs_a s_b \quad (\text{veya } \; h_{ab} = ag_{ab} + by_a y_b) \tag{5.161}$$

şeklinde elde edilir. Burada, a ve b katsayıları sabittir. Bu durumda, (5.161) ve (5.24) denklemleri kullanılırsa,

$$h_{ab}x^b = ax_a, \quad h_{ab}y^b = ay_a, \quad h_{ab}s^b = (a-b)s_a, \quad h_{ab}t^b = at_a \tag{5.162}$$

olarak bulunur. Eğer $b \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, (5.162) denklemlerine göre, x, y ve t vektör alanları, h tensörünün a (dejenere) özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir. Ayrıca, s vektör alanı, h tensörünün $a-b$ özdeğerine karşılık gelen özvektörüdür. O halde, h tensörünün Segre tipi $\{1(111)\}$ olmalıdır. Eğer, $b = 0$ fakat $a \neq 0$ ise, $\{(1111)\}$ Segre tipi elde edilir.

Eğer, $< l \wedge N, l \wedge L, \alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N) >$ bazına sahip olan $3(d)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, $F = l \wedge N$, $G = l \wedge L$ ve $H = \alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &F_{ab}l^b = 0, \ F_{ab}n^b = -N_a, \ F_{ab}L^b = l_a, \ F_{ab}N^b = 0, \\ &G_{ab}l^b = 0, \ G_{ab}n^b = -L_a, \ G_{ab}L^b = 0, \ G_{ab}N^b = l_a, \\ &H_{ab}l^b = \alpha l_a, \ H_{ab}n^b = -\alpha n_a, \ H_{ab}L^b = \beta L_a, \ H_{ab}N^b = -\beta N_a \end{aligned} \tag{5.163}$$

bağıntıları mevcuttur. Bu durumda, (5.163) bağıntılarına göre, l vektör alanı, F, G ve H bivektörlerinin ortak özvektörüdür. O halde, Sonuç 5.3.1'ten, l vektör alanı rekürandır. Ayrıca, $\alpha = 0$ olması durumunda ise, l vektör alanı, söz konusu bivektörlerin sıfır özdeğerine karşılık gelen özvektörü olduğundan, bu vektör alanı paraleldir. Yardımcı Teorem 5.5.2 kullanılırsa ve diğer dolanım tiplerindekine benzer hesaplar yapılırsa, a ve b katsayıları sabitler olmak üzere, h tensörü,

$$h_{ab} = ag_{ab} \ (\ \alpha \neq 0 \ \text{ise}) \quad \text{veya} \quad h_{ab} = ag_{ab} + bl_al_b \ (\ \alpha = 0, \ \beta \neq 0 \ \text{ise}) \tag{5.164}$$

olarak elde edilir. Bu takdirde, $\alpha = 0$ fakat $\beta \neq 0$ ise, (5.164) denkleminden h tensörünün Segre tipi $\{(1111)\}$ veya $\{(211)\}$ olmalıdır. Diğer taraftan, $\alpha \neq 0$ olması durumunda ise, $\{(1111)\}$ Segre tipi elde edilir.

4) Bütün bunlara ek olarak, $4(a)$, $4(b)$, $4(c)$, 5 ve 6 dolanım tiplerinin her biri $2(a)$ alt cebrini içerdiğinden dolayı, bu dolanım tipleri için, $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden simetrik h tensörünün mümkün olan Segre tipi yalnızca $\{(1111)\}$ olmalıdır. Başka bir deyişle, a sabit olmak üzere, $h = ag$ şeklinde elde edilir.

Ayrıca, $F = l \wedge L$, $G = l \wedge N$, $H = l \wedge n$ ve $J = L \wedge N$ bivektörleri tarafından üretilen $4(c)$ dolanım tipi için,

$$F_{ab}l^b = 0, \ G_{ab}l^b = 0, \ H_{ab}l^b = l_a, \ J_{ab}l^b = 0 \tag{5.165}$$

bağıntıları gerçeklendiğinden, Sonuç 5.3.1'e göre, l vektör alanı rekürandır.

Sonuç olarak, yukarıda elde edilen bulgularla birlikte aşağıdaki çizelge ve teorem verilmektedir.

Çizelge 5.2 : İkinci mertebeden, simetrik h tensörü için $\nabla h = 0$ probleminin Segre tipi çözümleri.

Tip	Boyut	$\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan h tensörü için Segre tipleri
$1(a)$	1	$\{(1111)\}$, $\{1(111)\}$, $\{(11)(11)\}$, $\{11(11)\}$, $\{(11)z\bar{z}\}$, $\{2(11)\}$, $\{(211)\}$
$1(b)$	1	$\{(1111)\}$, $\{1(111)\}$, $\{(11)(11)\}$, $\{11(11)\}$
$1(c)$	1	$\{(1111)\}$, $\{1(111)\}$, $\{(211)\}$, $\{(21)1\}$, $\{(31)\}$
$1(d)$	1	$\{(1111)\}$, $\{(211)\}$, $\{(22)\}$ (reel özdeğerler)
$2(a)$	2	$\{(1111)\}$
$2(b)$	2	$\{(1111)\}$, $\{(11)(11)\}$
$2(c)$	2	$\{(1111)\}$, $\{(zz)(\bar{z}\bar{z})\}$
$2(d)$	2	$\{(1111)\}$, $\{(22)\}$ (reel özdeğerler)
$2(e)$	2	$\{(1111)\}$, $\{(11)(11)\}$
$2(f)$	2	$\{(1111)\}$, $\{(22)\}$ (reel özdeğerler)
$2(g)$	2	$\{(1111)\}$, $\{(211)\}$
$2(h)$	2	$\{(1111)\}(\alpha \neq 0 \neq \beta)$, $\{(1111)\}$, $\{(211)\}(\alpha = 0$ veya $\beta = 0)$
$2(j)$	2	$\{(1111)\}$
$2(k)$	2	$\{(1111)\}$, $\{1(111)\}$
$3(a)$	3	$\{(1111)\}$
$3(b)$	3	$\{(1111)\}$
$3(c)$	3	$\{(1111)\}$, $\{1(111)\}$
$3(d)$	3	$\{(1111)\}$, $\{(211)\}(\alpha = 0)$, $\{(1111)\}$ aksi durumda
$4(a)$	4	$\{(1111)\}$
$4(b)$	4	$\{(1111)\}$
$4(c)$	4	$\{(1111)\}$
5	5	$\{(1111)\}$
6	6	$\{(1111)\}$

Teorem 5.5.1 M, 4−boyutlu $(+,+,-,-)$ metrik işaretli düzgün manifold ve h, $m \in M$ noktasının boş olmayan, bağlantılı ve açık bir U komşuluğu üzerinde sıfırdan farklı, ikinci mertebeden simetrik bir tensör olsun. Bu takdirde, her dolanım cebri için, $\nabla h = 0$ denkleminin çözümleri Çizelge 5.2'nin 3.sütununda Segre tipleri cinsinden ifade edilmektedir. (h tensörü için $\{(1111)\}$ Segre tipi, başka bir deyişle, $c \neq 0$ ve $c \in \mathbb{R}$ için, $h = cg$ her zaman bir çözümdür.)

Yukarıda bulunanlara ek olarak, h tensörünün U kümesi üzerinde $\nabla h = 0$ koşulunu sağlayan özel bir çözümünün dejenere olmaması durumu gerçeklenmeyebilir. Yine de, $\nabla h' = 0$ koşulunu gerçekleyen ve h tensörü ile aynı Segre tipine sahip olan ikinci mertebeden simetrik, dejenere olmayan bir h' tensörünün var olması mümkündür. Bu durumda, h tensörünün bir çözümünün mevcut olması ve $h' = g + \delta h$ tensörü U kümesi üzerinde dejenere olmayacak şekilde bir $\delta \in \mathbb{R}$ seçilebilir, [28, 31]. Böylece, daha önce bulunan dolanım tipleri için, Teorem 5.5.1, alternatif metriklerin kümesi olarak da değerlendirilebilmektedir, [30, 35]. Ayrıca, söz konusu alternatif metrik nötr işaretli olmayabilir. Örneğin, $1(a)$ dolanım tipi için, $g + 2s \otimes s$ alternatif metriği göz önüne alındığı takdirde, nötr işaret Lorentz işaretine dönüşmektedir. Benzer şekilde, $1(b)$ dolanım tipi söz konusu ise, $g + 2s \otimes s + 2t \otimes t$ metriği ile birlikte nötr işaretten pozitif tanımlı işarete geçilebilmektedir. Bununla birlikte, bazı dolanım tipleri için metrik işaretinin değişimi söz konusu olmayabilir. Örneğin, $1(d)$ dolanım tipinde olduğu gibi, l ve L birbirine dik null vektör alanları olduğundan bu dolanım tipi için işaret değişimi mümkün değildir.

5.5.2 Öz reküran olma durumu

Bu kısımda, ikinci mertebeden simetrik tensörlerin öz reküran olması durumu incelenecektir. T, $U \subset M$ $(U \neq \emptyset)$ açık ve bağlantılı kümesi üzerinde sıfırdan farklı, ikinci mertebeden, simetrik ve öz reküran bir tensör olsun. Bu durumda, P, ilişkili 1-form olmak üzere, U kümesi üzerinde,

$$\nabla_c T_{ab} = T_{ab} P_c \tag{5.166}$$

bağıntısı gerçeklenmektedir.

Bölüm 5.5.1'de bahsedildiği üzere, eğer T tensörü öz reküran ise, Yardımcı Teorem 5.5.1'e göre, T tensörünün U kümesi üzerindeki özdeğerlerinin hepsi sıfır olmalıdır. Bu takdirde, T tensörünün incelenmesi gereken Segre tipleri, özdeğerlerinin hepsi sıfır olmak üzere, $\{(211)\}$, $\{(22)\}$, $\{(31)\}$ ve $\{4\}$ şeklindedir. İlk olarak, [44] numaralı makalede yer alan ve $\{4\}$ Segre tipi için yapılacak ispatı kısaltacak olan, aşağıdaki sonuç ifade edilecektir.

T, ikinci mertebeden simetrik ve reküran bir tensör olsun. Bu durumda, (5.166) koşulu sağlanır ve

$$T^{(n)}_{ab} = T_{ac} T^{c}{}_{d} \ldots T^{d}{}_{b} \tag{5.167}$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebeden simetrik $T^{(n)}$ tensörü ve (5.166) ve (5.167) denklemleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\nabla_e\left(T^{(n)}_{ab}\right) &= \nabla_e(T_{ac}T^c{}_d...T^d{}_b) \\
&= \nabla_e(T_{ac})T^c{}_d...T^d{}_b + T_{ac}(\nabla_e T^c{}_d)...T^d{}_b + ... + T_{ac}T^c{}_d...\nabla_e T^d{}_b \\
&= T_{ac}P_eT^c{}_d...T^d{}_b + T_{ac}T^c{}_dP_e...T^d{}_b + ... + T_{ac}T^c{}_d...T^d{}_bP_e \\
&= (nP_e)T_{ac}T^c{}_d...T^d{}_b \\
&= (nP_e)T^{(n)}_{ab} \qquad (5.168)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. O halde, (5.168) denklemine göre, $T^{(n)}$ tensörü, ilişkili 1-formu nP olan reküran bir tensördür. Dolayısıyla, T tensörünün reküran olması için gerek ve yeter koşul, $T^{(n)}$ tensörünün reküran olmasıdır.

Şimdi, T tensörünün öz reküran olma durumunu incelemek için, ilk olarak, T tensörünün özdeğeri sıfır olmak koşuluyla, Segre tipi $\{4\}$ durumu göz önüne alınırsa, l,n,L,N; U kümesi üzerinde null baz olmak üzere, (5.48) ifadesinden

$$T_{ab} = l_aL_b + L_al_b + \nu N_aN_b \qquad (5.169)$$

elde edilir. Burada, ν, U kümesi üzerinde sabittir ve tek şekilde belirlenen null özdoğrultu, l vektör alanı tarafından üretilir. Dolayısıyla, l reküran vektör alanıdır ve r, bu vektör alanının ilişkili 1-formu olmak üzere,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b \qquad (5.170)$$

koşulu gerçeklenir. Ayrıca, (5.25), (5.167) ve (5.169) denklemleri kullanılırsa,

$$T^{(2)}_{ab} = \nu(l_aN_b + N_al_b) \qquad (5.171)$$

bağıntısı mevcuttur. Buna göre, (5.171) denkleminin kovaryant türevi alınırsa ve (5.168), (5.170) bağıntıları kullanılırsa,

$$\nu\left(l_aN_br_c + l_a\nabla_cN_b + (\nabla_cN_a)l_b + N_al_br_c\right) = 2\nu(l_aN_b + N_al_b)P_c \qquad (5.172)$$

olarak bulunur. Bu durumda, (5.172) denklemi n^an^b ile çarpılırsa,

$$n^a(\nabla_bN_a) = 0 \qquad (5.173)$$

bulunur. Bununla birlikte, (5.172) denkleminde n^a üzerinden daraltma yapılırsa ve (5.173) denklemi kullanılırsa,

$$\nabla_b N_a = N_a(2P_b - r_b) \tag{5.174}$$

denklemi elde edilir. O halde, (5.174) koşuluna göre, N vektör alanı, ilişkili 1-formu $2P - r$ olan reküran bir vektör alanıdır.

Diğer taraftan, (5.25), (5.167), (5.169) ve (5.171) denklemleri kullanılırsa,

$$T^{(3)}_{ab} = \nu l_a l_b \tag{5.175}$$

olarak bulunur. Bu durumda, $T^{(3)}$ tensörü, ilişkili 1-formu $3P$ olan reküran bir tensördür. Buradan, (5.175) denkleminin kovaryant türevi alınırsa,

$$2r = 3P \tag{5.176}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece, (5.174) ve (5.176) denklemleri yardımıyla,

$$\nabla_b N_a = \frac{1}{2} N_a P_b \tag{5.177}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca, (5.169) denkleminin kovaryant türevi alırsa ve (5.166), (5.170), (5.176) ve (5.177) denklemleri kullanılırsa,

$$\nabla_b L_a = -\frac{1}{2} L_a P_b \tag{5.178}$$

elde edilir. O halde, (5.178) koşuluna göre, L, reküran vektör alanı olmalıdır. Bu durumda, l, N ve L vektör alanlarına Ricci özdeşliği uygulanırsa ve (5.170), (5.176), (5.177), (5.178) denklemleri kullanılırsa, sırasıyla,

$$l^a R_{abcd} = \frac{3}{2} l_b F_{cd}, \qquad N^a R_{abcd} = \frac{1}{2} N_b F_{cd}, \qquad L^a R_{abcd} = -\frac{1}{2} L_b F_{cd} \tag{5.179}$$

bağıntıları elde edilir. Burada, $F_{ab} = \nabla_b P_a - \nabla_a P_b$ şeklindedir ve T tensörü öz reküran olduğundan, $F \neq 0$ olmalıdır. Diğer taraftan, $R_{a[bcd]} = 0$ özdeşliği ve (5.179) bağıntıları göz önünde bulundurulursa,

$$l_{[a} F_{bc]} = N_{[a} F_{bc]} = L_{[a} F_{bc]} = 0 \tag{5.180}$$

bulunur. O halde, Yardımcı Teorem 5.2.1'den, F bivektörü basittir ve l, N, L vektör alanları, F bivektörünün blade'i içinde yer almaktadır. Bu ise, bir çelişkidir çünkü l, N

ve L vektörleri lineer bağımsızdır. Sonuç olarak, T tensörünün Segre tipi $\{4\}$ ise, bu tensörün öz reküran tensör olması mümkün değildir. Ayrıca, Çizelge 5.2'ye göre, bu Segre tipi için T tensörünün paralel tensör olamayacağı da söylenebilir.

Şimdi ise, T tensörünün tüm özdeğerleri sıfır olmak koşuluyla, Segre tipinin $\{(31)\}$ olması durumu göz önüne alındığı takdirde, l,n,s,y; U kümesi üzerinde bir baz olmak üzere, (5.47) ifadesinden,

$$T_{ab} = l_a y_b + y_a l_b \tag{5.181}$$

elde edilir. Bu takdirde, tek şekilde belirlenen null özdoğrultusu, l vektör alanı tarafından üretilmektedir. O halde, Yardımcı Teorem 5.5.1'in ispatında gösterildiği gibi, l, reküran vektör alanı olmalıdır. Bu durumda, (5.170) bağıntısı mevcuttur. Öte yandan, $l \wedge s$, (sıfır) özuzayı ile bu uzayın dik bütünleyeni olan $l \wedge y$, paralel kayma altında invaryant kalır. Böylece, $l \wedge y$ bivektörü rekürandır. Dolayısıyla, q, 1-formu için,

$$\nabla_c(l_a y_b - y_a l_b) = (l_a y_b - y_a l_b) q_c \tag{5.182}$$

koşulu gerçeklenmektedir. Bu takdirde, (5.182) ifadesi y^b ile çarpılırsa ve (5.170) denklemi kullanılırsa, $r = q$ olarak elde edilir. Bu sonuç, (5.182) denkleminde yerine yazılırsa,

$$l_a \nabla_c y_b - (\nabla_c y_a) l_b = 0$$

bulunur ve buradan,

$$\nabla_b y_a = l_a \rho_b \tag{5.183}$$

denklemi elde edilir. Buna göre, (5.166), (5.170), (5.181) ve (5.183) denklemleri yardımıyla,

$$l_a y_b r_c + 2 l_a l_b \rho_c + y_a l_b r_c = (l_a y_b + y_a l_b) P_c \tag{5.184}$$

bulunur. O halde, (5.184) denkleminden, $r = P$ ve $\rho = 0$ sonuçları elde edilir. Böylece, $\rho = 0$ sonucu, (5.183) denkleminde yerine yazılırsa, y (null olmayan) vektör alanının paralel vektör alanı olduğu görülür. Ayrıca, (5.181) ifadesi, y uzaysal vektör alanı yerine s zamansal vektör alanı alınarak da düzenlenebilmektedir. Dolayısıyla, söz konusu dolanım tipi, null ve öz reküran olan bir l vektör alanı ile bu vektör alanına dik olan ve null olmayan (uzaysal veya zamansal) paralel bir vektör alanı içermelidir. Bölüm 5.5.1'de incelendiği üzere, bu koşulları sağlayan muhtemel dolanım tipleri $1(a)$ ve $2(k)$ olmalıdır. Buna ek olarak, $P = r$ koşulu sağlandığından ve l, ilişkili 1-formu r

olan öz reküran bir vektör alanı olduğundan dolayı, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanının gradiyent vektör alanı olması mümkün değildir. Sonuç olarak, (5.181) ile verilen T tensörü öz reküran olacak şekilde inşa edilmiş olur.

Şayet, T tensörünün tüm özdeğerleri sıfır olmak üzere, Segre tipinin $\{(211)\}$ olması durumu göz önüne alınırsa, l,n,s,y bazına göre, (5.43) ifadesinden

$$T_{ab} = \pm l_a l_b \tag{5.185}$$

olarak bulunur.

Yukarıda incelenen dolanım tiplerine benzer şekilde, l vektör alanı reküran olduğundan, (5.166), (5.170) ve (5.185) denklemleri kullanılırsa,

$$2l_a l_b r_c = l_a l_b P_c \tag{5.186}$$

olarak elde edilir. Bu takdirde, (5.186) denkleminden, $2r = P$ bağıntısı bulunur. Bu bağıntıya göre, l vektör alanının öz reküran olması durumunda, T tensörü de öz reküran bir tensör olacaktır. O halde, Bölüm 5.5.1'den muhtemel dolanım tipleri, $1(a)$, $2(a)$, $2(b)$, $2(d)$, $2(h)$, $2(j)$, $2(k)$, $3(a)$, $3(b)$, $3(d)$ $(\alpha \neq 0)$ ve $4(c)$ şeklinde elde edilir.

Ayrıca, T tensörünün tüm özdeğerleri sıfır olmak üzere, Segre tipinin $\{(22)\}$ olması durumu incelenirse, l,n,L,N; U kümesi üzerinde null baz olmak üzere, T tensörü

$$T_{ab} = l_a L_b + L_a l_b, \qquad T_{ab} = l_a l_b + L_a L_b \tag{5.187}$$

denklemleri şeklinde yazılabilmektedir. Bu durumda, $l \wedge L$ sıfır özuzayı paralel kayma altında invaryant kalır. O halde, söz konusu bivektör reküran olmalıdır. Buna eşdeğer olarak, r,s,u ve v, 1-formları için,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b + L_a s_b, \qquad \nabla_b L_a = L_a v_b + l_a u_b \tag{5.188}$$

koşulları gerçeklenmektedir.

İlk olarak, T tensörünün $(5.187)_1$ formunda olduğu kabul edildiği takdirde, (5.166) denklemi göz önüne alınırsa ve (5.188) koşulları kullanılırsa,

$$(l_a L_b + L_a l_b)(r_c + v_c) + 2l_a l_b u_c + 2L_a L_b s_c = (l_a L_b + L_a l_b)P_c \tag{5.189}$$

olarak bulunur. Bununla birlikte, (5.189) denklemi, sırasıyla, $n^a n^b$ ve $N^a N^b$ ile çarpılırsa, $u = s = 0$ olarak bulunur. Diğer taraftan, (5.189) denkleminde $n^a N^b$

üzerinden daraltma yapılırsa, $r+v=P$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda, (5.188) koşulları,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b, \qquad \nabla_b L_a = L_a v_b \tag{5.190}$$

şekline indirgenir. O halde, (5.190) bağıntılarından, l ve L vektör alanlarının reküran vektör alanları olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla, T tensörünün öz reküran olması için gerek ve yeter koşul, l ve L vektör alanlarının reküran olması ve $r+v=P$ koşulunun sağlanmasıdır. Buna ek olarak, $P=r+v$ bağıntısı mevcut olduğundan, T tensörünün öz reküran olması için, l veya L vektör alanlarından en az birinin öz reküran vektör alanı olması yeterlidir. Böylece, muhtemel dolanım tipleri, $1(a)$, $2(a)$, $2(b)$, $2(d)$, $2(f)$, $2(h)$ ve $3(a)$ şeklindedir. Bu durumda, (5.145) ve (5.190) koşulları kıyaslanırsa, $2(f)$ dolanım tipinin mümkün olamayacağı görülmektedir. Aksi takdirde, T tensörü paralel tensör alanı olmak zorundadır. Ayrıca, $2(d)$ dolanım tipi için, (5.132) koşulları gerçeklendiğinden, l ve L vektör alanlarının reküran 1-formlarının toplamına karşılık gelen vektör alanı gradiyenttir. Bu takdirde, $P=r+v$ olduğundan, T tensörünün öz reküran olması mümkün değildir. Sonuç olarak, muhtemel dolanım tipleri, $1(a)$, $2(a)$, $2(b)$, $2(h)$ ve $3(a)$ şeklinde elde edilir.

İkinci olarak, T tensörünün $(5.187)_2$ formunda olduğu kabul edilirse ve (5.166), (5.188) denklemleri kullanılırsa,

$$2l_a l_b r_c + (l_a L_b + L_a l_b)(u_c + s_c) + 2L_a L_b v_c = (l_a l_b + L_a L_b)P_c \tag{5.191}$$

denklemi elde edilir. Buna göre, (5.191) denklemi, $n^a n^b$, $N^a N^b$ ve $n^a N^b$ ile çarpılırsa, $P=2r$, $r=v$ ve $u=-s$ olarak elde edilir. Bu koşullar altında, (5.188) denklemi,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b + L_a s_b, \qquad \nabla_b L_a = L_a r_b - l_a s_b \tag{5.192}$$

şeklinde yazılır. O halde, (5.192) koşullarına göre, $l \pm iL$ vektör alanları, kompleks reküran vektör alanlarıdır. Bölüm 5.5.1'e göre, bu koşulu sağlayan muhtemel dolanım tipleri, $2(a)$, $2(c)$ ve $2(f)$ şeklindedir. Fakat, $2(f)$ dolanım tipi için, (5.145) koşulları sağlandığından,

$$\nabla_b l_a = L_a w_b \quad \text{ve} \quad \nabla_b L_a = -l_a w_b$$

bağıntıları gerçeklenir. Bu takdirde, (5.192) koşullarına göre, $r=0$ olmalıdır. Buradan, $P=0$ olarak elde edilir. Dolayısıyla, $\nabla T = 0$ koşulu elde edilir. O halde, T tensörünün öz reküran olması mümkün değildir. Böylece, muhtemel dolanım tipleri, $2(a)$ ve $2(c)$ şeklinde elde edilir. Sonuç olarak, aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 5.5.2 M, $4-$boyutlu $(+,+,-,-)$ metrik işaretli, düzgün manifold ve T, M'nin bir açık alt kümesi üzerinde, sıfırdan farklı, ikinci mertebeden simetrik ve öz reküran bir tensör olsun. Bu durumda, T tensörünün bütün özdeğerlerinin sıfır olması koşuluyla, bu tensörün olası Segre tipleri, $\{(211)\}$, $\{(31)\}$ veya $\{(22)\}$ şeklindedir. Buna ek olarak, her bir Segre tipi için, dolanım tipleri ile ilişkilendirilecek şekilde T tensörünün inşa edilebilmesi mümkündür.

5.6 Ricci-Reküranlık

Bu kısımda, Ricci tensörünün reküran olması durumu, $4-$boyutlu, düz olmayan ve nötr işaretli (M,g) manifoldu üzerinde araştırılacaktır. Ricci tensörü M manifoldu üzerinde global bir tensör alanı olduğundan dolayı, bu tensör manifoldun belirli bir alt kümesi üzerinde sıfır olabilir. Bu durum ise, Teorem 5.3.1'de ifade edilen Ambrose-Singer Teoremi'nin uygulanması açısından problem teşkil edebilmektedir. Çünkü, bu teorem global olarak geçerlidir. Böyle bir karışıklığın oluşmasını önlemek için, bu kısımda Ricci tensörünün M manifoldu üzerinde, sıfırdan farklı ve reküran olduğu kabul edilecektir. Bu takdirde, M manifoldu üzerindeki P ilişkili 1-formu için,

$$\nabla_c S_{ab} = S_{ab} P_c \tag{5.193}$$

bağıntısı gerçeklenir. Aşağıdaki yardımcı teorem daha sonraki teoremlerin ispatı konusunda yardımcı olması amacıyla verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.6.1 (M,g) düzgün bir manifold ve k, bu manifoldun boştan farklı, açık ve bağlantılı bir U alt kümesi üzerinde reküran, düzgün bir vektör alanı olsun. Bu durumda, k vektör alanı, U kümesi üzerinde Ricci tensörünün bir özvektörüdür. Eğer k vektör alanı, $m \in U$ noktasının bir komşuluğu üzerinde paralel vektör alanı ise veya paralel bir vektör alanı ile orantılı ise, söz konusu özvektöre karşılık gelen özdeğer sıfır olmalıdır.

İspat: k, $U \subset M$ kümesi üzerinde reküran bir vektör alanı olsun. Bu takdirde, (5.17) koşulu sağlanır. Bölüm 5.1'de incelendiği üzere, eğer k vektör alanı null değilse, başka bir deyişle, uzaysal veya zamansal olan bir vektör alanı ise, $k.k$ iç çarpımı U üzerinde sıfırdan farklı olduğundan, bu vektör alanı U kümesi üzerinde paralel olacak şekilde düzenlenebilir. Bu durumda, Ricci özdeşliği kullanılırsa,

$$R^a{}_{bcd} k^d = 0$$

ve buradan,

$$S_{ab}k^b = 0 \tag{5.194}$$

sonucuna ulaşılır. O halde, (5.194) denklemine göre, k vektör alanı, Ricci tensörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen özvektörüdür.

Diğer taraftan, k null vektör alanı ise, (5.17) denklemi ve Ricci özdeşliği yardımıyla, $F_{ab} = \nabla_b q_a - \nabla_a q_b$ olmak üzere,

$$k^a R_{abcd} = k_b F_{cd} \tag{5.195}$$

şeklinde bulunur. Bu takdirde, $R_{a[bcd]} = 0$ özdeşliği ve (5.195) denkleminden,

$$k_{[b}F_{cd]} = 0 \tag{5.196}$$

olarak bulunur. Bu durumda, (5.196) denklemi ve Yardımcı Teorem 5.2.1'e göre, F bivektörü basittir ve k vektör alanı F'in blade'i içinde yer alır. Buna göre, (5.196) denklemi g^{bc} ile çarpılırsa, k vektör alanının Ricci tensörünün özvektörü olduğu sonucuna varılır. Ayrıca, bu özvektöre karşılık gelen özdeğer sıfır olmak zorunda değildir. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Şayet, Ricci tensörünün reküran olması durumu göz önüne alınırsa, Bölüm 5.5'de incelendiği üzere, Ricci tensörünün Segre tipi Teorem 5.5.2'de listelenen tiplerden herhangi biri değilse, bu tensör ikinci mertebeden simetrik ve paralel olan bir tensör alanı ile orantılıdır. Buna göre, Çizelge 5.2'den muhtemel Segre tipleri ve dolanım tipleri bulunabilir. Ayrıca, her dolanım tipi için, üretici bivektörler bilindiğinden dolayı, Riemann eğrilik tensörü hesaplanabilmektedir. Dolayısıyla, Ricci tensörünün de elde edilebilmesi mümkün olmaktadır. Bu problemde, Ricci tensörü için yalnızca muhtemel Segre tipleri (ve muhtemel dolanım tipleri) ele alınarak inceleme yapılacaktır. Bununla birlikte, bazı dolanım tipleri için örnekler verilerek, söz konusu durumun varlığı kanıtlanabilir (bkz. [55]).

Ricci tensörünün reküran olması problemi, Segre tipleri cinsinden aşağıda incelenmiştir. İlk olarak, $\{1111\}$ Segre tipi göz önüne alınsın. Bu takdirde, (5.39) ifadesinden, Ricci tensörü dejenere özdeğere sahip olmamak koşuluyla,

$$S_{ab} = \alpha x_a x_b + \beta y_a y_b - \gamma s_a s_b - \delta t_a t_b \tag{5.197}$$

biçiminde yazılır. Fakat, Çizelge 5.2 ve Teorem 5.5.1'e göre, söz konusu Segre tipinin mümkün olamayacağı görülmektedir.

Eğer Segre tipi $\{1(111)\}$ ise, $m \in M$ noktasının bir U komşuluğu üzerinde, null olmayan reküran bir vektör alanı vardır ve bu vektör alanı, Ricci tensörünün dejenere olmayan özdeğerine karşılık gelen özvektörüdür. Bu vektör alanı y ile gösterilsin. O halde, y vektör alanı paralel olacak şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu takdirde,

$$\nabla y = 0$$

koşulu sağlanır ve buradan, Ricci özdeşliğine göre,

$$S_{ab}y^b = 0 \tag{5.198}$$

olarak bulunur. Özdeğerlerin dejenere olması durumu dikkate alınırsa, (5.24) tamlık bağıntısı ile (5.197), (5.198) denklemleri kullanılarak, $\alpha \neq 0$ olmak üzere,

$$S_{ab} = \alpha(g_{ab} - y_a y_b) \tag{5.199}$$

şeklinde bulunur. Bununla birlikte, daraltılmış II. Bianchi özdeşliği yardımıyla, (3.19) denkleminden,

$$\nabla_a S^a{}_b = \frac{1}{2}\nabla_b r \left(= \frac{1}{2}\partial_b r\right) \tag{5.200}$$

bağıntısı mevcuttur. Bu durumda, (5.199) denkleminin kovaryant türevi alınırsa ve (5.200) denklemi kullanılırsa, α ve r skalerlerinin sabit olması gerektiği sonucuna ulaşılır. O halde, $\nabla S = 0$ olarak elde edilir. Çizelge 5.2'ye göre muhtemel dolanım tipleri, $1(a)$, $1(b)$, $1(c)$, $2(k)$ ve $3(c)$ şeklindedir. İlk olarak, $F = l \wedge n$ cebri ile birlikte $1(a)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, Riemann eğrilik tensörü, $a \neq 0$ $(a \in \mathbb{R})$ için

$$R_{abcd} = aF_{ab}F_{cd} = a(l_a n_b - n_a l_b)(l_c n_d - n_c l_d) \tag{5.201}$$

biçiminde yazılabilir. Bununla birlikte, (5.201) denklemi g^{ac} ile çarpılırsa,

$$S_{ab} = -a(l_a n_b + n_a l_b) \tag{5.202}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$S_{ab}l^b = -al_a, \quad S_{ab}n^b = -an_a, \quad S_{ab}L^b = S_{ab}N^b = 0 \tag{5.203}$$

bulunur. O halde, (5.203) koşullarından, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(11)(11)\}$ şeklinde elde edilir. Bu ise, Segre tipinin $\{1(111)\}$ olması ile çelişmektedir. Benzer şekilde, $F = x \wedge y$ cebri ile birlikte, $1(b)$ dolanım tipi ele alınırsa, Riemann eğrilik tensörü $a \neq 0$ $(a \in \mathbb{R})$ için,

$$R_{abcd} = aF_{ab}F_{cd} = a(x_a y_b - y_a x_b)(x_c y_d - y_c x_d) \tag{5.204}$$

dir. Bu durumda, (5.204) denklemi g^{ac} ile çarpılırsa,

$$S_{ab} = a(x_a x_b + y_a y_b) \tag{5.205}$$

elde edilir. Buna göre,

$$S_{ab}x^b = ax_a, \quad S_{ab}y^b = ay_a, \quad S_{ab}s^b = S_{ab}t^b = 0 \tag{5.206}$$

ifadeleri bulunur ve Ricci tensörünün Segre tipi $\{(11)(11)\}$ şeklinde elde edilir. O halde, Ricci tensörü için tekrar yanlış Segre tipi elde edilmiş olur.

Benzer şekilde, $F = l \wedge s$ cebrine sahip olan, $1(c)$ dolanım tipi göz önüne alındığı takdirde, Ricci tensörü,

$$S_{ab} = -al_a l_b \tag{5.207}$$

olarak bulunur. Bu durumda, (5.207) denkleminden, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ şeklinde elde edilir.

Şayet, $< F, G > = < l \wedge s, l \wedge n >$ cebri ile birlikte $2(k)$ dolanım tipi söz konusu ise, Riemann eğrilik tensörü

$$R_{abcd} = aF_{ab}F_{cd} + bG_{ab}G_{cd} + c(F_{ab}G_{cd} + G_{ab}F_{cd}) \tag{5.208}$$

biçiminde yazılır. Burada, a, b ve c katsayıları reel fonksiyonlardır. Bu takdirde, (5.208) denklemi g^{ac} ile çarpılırsa, $< y >^{\perp} = < l, n, s >$, $3-$boyutlu özuzayının elde edilebilmesi için, $a = c = 0$ koşulunun sağlanması gerektiği görülür. Bu durumda,

$$S_{ab}s^b = 0$$

olduğundan, Ricci tensörü için yanlış Segre tipi elde edilir.

Son olarak, $< x \wedge y, x \wedge t, y \wedge t >$ cebri ile birlikte $3(c)$ dolanım tipi göz önüne alınsın. Bu takdirde, $F = x \wedge y$, $G = x \wedge t$ ve $H = y \wedge t$ olmak üzere, Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R_{abcd} = {} & aF_{ab}F_{cd} + bG_{ab}G_{cd} + cH_{ab}H_{cd} + d(F_{ab}G_{cd} + G_{ab}F_{cd}) \\ & + e(F_{ab}H_{cd} + H_{ab}F_{cd}) + f(G_{ab}H_{cd} + H_{ab}G_{cd}) \end{aligned} \tag{5.209}$$

biçiminde yazılır. Bu durumda, (5.209) denkleminde g^{ac} üzerinden daraltma yapılırsa, Ricci tensörü

$$\begin{aligned} S_{ab} = a(x_a x_b + y_a y_b) - b(x_a x_b - t_a t_b) - c(y_a y_b - t_a t_b) + d(y_a t_b + t_a y_b) \\ - e(x_a t_b + t_a x_b) - f(x_a y_b + y_a x_b) \end{aligned} \tag{5.210}$$

formundadır. Buradan,

$$\begin{aligned} &S_{ab}x^b = (a-b)x_a - et_a - fy_a, \quad S_{ab}y^b = (a-c)y_a + dt_a - fx_a, \\ &S_{ab}t^b = -(b+c)t_a - dy_a + ex_a, \quad S_{ab}s^b = 0 \end{aligned} \tag{5.211}$$

şeklinde elde edilir. Eğer $d = e = f = 0$ ve $b = c = -a \neq 0$ koşulları sağlanıyorsa, Segre tipi $\{1(111)\}$ olarak elde edilir. Sonuç olarak, Ricci tensörünün Segre tipi $\{1(111)\}$ ise, mümkün olan dolanım tipi yalnızca $3(c)$ şeklinde bulunur.

Şimdi ise, Ricci tensörünün uzaysal özuzayları $x \wedge y$ ve $s \wedge t$ olmak üzere, $\{(11)(11)\}$ Segre tipi göz önüne alınsın. Bu takdirde, Yardımcı Teorem 5.5.1 ve Teorem 5.5.1'e göre, Ricci tensörü paralel bir tensör alanı ile orantılı olmalıdır. Öte yandan, $x \wedge y$ ve $s \wedge t$ özuzayları invaryant olduğundan,

$$\nabla_c(x_a x_b + y_a y_b) = \nabla_c(s_a s_b + t_a t_b) = 0 \tag{5.212}$$

koşulları sağlanır. Bu durumda, $\alpha \neq \beta$ için, Ricci tensörü

$$S_{ab} = \alpha(x_a x_b + y_a y_b) - \beta(s_a s_b + t_a t_b) \tag{5.213}$$

şeklinde yazılmaktadır. Buradan, skaler eğrilik,

$$r = 2(\alpha + \beta) \tag{5.214}$$

olarak bulunur. Bu takdirde, (5.193) ve (5.213) denklemleri göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} (\partial_c \alpha)(x_a x_b + y_a y_b) - (\partial_c \beta)(s_a s_b + t_a t_b) = (\alpha(x_a x_b + y_a y_b) \\ - \beta(s_a s_b + t_a t_b))P_c \end{aligned} \tag{5.215}$$

elde edilir. Buna göre, (5.215) denklemi $x^a x^b$ ve $s^a s^b$ ile çarpılırsa, sırasıyla,

$$\partial_a \alpha = \alpha P_a, \quad \partial_a \beta = \beta P_a \tag{5.216}$$

bağıntıları elde edilir. Sonuç olarak, (5.216) denkleminden

$$\alpha\partial_a\alpha + \beta\partial_a\beta = (\alpha^2 + \beta^2)P_a \tag{5.217}$$

bulunur.

Eğer α ve β sıfırdan farklı fonksiyonlar ise, (5.216) denkleminden, $\kappa \neq 0$ olmak üzere, $\alpha = \kappa\beta$ bulunur. Bu bağıntı ile birlikte (5.200), (5.213) ve (5.214) denklemleri kullanılırsa, α ve β sabit olarak elde edilir. O halde, (5.213) ve (5.214) denklemlerinden, $\nabla S = 0$ koşulu sağlanır ve r skaler eğriliğinin sabit olduğu sonucuna ulaşılır. Bununla birlikte, α veya β skalerlerinin herhangi biri sıfır olduğu takdirde, örneğin $\alpha = 0$ ise, (5.193) ve (5.213) denklemleri kullanılarak,

$$\nabla_c S_{ab} = S_{ab}\partial_c(\log|\beta|) \tag{5.218}$$

bulunur. Çizelge 5.2'ye göre, muhtemel dolanım tipleri, $1(b)$ ve $2(e)$ olarak elde edilir. Şayet, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(11)(11)\}$ ve zamansal özuzayları olduğu takdirde, söz konusu dolanım tipleri, $1(a)$ ve $2(b)$ olarak elde edilir.

Diğer taraftan, Ricci tensörünün Segre tipi uzaysal $2-$boyutlu özuzaya sahip olmakla birlikte $\{(11)11\}$ ise, (5.24) tamlık bağıntısı ve (5.39) ifadesi kullanılırsa, $\zeta \neq 0$, $\eta \neq 0$ ve $\zeta \neq \eta$ olmak üzere,

$$S_{ab} = \alpha g_{ab} - \zeta s_a s_b - \eta t_a t_b \tag{5.219}$$

şeklinde bulunur. Bu takdirde, (5.219) ifadesinden, s ve t vektör alanları, Ricci tensörünün dejenere olmayan, birbirinden bağımsız ve paralel olan özvektörleridir. O halde, Ricci özdeşliği ve (5.219) ifadesi yardımıyla,

$$\begin{aligned} S_{ab}s^b &= (\alpha + \zeta)s_a = 0 \qquad (5.220)\\ S_{ab}t^b &= (\alpha + \eta)t_a = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda, (5.220) koşullarından, $\zeta = \eta$ çelişkisi elde edilir. Benzer şekilde, zamansal $2-$boyutlu özuzay ile birlikte Segre tipinin $\{(11)11\}$ olamayacağı gösterilebilir. O halde, söz konusu problem için, Ricci tensörünün $\{(11)11\}$ Segre tipinde olması mümkün değildir.

Şayet, Ricci tensörünün $\{(1111)\}$ Segre tipinde olduğu kabul edilirse, (M, g) manifoldu Einstein manifoldudur ve dolayısıyla, manifoldun r skaler eğriliği sabittir.

Başka bir deyişle, (3.1) denklemi kullanılırsa, lokal koordinatlarda,

$$S_{ab} = \frac{r}{4} g_{ab} \tag{5.221}$$

koşulu gerçeklenir. Bununla birlikte, Ricci tensörü M manifoldu üzerinde rekürandır fakat, öz reküran değildir. O halde, Çizelge 5.2'de verilen dolanım tiplerinin hepsi muhtemeldir. Bu yüzden, bütün dolanım tipleri için, Einstein manifoldu olma durumu kontrol edilmelidir. Buna ek olarak, eğer (M, g) Einstein manifoldu ise, her $m \in M$ için, $\overset{+}{S}_m$ ve $\overset{-}{S}_m$ uzayları, (5.1) ile verilen eğrilik dönüşümünün invaryant uzaylarıdır. Bu durumda, ϕ dolanım cebri için $\widetilde{S_m}$ kümesinin elemanlarından oluşan bir baz seçildiği takdirde, Riemann eğrilik tensörünün bu baza göre açılımında, $\overset{+}{S}_m$ ve $\overset{-}{S}_m$ kümelerinin elemanlarının çapraz çarpımlarının meydana gelmesi mümkün değildir, [49]. Böylece, M manifoldunun her dolanım tipi için, Einstein manifoldu olma koşulunu sağlaması durumları aşağıda incelenmiştir.

İlk olarak, (5.202), (5.205) ve (5.207) denklemlerine göre, Ricci tensörünün Einstein manifoldu olma koşulunu sağlamayacağı görülmektedir. Öte yandan, $l \wedge L$ cebri ile birlikte $1(d)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, Riemann eğrilik tensörü,

$$R_{abcd} = a(l_a L_b - L_a l_b)(l_c L_d - L_c l_d) \tag{5.222}$$

biçiminde olacağından, (5.222) denklemi g^{ac} ile çarpılırsa,

$$S_{ab} = 0 \tag{5.223}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, $1(d)$ dolanım tipi için, otomatik olarak, Ricci-düz manifold elde edilir.

Eğer, $2(a)$ dolanım tipi söz konusu ise, l vektör alanı reküran olduğundan, (5.108) koşullarının birincisine göre, G bivektörü için

$$l^a R_{abcd} = l_b G_{cd} \tag{5.224}$$

bağıntısı gerçeklenir. Bu takdirde, (5.224) denklemi ve $R_{a[bcd]} = 0$ özdeşliği yardımıyla,

$$G_{[ab} l_{c]} = 0 \tag{5.225}$$

olarak elde edilir. O halde, (5.225) denklemi ve Yardımcı Teorem 5.2.1'e göre, G bivektörü basittir ve l vektör alanı G bivektörünün blade'i içinde yer alır. Bununla birlikte, $F = l \wedge n - L \wedge N$ ve $H = l \wedge N$ olmak üzere, Riemann eğrilik tensörü,

$$R_{abcd} = aF_{ab}F_{cd} + bH_{ab}H_{cd} + c(F_{ab}H_{cd} + H_{ab}F_{cd}) \tag{5.226}$$

olarak yazılır. Bu durumda, (5.226) denklemi l^a ile çarpılırsa ve (5.224) ifadesi kullanılırsa, $G = -aF - cH$ olarak bulunur. O halde, G bivektörü basit olduğundan ve F bivektörü basit olmadığından dolayı, $a = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Bu sonuç (5.226) denkleminde kullanılırsa, Ricci tensörünün (5.223) koşulunu sağlayacağı görülür. Böylece, $2(a)$ dolanım tipi için de Ricci-düz manifold elde edilir.

Diğer taraftan, $F = l \wedge n$ ve $G = L \wedge N$ olmak üzere, $2(b)$ dolanım tipi ele alınırsa ve l, n, L, N vektör alanlarının reküran olduğu kullanılırsa, (5.208) denkleminde daraltma yapılarak Ricci tensörü,

$$S_{ab} = -a(l_a n_b + n_a l_b) - b(L_a N_b + N_a L_b) \tag{5.227}$$

olarak elde edilir. Bu durumda, (5.227) denkleminde a ve b katsayıları birbirine eşit ve sabit olduğu takdirde, (5.27) tamlık bağıntısı kullanılarak, (M, g) manifoldunun Einstein manifoldu olabileceği görülmektedir.

Benzer şekilde, $2(c)$ dolanım tipi için, $F = l \wedge n - L \wedge N$ ve $G = l \wedge L + n \wedge N$ olmak üzere, Ricci tensörü

$$S_{ab} = (b - a)g_{ab} + 2c(n_a N_b + N_a n_b - l_a L_b - L_a l_b) \tag{5.228}$$

olarak elde edilir. O halde, (5.228) denklemine göre, $a \neq b$ ve $c = 0$ olduğu takdirde, M manifoldunun Einstein manifoldu olabilmesi mümkündür.

Şayet, $F = l \wedge n - L \wedge N$ ve $G = l \wedge L$ ise, $2(d)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, $2(a)$ tipinde olduğu gibi, l vektör alanının reküran olduğu kullanılarak, (5.208) açılımındaki a katsayısını yok etmek mümkündür. Yukarıda belirtildiği üzere, (M, g) Einstein manifoldu ise, $F \in \overset{+}{S}_m$ ve $G \in \overset{-}{S}_m$ olduğundan, $c = 0$ bulunur. Bu takdirde, (5.208) denklemine göre, eğrilik dönüşümünün değer uzayı $< G >$ olarak bulunur. O halde, l vektör alanı reküran olduğundan ve ϕ cebri, yalnızca blade'i l vektör alanını içeren ve tamamen null olan elemanları kapsadığından, Teorem 5.3.1 ile verilen Ambrose-Singer Teoremi'ne göre çelişki elde edilir. Böylece, $2(d)$ dolanım tipi için, (M, g) manifoldunun Einstein manifoldu olması mümkün değildir.

Şayet, $F = x \wedge y$ ve $G = s \wedge t$ ise, $2(e)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, F ve G bivektörleri basit olduğundan, Yardımcı Teorem 5.2.1'e göre,

$$F_{a[b}F_{cd]} = G_{a[b}G_{cd]} = 0 \tag{5.229}$$

koşulları gerçeklenir. Bu durumda, $F_{a[b}G_{cd]} + G_{a[b}F_{cd]}$ terimlerinin sıfırlanmadığı dikkate alınırsa ve $R_{a[bcd]} = 0$ özdeşliği kullanılırsa, (5.208) denkleminde, $c = 0$ olarak bulunur. Bu takdirde, Ricci tensörü

$$S_{ab} = a(x_a x_b + y_a y_b) - b(t_a t_b + s_a s_b) \tag{5.230}$$

şeklindedir. O halde, (5.230) denkleminde, $a = b \neq 0$ ve bu katsayıların sabit olması durumunda, (5.24) tamlık bağıntısı yardımıyla, Einstein manifoldu olma koşulunun sağlanması mümkündür.

Daha sonra, $< F, G > = < l \wedge N + n \wedge L, l \wedge L >$ olmak üzere, $2(f)$ dolanım tipi ele alınırsa, $F \in \overset{+}{S}_m$ ve $G \in \overset{-}{S}_m$ olduğundan, (M, g) manifoldunun Einstein manifoldu olma koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul, (5.208) denkleminde, $c = 0$ olmasıdır. Bu takdirde, (5.208) denkleminde g^{ac} üzerinden daraltma yapılırsa, M manifoldunun Einstein manifoldu olabileceği görülür.

Bununla birlikte, $F = l \wedge N$ ve $G = l \wedge L$ olmak üzere, $2(g)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa ve (5.208) denklemi kullanılırsa,

$$S_{ab} = 2c l_a l_b \tag{5.231}$$

olarak bulunur. Bu durumda, (5.231) denklemine göre, M manifoldunun Einstein manifoldu olması mümkün değildir.

Diğer taraftan, $F = l \wedge N$, $G = \alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N)$ $(\alpha \neq \pm\beta)$ olmak üzere, $2(h)$ dolanım tipi göz önüne alındığı takdirde, Ricci tensörü

$$S_{ab} = b[-\alpha^2 g_{ab} + (\alpha^2 - \beta^2)(L_a N_b + N_a L_b)] - c(\alpha + \beta)(l_a N_b + N_a l_b) \tag{5.232}$$

şeklinde elde edilir. O halde, $\alpha \neq \pm\beta$ olduğundan, (5.232) denklemine göre, Einstein manifoldu olma koşulunun gerçeklenmesinin mümkün olmadığı görülmektedir. Benzer şekilde, $2(j)$ $(\alpha \neq 0 \neq \beta)$ ve $2(k)$ dolanım tipleri için de, Einstein manifoldunun elde edilebilmesinin mümkün olamayacağı gösterilebilir.

Benzer şekilde, $3-$boyutlu dolanım tipleri için Einstein manifoldu olma koşulları incelenebilir. Bunun için, ilk olarak, $F = l \wedge n$, $G = l \wedge N$ ve $H = L \wedge N$ bivektörleri ile birlikte, $3(a)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa ve (5.209) denkleminde g^{ac} üzerinden daraltma yapılırsa, Ricci tensörü

$$S_{ab} = -a(l_a n_b + n_a l_b) - c(L_a N_b + N_a L_b) - (d+f)(l_a N_b + N_a l_b) \tag{5.233}$$

olarak bulunur. Buna göre, (5.233) ifadesinde, $a = c$ ve $d = -f$ olması durumunda, (5.27) tamlık bağıntısı yardımıyla,

$$S_{ab} = -a g_{ab} \tag{5.234}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, (5.234) denkleminden, (M,g) manifoldunun Einstein manifoldu olma koşulunu sağlaması mümkündür.

Daha sonra, $F = l \wedge n - L \wedge N$, $G = l \wedge N$, $H = l \wedge L$ bivektörleri ile birlikte, $3(b)$ dolanım tipi göz önüne alındığı takdirde,

$$S_{ab} = -a g_{ab} - 2e(l_a L_b + L_a l_b) + 2f l_a l_b \tag{5.235}$$

ifadesi elde edilir. O halde, (5.235) denkleminde, $e = f = 0$ ve $a \neq 0$ olması durumunda, (M,g), Einstein manifoldu olarak elde edilir.

Bununla birlikte, $3(c)$ ve $3(d)$ dolanım tipleri için, M manifoldunun Einstein manifoldu olması mümkün değildir. Örneğin, $3(d)$ dolanım tipi söz konusu ise, $F = l \wedge N, G = l \wedge L, H = \alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N)$ $(\alpha \neq \pm\beta)$ olmak üzere, (5.209) denklemi yardımıyla,

$$\begin{aligned} S_{ab} = &-c[\alpha^2(l_a n_b + n_a l_b) + \beta^2(L_a N_b + N_a L_b)] + 2d l_a l_b \\ &- e(\alpha+\beta)(l_a N_b + N_a l_b) + f(\beta - \alpha)(l_a L_b + L_a l_b) \end{aligned} \tag{5.236}$$

olarak bulunur. Bu durumda, $\alpha \neq \pm\beta$ olduğundan, (5.236) denklemine göre, (M,g) manifoldunun Einstein manifoldu olması mümkün değildir. Benzer şekilde, $F = x \wedge y$, $G = x \wedge t$ ve $H = y \wedge t$ olmak üzere, (5.210) denkleminden, $3(c)$ dolanım tipi için de M manifoldunun Einstein manifoldu olma koşulunu sağlamasının mümkün olmadığı görülür. Bütün bunlara ek olarak, önceki dolanım tiplerinde izlenen yollara benzer şekilde, 4, 5 ve $6-$boyutlu dolanım tipleri için, Riemann eğrilik tensörünün açılımı kullanılırsa, (M,g) manifoldunun Einstein manifoldu olması mümkün olacaktır. Sonuç olarak, $1(a)$, $1(b)$, $1(c)$, $2(d)$, $2(g)$, $2(h)$, $2(j)$, $2(k)$, $3(c)$ ve $3(d)$ dolanım tipleri söz konusu ise, M manifoldunun Einstein manifoldu olması mümkün değildir. Ayrıca, $1(d)$

ve $2(a)$ dolanım tipleri ele alındığı takdirde, Ricci-düz manifold elde edilmektedir. Bu dolanım tipleri dışında, M manifoldunun Einstein manifoldu olabilmesi mümkündür.

Diğer taraftan, Çizelge 5.2, Teorem 5.5.1 ve Teorem 5.5.2'ye göre, reküran Ricci tensörü için, $\{11z\bar{z}\}$ ve $\{z\bar{z}w\bar{w}\}$ Segre tiplerinin meydana gelmesi mümkün değildir. Ayrıca, $\{(11)z\bar{z}\}$ Segre tipi için, (5.40) ifadesinden, $\alpha = \beta$ ve $\delta \neq 0$ olmak üzere,

$$S_{ab} = \alpha g_{ab} + (\gamma - \alpha)(l_a n_b + n_a l_b) + \delta(l_a l_b - n_a n_b) \tag{5.237}$$

olarak elde edilir. Bu takdirde, $l \pm in$ kompleks reküran vektör alanlarıdır. O halde,

$$\nabla_b(l_a + in_a) = (l_a + in_a)(r_b + is_b) \tag{5.238}$$

koşulu gerçeklenir. Buradan, (5.238) denklemine göre,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b - n_a s_b, \quad \nabla_b n_a = l_a s_b + n_a r_b \tag{5.239}$$

olarak bulunur. Bu durumda, (5.25) denklemi ve (5.239) bağıntıları kullanılırsa, $r = s = 0$ sonucuna ulaşılır. O halde, (5.239) bağıntılarından, l ve n vektör alanlarının paralel olduğu elde edilir. Bu takdirde, Ricci özdeşliği ve (5.237) ifadesi yardımıyla,

$$S_{ab} l^b = \gamma l_a - \delta n_a = 0 \tag{5.240}$$

bulunur. Böylece, (5.240) denkleminden, $\delta = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, Ricci tensörünün $\{(11)z\bar{z}\}$ Segre tipinde olması mümkün değildir.

Şimdi ise, Ricci tensörünün $\{(zz)(\bar{z}\bar{z})\}$ Segre tipinde olduğu kabul edilsin. Bu durumda, Bölüm 5.5.1'de incelendiği üzere, Ricci tensörü paralel bir tensör alanı ile orantılı olmalıdır ve Çizelge 5.2'den, muhtemel dolanım tipi $2(c)$ olmalıdır. Dolayısıyla, (5.228) denklemi elde edilir. Bu denklem (5.42) ifadesi ile karşılaştırıldığı takdirde, Segre tipinin uyuştuğu görülmektedir. Buna ek olarak, (5.228) denkleminin kovaryant türevi alınırsa ve (5.193) reküran olma koşulu kullanılırsa,

$$\partial_c(b - a) = (b - a)P_c, \quad \partial_a c = cP_a$$

bağıntıları elde edilir.

Çizelge 5.2, Teorem 5.5.1 ve Teorem 5.5.2'den, $\{211\}$ ve $\{2z\bar{z}\}$ Segre tiplerinin oluşması söz konusu değildir. Eğer, Ricci tensörünün $\{2(11)\}$ Segre tipinde olduğu kabul edilirse, Ricci tensörü paralel bir tensör alanı ile orantılıdır ve Teorem 5.5.2'ye göre, bu tensörün öz reküran olması mümkün değildir. Çizelge 5.2'ye göre, muhtemel olan dolanım tipi $1(a)$ olarak bulunur. Böylece, Ricci tensörü (5.202) formundadır ve (5.203) koşulları mevcut olacağından, $\{2(11)\}$ Segre tipinin meydana gelmesi mümkün değildir. Benzer şekilde, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(21)1\}$ olması durumunda, bu tensör paralel bir tensör alanı ile orantılıdır ve öz reküran olma durumu söz konusu olamaz. Çizelge 5.2'ye göre, olası dolanım tipi $1(c)$ olarak bulunur. Ancak, (5.207) denklemine göre, $\{(21)1\}$ Segre tipinin mümkün olamayacağı görülmektedir.

Şayet, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(211)\}$ olduğu kabul edilirse, $\lambda \neq 0$ olmak üzere, Ricci tensörü,

$$S_{ab} = \alpha g_{ab} + \lambda l_a l_b \tag{5.241}$$

biçiminde yazılır. Eğer (5.241) denkleminde $\alpha \neq 0$ ise, Yardımcı Teorem 5.5.1'e göre, Ricci tensörünün P ilişkili 1-formuna karşılık gelen vektör alanı gradiyent olmalıdır. Bu takdirde, (5.193) ve (5.241) denklemlerinden, l null özdoğrultusunun reküran olduğu elde edilir. O halde, r ilişkili 1-form olmak üzere,

$$\nabla_b l_a = l_a r_b \tag{5.242}$$

koşulu sağlanır. Daha sonra, (5.241) denkleminin kovaryant türevi alınırsa ve (5.193), (5.242) denklemleri kullanılırsa, ilişkili 1-formlar arasında, $2r = P$ bağıntısının mevcut olduğu görülür. Bu durumda, P, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı gradiyent olduğundan, r, 1-formuna karşılık gelen vektör alanı da gradiyent olmalıdır. O halde, l vektör alanı paralel olacak şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu takdirde, Ricci özdeşliğine göre, $R_{abcd}l^d = 0$ ve dolayısıyla, $S_{ab}l^b = 0$ olduğundan, (5.241) denkleminden, $\alpha = 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $\{(211)\}$ Segre tipi için, Ricci tensörünün özdeğerlerinin hepsi sıfır olmalıdır. İlk olarak, $\nabla S = 0$ koşulu sağlanıyorsa veya Ricci tensörü paralel bir tensör alanı ile orantılı ise, Çizelge 5.2'ye göre, olası dolanım tipleri $1(a)$, $1(c)$, $1(d)$, $2(g)$, $2(h)$ ($\alpha = 0$ veya $\beta = 0$) ve $3(d)$ ($\alpha = 0$) olarak elde edilir. Öncelikle, $1(a)$ dolanım tipi için, Ricci tensörü (5.202) formundadır ve (5.203) koşullarına göre Segre tipi $\{(11)(11)\}$ olmalıdır. O halde, bu dolanım tipi için Ricci tensörünün $\{(211)\}$ Segre tipinde olması mümkün değildir. Bununla birlikte, $1(c)$ ve $2(g)$ dolanım tipleri için, Ricci tensörü (5.207) ve (5.231) denklemlerini sağladığından dolayı, bu tensörün Segre tipi doğrudan $\{(211)\}$ olmalıdır. Ayrıca, $1(d)$ dolanım tipi için, (5.223) denklemine göre, Ricci-düz uzay elde edilir. Şayet, $\alpha = 0$

olmak üzere, $2(h)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, (5.232) denkleminden,

$$S_{ab} = -b\beta^2(L_aN_b + N_aL_b) - c\beta(l_aN_b + N_al_b) \qquad (5.243)$$

bulunur. Dolayısıyla, (5.243) ifadesine göre, Ricci tensörünün $\{(211)\}$ Segre tipinde olamayacağı görülür. Benzer şekilde, $\beta = 0$ olduğu takdirde, (5.232) denklemine göre, $\{(211)\}$ Segre tipinin elde edilmesi mümkün değildir. Son olarak, $\alpha = 0$ olmak üzere, $3(d)$ dolanım tipi söz konusu ise, (5.236) denkleminden Ricci tensörü,

$$S_{ab} = -c\beta^2(L_aN_b + N_aL_b) + 2dl_al_b - e\beta(l_aN_b + N_al_b) + f\beta(l_aL_b + L_al_b) \qquad (5.244)$$

şeklinde elde edilir. Ricci tensörünün $\{(211)\}$ Segre tipinde olabilmesi için, (5.244) denklemine göre, $c = e = f = 0$ olmalıdır. Fakat bu durumda, (5.209) açılımından, eğrilik dönüşümünün değer uzayı yalnızca F ve G bivektörleri tarafından gerilir ve Ambrose-Singer Teoremi'ne göre çelişki elde edilir. Sonuç olarak, Ricci tensörü paralel ise veya paralel bir tensör ile orantlı ise, $\{(211)\}$ Segre tipi için mümkün olan dolanım tipleri yalnızca $1(c)$ ve $2(g)$ şeklinde elde edilir.

Eğer, Ricci tensörü öz reküran ve özdeğerlerinin hepsi sıfır olmak üzere, Segre tipinin $\{(211)\}$ olduğu kabul edilirse ve (5.43) ifadesi kullanılırsa Ricci tensörü,

$$S_{ab} = \pm l_al_b \qquad (5.245)$$

biçiminde yazılır. Bu durumda, (5.245) ifadesinin kovaryant türevi alınırsa ve (5.193), (5.242) denklemleri kullanılırsa, ilişkili 1-formlar arasında, $2r = P$ bağıntısı mevcut olacaktır. Bu bağıntıya göre, Ricci tensörünün öz reküran olması için gerek ve yeter koşul, l vektör alanının öz reküran olmasıdır. O halde, Çizelge 5.1 yardımıyla mümkün olan dolanım tipleri, $1(a)$, $2(a)$, $2(b)$, $2(d)$, $2(h)$, $2(j)$, $2(k)$, $3(a)$, $3(b)$, $3(d)$ $(\alpha \neq 0)$ ve $4(c)$ olarak bulunur. Yukarıda incelenenlere benzer şekilde, $1(a)$, $2(a)$, $2(b)$, $2(d)$, $2(h)$, $2(k)$, $3(a)$ ve $3(d)$ dolanım tiplerinin mümkün olmadığı görülmektedir. Öncelikle, $1(a)$ dolanım tipi için, $\{(11)(11)\}$ Segre tipi elde edildiğinden dolayı, bu dolanım tipi mevcut olamamaktadır. Diğer taraftan, $2(a)$ dolanım tipi Ricci-düz uzay verdiğinden dolayı, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(211)\}$ olması mümkün değildir. Bununla birlikte, $2(b)$ dolanım tipi için, Ricci tensörü (5.227) formunda olduğundan, $\{(211)\}$ Segre tipi mevcut değildir. Benzer şekilde, $2(d)$, $2(h)$ ve $2(k)$ dolanım tipleri için Ricci tensörü hesaplandığı takdirde, bu Segre tipinin meydana gelmesi söz konusu olamaz. Örneğin, $2(k)$ dolanım tipi için, $F = l \wedge y$ ve $G = l \wedge n$ olmak üzere, (5.208) ifadesinde daraltma yapılırsa Ricci tensörü,

$$S_{ab} = al_a l_b - b(l_a n_b + n_a l_b) - c(l_a y_b + y_a l_b) \tag{5.246}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(211)\}$ olması için, (5.246) denkleminde, $b = c = 0$ koşullarının gerçeklenmesi gerekir. Bu koşullara göre, (5.208) ifadesinden, ϕ cebri null veya tamamen null olan elemanlardan oluşmaktadır ve böylece, Ambrose-Singer Teoremi'nden çelişki elde edilir.

Ayrıca, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm\beta$ ve $\phi =< F, G, H >=< l \wedge N, l \wedge L, \alpha(l \wedge n) + \beta(L \wedge N) >$ olmak üzere, $3(d)$ dolanım tipi söz konusu ise, (5.209) ifadesinde g^{ac} üzerinden daraltma yapılırsa, (5.236) denklemi elde edilir. Bu takdirde, Ricci tensörünün $\{(211)\}$ Segre tipinde olması için, $c = e = f = 0$ bağıntıları sağlanmalıdır. Bu bağıntılar (5.209) denkleminde yerine yazılırsa, f eğrilik dönüşümünün değer uzayının F ve G bivektörleri tarafından gerildiği sonucuna ulaşılır. Ayrıca, l vektör alanı reküran olduğundan, ϕ cebrinin her elemanı l'yi içeren null veya tamamen null bivektörlerden oluşur. Fakat bu durumda, Ambrose-Singer Teoremi kullanıldığı takdirde çelişki elde edilir.

Diğer taraftan, $F = l \wedge N$, $G = \alpha(l \wedge n - L \wedge N) + \beta(l \wedge L)$ olmak üzere, $2(j)$ dolanım tipi söz konusu ise, (5.208) denkleminde g^{ac} üzerinden daraltma yapılırsa,

$$S_{ab} = -b\alpha^2 g_{ab} - 2b\alpha\beta(l_a L_b + L_a l_b) + 2c\beta l_a l_b \tag{5.247}$$

olarak bulunur. Bu takdirde, (5.247) denklemine göre, Ricci tensörünün $\{(211)\}$ Segre tipinde olması için, $b = 0$ olmalıdır. O halde, $2(j)$ dolanım tipi için, $\{(211)\}$ Segre tipinin elde edilmesi mümkündür. Benzer şekilde, (5.235) denklemi kullanılırsa, $3(b)$ dolanım tipi için de Ricci tensörü $\{(211)\}$ Segre tipinde olabilir. Son olarak, $F = l \wedge L$, $G = l \wedge N$, $H = l \wedge n$, $J = L \wedge N$ bivektörleri ile birlikte, $4(c)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, Riemann eğrilik tensörü,

$$\begin{aligned} R_{abcd} = {} & aF_{ab}F_{cd} + bG_{ab}G_{cd} + cH_{ab}H_{cd} + dJ_{ab}J_{cd} + e(F_{ab}G_{cd} + G_{ab}F_{cd}) \\ & + f(F_{ab}H_{cd} + H_{ab}F_{cd}) + g(F_{ab}J_{cd} + J_{ab}F_{cd}) + h(G_{ab}H_{cd} + H_{ab}G_{cd}) \\ & + k(G_{ab}J_{cd} + J_{ab}G_{cd}) + l(H_{ab}J_{cd} + J_{ab}H_{cd}) \end{aligned} \tag{5.248}$$

olarak yazılır. Bu takdirde, (5.248) ifadesinde g^{ac} üzerinden daraltma yapılırsa,

$$\begin{aligned} S_{ab} = & -c(l_a n_b + n_a l_b) - d(L_a N_b + N_a L_b) + 2e l_a l_b \\ & + (g-f)(l_a L_b + L_a l_b) - (h+k)(l_a N_b + N_a l_b) \end{aligned} \tag{5.249}$$

şeklinde bulunur. Böylece, (5.248) ve (5.249) denklemleri karşılaştırılırsa, Ricci tensörü $\{(211)\}$ Segre tipinde olabilir. Sonuç olarak, öz reküran olan Ricci tensörü $\{(211)\}$ Segre tipinde ise, mümkün olan dolanım tipleri $2(j)$, $3(b)$ ve $4(c)$ şeklinde elde edilir.

Eğer, Ricci tensörünün Segre tipi $\{31\}$ olarak kabul edilirse, Teorem 5.5.1 ve Teorem 5.5.2'ye göre, reküran Ricci tensörü için söz konusu Segre tipinin meydana gelmesi mümkün değildir. O halde, $\{(31)\}$ Segre tipi göz önüne alınırsa ve Ricci tensörü paralel ise veya paralel bir tensör alanı ile orantılı ise, Çizelge 5.2'ye göre muhtemel dolanım tipi $1(c)$ olmalıdır. Fakat, (5.207) denkleminden, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, Ricci tensörünün $\{(31)\}$ Segre tipinde olması mümkün değildir.

Ayrıca, Ricci tensörünün öz reküran olması durumunda, (5.181) denkleminden,

$$S_{ab} = l_a y_b + y_a l_b \tag{5.250}$$

bulunur. Bölüm 5.5.2'de incelendiği üzere, Ricci-reküran olma koşulu altında, y, paralel vektör alanı olarak elde edilir. Bu takdirde, Ricci özdeşliği kullanılırsa,

$$S_{ab} y^b = 0 \tag{5.251}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre, (5.250) ve (5.251) denklemleri göz önüne alındığı takdirde, $S = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(31)\}$ olması mümkün değildir.

Şayet, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{22\}$ olduğu kabul edilirse, Çizelge 5.2, Teorem 5.5.1 ve Teorem 5.5.2'ye göre, Ricci tensörünün bütün özdeğerleri reel ve dejenere olmalıdır. Bu durumda, yalnızca $\{(22)\}$ Segre tipi incelenmelidir. Buna ek olarak, öz reküran olma durumu söz konusu ise, Teorem 5.5.2'ye göre, bu özdeğerlerin hepsi sıfır olmalıdır. İlk olarak, Ricci tensörü paralel veya paralel bir tensör alanı ile orantılı ise, H tensörü (5.187) ile verilen ifadelerden herhangi biri olmak üzere,

$$S = \alpha g + H \tag{5.252}$$

şeklinde yazılabilir. Çizelge 5.2'ye göre, muhtemel olan dolanım tipleri $1(d)$, $2(d)$ ve $2(f)$ olarak bulunur. Daha önce incelendiği üzere, (5.223) denklemine göre, bu Segre tipi için, $1(d)$ dolanım tipinin meydana gelmesi mümkün değildir. Ayrıca, $(5.187)_1$ ifadesi ve $2(f)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, söz konusu Segre tipinin meydana gelmesi için, l ve L vektör alanları paralel olmalıdır. Bu durum ise, $2(f)$ dolanım tipi için gerçeklenmemektedir. Benzer şekilde, $(5.187)_2$ ifadesi için $2(d)$ dolanım tipi mümkün olamamaktadır. O halde, $(5.187)_1$ denklemi için mümkün olan dolanım tipi, yalnızca $2(d)$ iken, $(5.187)_2$ denklemi için mümkün olan dolanım tipi, yalnızca $2(f)$ olmalıdır.

Diğer taraftan, Ricci tensörü M manifoldu üzerinde öz reküran olsun. Bu durumda, $(5.187)_1$ ifadesi gerçekleniyorsa, Bölüm 5.5.2'de belirtildiği gibi, muhtemel olan dolanım tipleri $1(a)$, $2(a)$, $2(b)$, $2(h)$ ve $3(a)$ şeklindedir. Bununla birlikte, bu Segre tipi için, (5.202) denkleminden, $1(a)$ dolanım tipinin ve (5.223) denklemini sağladığından, $2(a)$ dolanım tipinin meydana gelmesinin mümkün olmadığı görülmektedir. Ayrıca, $2(b)$ dolanım tipi için, (5.227) denkleminden, Ricci tensörünün $\{(22)\}$ Segre tipinde olamayacağı elde edilir. Eğer $2(h)$ dolanım tipi söz konusu ise, Ricci tensörü (5.232) formundadır. Bu takdirde, $\alpha \neq \pm\beta$ olduğundan, (5.232) ifadesinde $b = 0$ olması durumunda, istenilen Segre tipi elde edilebilmektedir. Bununla birlikte, $3(a)$ dolanım tipi göz önüne alınırsa, Ricci tensörü (5.233) formunda olacağından dolayı, bu ifadede $a = c = 0$ olmak üzere, $\{(22)\}$ Segre tipi elde edilir. O halde, $(5.187)_1$ ifadesi için mümkün olan dolanım tipleri, yalnızca $2(h)$ ve $3(a)$ şeklinde bulunur.

Eğer, $(5.187)_2$ ifadesi gerçekleniyorsa, Bölüm 5.5.2'den muhtemel dolanım tipleri $2(a)$ ve $2(c)$ olarak bulunur. Bu takdirde, $2(a)$ dolanım tipi için, Ricci-düz manifold elde edildiğinden, söz konusu Segre tipi için, bu dolanım tipinin meydana gelmesi mümkün değildir. Bununla birlikte, $2(c)$ dolanım tipi için, (5.228) denkleminden, $\{(22)\}$ Segre tipinin elde edilemeyeceği görülmektedir. O halde, Ricci tensörü öz reküran ve özdeğerlerinin hepsi sıfır olmak üzere, Segre tipi $\{(22)\}$ ise, bu tensörün $(5.187)_2$ bağıntısını gerçeklemesi mümkün değildir.

Son olarak, Çizelge 5.2 ve Bölüm 5.5.2'den paralel veya paralel bir tensör alanı ile orantılı olan veya öz reküran olan Ricci tensörü için, $\{4\}$ Segre tipinin meydana gelmesinin mümkün olmadığı söylenebilir. Böylece, yukarıda elde edilen sonuçlar aşağıdaki teorem ile özetlenmektedir.

Teorem 5.6.1 (M,g), $(+,+,-,-)$ metrik işaretine sahip, $4-$boyutlu Ricci-reküran bir manifold olsun. Yani, bu manifoldun Ricci tensörü (5.193) koşulunu sağlasın. Bu takdirde,

i. Eğer Ricci tensörü paralel ya da paralel bir tensör alanı ile orantılı ise, muhtemel Segre tipleri ve dolanım tipleri aşağıda verilmektedir.

- $\{1(111)\} \Rightarrow 3(c)$,
- $\{(11)(11)\} \Rightarrow 1(b)$ ve $2(e)$ (uzaysal $2-$boyutlu özuzaylar söz konusu ise),
- $\{(11)(11)\} \Rightarrow 1(a)$ ve $2(b)$ (zamansal $2-$boyutlu özuzaylar söz konusu ise),
- $\{(1111)\} \Rightarrow 2(b)$, $2(c)$, $2(e)$, $2(f)$, $3(a)$, $3(b)$, $4(a)$, $4(b)$, $4(c)$, 5, 6,
- $\{(zz)(\bar{z}\bar{z})\} \Rightarrow 2(c)$,
- $\{(211)\} \Rightarrow 1(c)$ ve $2(g)$,
- $\{(22)\} \Rightarrow 2(d)$ [$(5.187)_1$ durumunda] ve $2(f)$ [$(5.187)_2$ durumunda].

ii. Eğer Ricci tensörü öz reküran ise, muhtemel Segre tipleri ve dolanım tipleri aşağıda verilmektedir.

- $\{(211)\} \Rightarrow 2(j)$, $3(b)$ ve $4(c)$,
- $\{(22)\}$ [$(5.187)_1$ durumunda] $\Rightarrow 2(h)$ ve $3(a)$.

5.7 Lorentz ve Pozitif Tanımlılık Durumu

Bu bölümde, $4-$boyutlu düzgün ve bağlantılı M manifoldunun, $(+,+,+,-)$ ve $(+,+,+,+)$ metrik işarete sahip olması yani, M manifoldunun, sırasıyla, Lorentz metrik işarete ve pozitif tanımlı metrik işarete sahip olması durumu göz önüne alınarak, Bölüm 5.5'de nötr metrik işareti için ele alınan problemler bu metrik işaretlere göre incelenecektir. (M,g) manifoldu $4-$boyutlu ve Lorentz metrik işarete sahip olmak üzere, bu manifoldun Ricci tensörünün reküran olması problemi [56] numaralı kaynakta incelenmiştir. Bu çalışmada, söz konusu kaynaktaki incelemenin genelleştirilmişi olarak, ikinci mertebeden, simetrik ve reküran tensör alanları incelenecektir ve bu inceleme sırasında dolanım teorisi kullanılacaktır.

Şimdi, Lorentz metriğine sahip, $4-$boyutlu M manifoldu için bazı temel kavramlardan bahsedilecektir. Öncelikle, $m \in M$ noktasında, aşağıda verilen standart bazlar göz önüne alınırsa, x,y,z,t; $m \in M$ noktasında, teğet uzayın pseudo-ortonormal bir bazı olmak üzere,

$$x.x = y.y = z.z = -t.t = 1 \tag{5.253}$$

koşulları gerçeklenmektedir.

Bununla birlikte, $\sqrt{2}l = z+t$ ve $\sqrt{2}n = z-t$ olarak alınırsa, l ve n null vektörlerdir. Bu durumda,

$$l.n = 1 \tag{5.254}$$

bağıntısı mevcuttur. Bu takdirde, l,n,x,y bazına, $m \in M$ noktasındaki *null baz* adı verilir. Bu bazlara göre, g metriği için tamlık bağıntıları,

$$g_{ab} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b - t_a t_b \tag{5.255}$$

ve

$$g_{ab} = l_a n_b + n_a l_b + x_a x_b + y_a y_b \tag{5.256}$$

şeklinde verilir.

Eğer, Lorentz metriği göz önüne alınırsa ve F basit bivektör ise, F'in blade'inin uzaysal, zamansal veya null olabilmesi mümkündür. Eğer, F basit olmayan bivektör ise, l,n,x,y null bazı için, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$F^{ab} = \alpha(l^a n^b - n^a l^b) + \beta(x^a y^b - y^a x^b) \tag{5.257}$$

biçiminde yazılabilmektedir.

Bütün bunlara ek olarak, 4−boyutlu, Lorentz metriğe sahip manifoldlar için, Bölüm 5.3'te bahsedilen ϕ, Lie cebri, $o(1,3)$ ortogonal cebrinin bir alt cebrini oluşturmaktadır ve dolanım tipleri [28, 49] numaralı kaynaklarda bulunmaktadır. Burada, Schell [34] tarafından verilen R_1, R_2, ...,R_{15} etiketlemesi kullanılacaktır. Böylece, söz konusu dolanım tiplerinin boyutları ve sahip oldukları bazlar aşağıda yer alan Çizelge 5.3'te verilmektedir. Burada, $\omega \neq 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$) şeklindedir. Ayrıca, R_1 dolanım tipi, manifoldun düz olması durumuna karşılık gelmektedir ve bu nedenle, çizelgede yer almamaktadır. Diğer taraftan, R_5 dolanım tipinin bir uzay-zamanının dolanım grubu olarak meydana gelmesi mümkün olamamaktadır, [28]. Dolayısıyla, bu çalışmada incelenmeyecektir.

Çizelge 5.3 : $(+,+,+,-)$ metriğinin dolanım cebirleri.

Tip	Boyut	Baz	Tip	Boyut	Baz
R_2	1	$l \wedge n$	R_9	3	$l \wedge n,\, l \wedge x,\, l \wedge y$
R_3	1	$l \wedge x$	R_{10}	3	$l \wedge n,\, l \wedge x,\, n \wedge x$
R_4	1	$x \wedge y$	R_{11}	3	$l \wedge x,\, l \wedge y,\, x \wedge y$
R_5	1	$l \wedge n + \omega(x \wedge y)$	R_{12}	3	$l \wedge x,\, l \wedge y,\, l \wedge n + \omega(x \wedge y)$
R_6	2	$l \wedge n,\, l \wedge x$	R_{13}	3	$x \wedge y,\, y \wedge z,\, x \wedge z$
R_7	2	$l \wedge n,\, x \wedge y$	R_{14}	4	$l \wedge n,\, l \wedge x,\, l \wedge y,\, x \wedge y$
R_8	2	$l \wedge x,\, l \wedge y$	R_{15}	6	$o(1,3)$

T, Lorentz metriğine sahip, 4−boyutlu M manifoldu üzerinde sıfırdan farklı, ikinci mertebeden ve simetrik bir tensör alanı olsun. Bu durumda, Bölüm 5.4'te açıklandığı üzere, T tensörü için muhtemel olan Segre tipleri $\{1,111\}$, $\{211\}$, $\{31\}$, $\{z\bar{z}11\}$ ve bu tiplerin dejenere özdeğerler olma ihtimallerinden oluşmaktadır. Daha önce belirtildiği gibi, $\{1,111\}$ Segre tipindeki virgül işareti, zamansal özvektöre karşılık gelen özdeğeri, uzaysal özvektörlere karşılık gelen özdeğerlerden ayırt etmek için kullanılacaktır. Buna göre, bu tensörün Jordan-Segre sınıflandırması aşağıdaki şekilde verilmektedir, [28].

$$\rho_1(l_a n_b + n_a l_b) + \rho_2(l_a l_b + n_a n_b) + \rho_3 x_a x_b + \rho_4 y_a y_b. \tag{5.258}$$

$$(\rho_2 - \rho_1) t_a t_b + (\rho_1 + \rho_2) z_a z_b + \rho_3 x_a x_b + \rho_4 y_a y_b. \tag{5.259}$$

$$\rho_1(l_a n_b + n_a l_b) + \lambda l_a l_b + \rho_2 x_a x_b + \rho_3 y_a y_b. \tag{5.260}$$

$$\rho_1(l_a n_b + n_a l_b) + (l_a x_b + x_a l_b) + \rho_1 x_a x_b + \rho_2 y_a y_b. \tag{5.261}$$

$$\rho_1(l_a n_b + n_a l_b) + \rho_2(l_a l_b - n_a n_b) + \rho_3 x_a x_b + \rho_4 y_a y_b. \qquad (5.262)$$

Burada, $\rho_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,3,4)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$ olmak üzere, (5.262) kanonik formu için, $\rho_2 \neq 0$ olmaktadır. Bu takdirde, (5.258) ifadesi için, T tensörünün özvektörleri (ve bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerleri), $t = 2^{-1/2}(l-n)$ $(\rho_1 - \rho_2)$, $z = 2^{-1/2}(l+n)$ $(\rho_1 + \rho_2)$, x (ρ_3) ve y (ρ_4) şeklindedir. O halde, (5.253) denkleminden, t zamansal, x,y ve z uzaysal özvektörlerdir ve dejenere özdeğerlerin mevcut olma ihtimali ile birlikte, Segre tipi $\{1,111\}$ olmalıdır. Başka bir deyişle, T tensörü $\mathbb{R}$ üzerinde diyagonalleştirilebilir. Bu durumda, alternatif olarak, (5.259) ifadesi de yazılabilmektedir.

Öte yandan, (5.260) ifadesi için, T tensörünün özvektörleri (ve bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerleri), l (ρ_1), x (ρ_2) ve y (ρ_3) olarak bulunur. Bu takdirde, dejenere özdeğerlerin mevcut olma ihtimali ile birlikte, $\{211\}$ Segre tipi elde edilir. Ayrıca, $\lambda = \pm 1$ olacak şekilde null baz seçilmesi de mümkündür.

Diğer taraftan, (5.261) ifadesi için, T tensörünün özvektörleri (ve bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerleri), l (ρ_1) ve y (ρ_2) şeklindedir. Böylece, $\{31\}$ Segre tipi veya bu tip için özdeğerlerin dejenere olma hali elde edilir.

Son olarak, (5.262) ifadesi için, T tensörünün özvektörleri (ve bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerleri), $l \pm in$ $(\rho_1 \pm i\rho_2)$, x (ρ_3) ve y (ρ_4) olarak bulunur. O halde, T tensörünün Segre tipi, reel özdeğerlerin dejenere olma ihtimali mevcut olmak üzere, $\{z\bar{z}11\}$ şeklinde elde edilir.

Yukarıda ifade edilenlere ek olarak, Lorentz metriği söz konusu ise, Bölüm 5.5.1'de nötr metrik işaretin dolanım tipleri için incelendiği gibi, Çizelge 5.3'ten her dolanım tipi için reküran ve paralel olan vektör alanları belirlenebilmektedir. Bununla birlikte, bu dolanım tipleri için, $\nabla T = 0$ denklemini sağlayan, ikinci mertebeden ve simetrik T tensörleri her $F \in \phi$ için,

$$T_{ac}F^c{}_b + T_{bc}F^c{}_a = 0 \qquad (5.263)$$

denkleminden elde edilir.

Bu durumda, Lorentz metriğinin dolanım cebirleri ele alındığı takdirde, her bir dolanım tipine göre mümkün olan paralel vektör alanları, reküran vektör alanları ve $\nabla T = 0$ koşulunu sağlayan T tensörleri Çizelge 5.4'ün, sırasıyla, ikinci, üçüncü ve dördüncü sütunlarında listelenmektedir, [28]. Dördüncü sütunda, $\phi, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ şeklindedir.

Çizelge 5.4 : $(+,+,+,-)$ metriğinin dolanım cebirlerine göre, ikinci mertebeden simetrik T tensörü için $\nabla T = 0$ probleminin Segre tipi çözümleri.

Tip	Paralel vektör alanları	Reküran vektör alanları	$\nabla T = 0$ koşulunu sağlayan T tensörü	Segre tipi
R_2	$<x, y>$	l, n	$\phi g_{ab} + \alpha x_a x_b + \beta y_a y_b + \gamma(x_a y_b + y_a x_b)$	$\{(1,1)11\}$, $\{(1,1)(11)\}$, $\{(1,11)1\}$, $\{(1111)\}$
R_3	$<l, x>$	—	$\phi g_{ab} + \alpha x_a x_b + \beta l_a l_b + \gamma(l_a x_b + x_a l_b)$	$\{(1,11)1\}$, $\{(1111)\}$, $\{(21)1\}$, $\{(211)\}$, $\{(31)\}$
R_4	$<l, n>$	—	$\phi g_{ab} + \alpha l_a l_b + \beta n_a n_b + \gamma(l_a n_b + n_a l_b)$	$\{1,1(11)\}$, $\{1,(111)\}$, $\{(1,1)(11)\}$, $\{(1,11)1\}$, $\{(1111)\}$, $\{2(11)\}$, $\{(211)\}$, $\{z\bar{z}(11)\}$
R_6	$<y>$	l	$\phi g_{ab} + \alpha y_a y_b$	$\{(1,11)1\}$, $\{(1111)\}$
R_7	—	l, n	$\phi g_{ab} + \alpha(l_a n_b + n_a l_b)$	$\{(1,1)(11)\}$, $\{(1111)\}$
R_8	$<l>$	—	$\phi g_{ab} + \alpha l_a l_b$	$\{(211)\}$, $\{(1111)\}$
R_9	—	l	ϕg_{ab}	$\{(1111)\}$
R_{10}	$<y>$	—	$\phi g_{ab} + \alpha y_a y_b$	$\{(1,11)1\}$, $\{(1111)\}$
R_{11}	$<l>$	—	$\phi g_{ab} + \alpha l_a l_b$	$\{(211)\}$, $\{(1111)\}$
R_{12}	—	l	ϕg_{ab}	$\{(1111)\}$
R_{13}	$<t>$	—	$\phi g_{ab} + \alpha t_a t_b$	$\{1,(111)\}$, $\{(1111)\}$
R_{14}	—	l	ϕg_{ab}	$\{(1111)\}$
R_{15}	—	—	ϕg_{ab}	$\{(1111)\}$

Öte yandan, Bölüm 5.5.1'de uygulanan adımlar yardımıyla, $\nabla T = 0$ koşulunu sağlayan, ikinci mertebeden ve simetrik T tensörünün muhtemel Segre tipleri, Çizelge 5.4'ün beşinci sütununda ifade edilmektedir. Örneğin, R_2 dolanım tipi için, $\nabla T = 0$ koşulunu sağlayan T tensörü,

$$T_{ab} = \phi g_{ab} + \alpha x_a x_b + \beta y_a y_b + \gamma(x_a y_b + y_a x_b) \tag{5.264}$$

formundadır. Buradan, (5.264) ifadesinden,

$$\begin{aligned} &T_{ab} l^b = \phi l_a, \quad T_{ab} n^b = \phi n_a \\ &T_{ab} x^b = (\phi + \alpha) x_a + \gamma y_a, \quad T_{ab} y^b = (\phi + \beta) y_a + \gamma x_a \end{aligned} \tag{5.265}$$

olarak bulunur. Bu takdirde, $\gamma = 0$ ve $\alpha \neq \beta$ ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$) ise, (5.265) koşullarından, T tensörünün Segre tipi $\{(1,1)11\}$ olmalıdır. Diğer taraftan, $\gamma = 0$ ve $\alpha = \beta \neq 0$ durumu göz önüne alınırsa, $\{(1,1)(11)\}$ ve $\alpha = \gamma = 0$ ve $\beta \neq 0$ durumunda ise, $\{(1,11)1\}$ Segre tipi elde edilmektedir. Bununla birlikte, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (ve $\phi \neq 0$)

ise, T tensörünün Segre tipi $\{(1111)\}$ olarak bulunur. Böylece, R_2 dolanım tipi için, $\nabla T = 0$ koşulunu sağlayan T tensörünün mümkün olan bütün Segre tipleri elde edilmiş olur. Benzer adımlar diğer dolanım tipleri için de uygulanırsa, Çizelge 5.4'ün beşinci sütunu elde edilmektedir.

Şayet, T tensörü öz reküran ise, bu tensörün bütün özdeğerleri sıfır olmak koşuluyla, muhtemel Segre tipleri $\{(211)\}$ ve $\{(31)\}$ olmalıdır. İlk olarak, T tensörünün bütün özdeğerleri sıfır ve l,n,x,y null baz olmak üzere, Segre tipi $\{(211)\}$ ise, Bölüm 5.5.2'den, (5.185) denklemi mevcuttur ve l, reküran vektör alanı olmalıdır. Bu takdirde, Çizelge 5.4'ün üçüncü sütununa göre, muhtemel dolanım tipleri R_2, R_6, R_7, R_9, R_{12} ve R_{14} olarak elde edilir.

Öte yandan, T tensörünün bütün özdeğerleri sıfır olmak üzere, Segre tipi $\{(31)\}$ ise, l,n,x,y null bazı altında, (5.181) denklemi mevcuttur. Buna göre, T tensörünün öz reküran olma koşulu göz önünde bulundurulursa, l reküran vektör alanı ve y paralel vektör alanı olarak elde edilir. O halde, Çizelge 5.4'ün ikinci ve üçüncü sütunlarına göre, muhtemel dolanım tipleri R_2 ve R_6 şeklinde bulunur. Bu sonuçlar, aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 5.7.1 (M,g), $4-$boyutlu, $(+,+,+,-)$ metrik işaretli bir manifold, T, M manifoldu üzerinde sıfırdan farklı, ikinci mertebeden, simetrik ve reküran bir tensör alanı olsun. T tensörünün g metriğinin sabit bir katı olmadığı kabul edilsin. Bu takdirde,

i. Eğer $\nabla T = 0$ ise, muhtemel Segre tipleri ve dolanım tipleri aşağıda verilmektedir.

- $\{1,(111)\} \Rightarrow R_4$ veya R_{13},
- $\{(1,11)1\} \Rightarrow R_2$, R_3, R_4, R_6 veya R_{10},
- $\{(1,1)(11)\} \Rightarrow R_2$, R_4 veya R_7,
- $\{(1,1)11\} \Rightarrow R_2$,
- $\{1,1(11)\} \Rightarrow R_4$,
- $\{2(11)\} \Rightarrow R_4$,
- $\{(21)1\} \Rightarrow R_3$,

- $\{(211)\} \Rightarrow R_3, R_4, R_8$ veya R_{11},
- $\{(31)\} \Rightarrow R_3$,
- $\{z\bar{z}(11)\} \Rightarrow R_4$.

ii. Eğer T tensörü öz reküran ise, bu tensörün bütün özdeğerleri sıfır olmak üzere, muhtemel Segre tipleri ve dolanım tipleri aşağıda verilmektedir.

- $\{(211)\} \Rightarrow R_2, R_6, R_7, R_9, R_{12}$ veya R_{14},
- $\{(31)\} \Rightarrow R_2$ veya R_6.

Bölüm 5.6'daki uygulamaya benzer şekilde, 4−boyutlu, $(+,+,+,-)$ metrik işaretli M manifoldunun Ricci tensörünün reküran olduğu kabul edilirse, bu bölümdeki teknikler kullanılırsa ve Çizelge 5.4 göz önünde bulundurulursa, $\{1,111\}$, $\{1,1(11)\}$, $\{(1,1)11\}$, $\{211\}$, $\{(21)1\}$, $\{2(11)\}$, $\{31\}$, $\{z\bar{z}11\}$ ve $\{z\bar{z}(11)\}$ Segre tiplerinin meydana gelmesinin mümkün olmayacağı söylenebilir.

Öncelikle, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{1,(111)\}$ olduğu kabul edildiği takdirde, Ricci tensörü paraleldir veya paralel bir tensör alanı ile orantılıdır. O halde, Teorem 5.7.1'e göre muhtemel dolanım tipleri, R_4 veya R_{13} olarak elde edilir. Buna göre, $x \wedge y$ cebri ile birlikte R_4 dolanım tipi göz önüne alındığı takdirde, Riemann eğrilik tensörü (5.204) biçimindedir ve buradan, Ricci tensörü (5.205) denklemi ile verilir. O halde, l,n,x,y null bazı için,

$$S_{ab}x^b = ax_a, \quad S_{ab}y^b = ay_a, \quad S_{ab}l^b = S_{ab}n^b = 0 \tag{5.266}$$

koşulları bulunur. Bu takdirde, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(1,1)(11)\}$ olarak bulunur ve yanlış Segre tipi elde edilir. Bununla birlikte, $F = x \wedge y$, $G = y \wedge z$ ve $H = x \wedge z$ olmak üzere, R_{13} dolanım tipi ele alınırsa ve (5.209) denkleminde g^{ac} üzerinden daraltma yapılırsa, Ricci tensörünün söz konusu Segre tipinde olabilmesi mümkündür.

Öte yandan, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(1,11)1\}$ olması durumunda, Teorem 5.7.1'den, muhtemel dolanım tipleri, R_2, R_3, R_4, R_6 ve R_{10} olarak edilir. Bu durumda, R_2 dolanım tipi için, $l \wedge n$ cebri kullanılarak, Ricci tensörü,

$$S_{ab} = -a(l_a n_b + n_a l_b) \tag{5.267}$$

şeklinde bulunur. O halde, (5.267) denkleminden, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(1,1)(11)\}$ şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, bu dolanım tipi için, $\{(1,11)1\}$ Segre tipinin meydana gelmesi mümkün değildir.

Buna ek olarak, R_3 dolanım tipi için, $l \wedge y$ cebri kullanıldığı takdirde,

$$S_{ab} = a l_a l_b \tag{5.268}$$

olarak bulunur. Böylece, (5.268) denkleminden, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ olmalıdır. Benzer şekilde, R_4 ve R_6 dolanım tipleri için de, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(1,11)1\}$ olması mümkün değildir. Bununla birlikte, R_{10} dolanım tipi için, $F = l \wedge n$, $G = l \wedge x$ ve $H = n \wedge x$ alınarak, (5.209) denklemi g^{ac} ile çarpılırsa, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(1,11)1\}$ olabileceği görülür.

Şayet, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(1,1)(11)\}$ ise, Teorem 5.7.1'e göre, muhtemel dolanım tipleri R_2, R_4 ve R_7 olmalıdır. Bu takdirde, R_2 ve R_4 dolanım tipleri için, istenilen Segre tipi kolayca elde edilir. Ayrıca, $F = l \wedge n$ ve $G = x \wedge y$ olmak üzere, R_7 dolanım tipi için,

$$S_{ab} = -a(l_a n_b + n_a l_b) + b(x_a x_b + y_a y_b) \tag{5.269}$$

şeklinde bulunur. Buradan,

$$S_{ab} x^b = b x_a, \quad S_{ab} y^b = b y_a, \quad S_{ab} l^b = -a l_a, \quad S_{ab} n^b = -a n_a \tag{5.270}$$

koşulları elde edilir. Bu durumda, $a \neq -b$ olmak üzere, (5.270) bağıntıları yardımıyla, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(1,1)(11)\}$ olabileceği görülür. Sonuç olarak, R_2, R_4 ve R_7 dolanım tipleri için, Ricci tensörü söz konusu Segre tipinde olabilir.

Diğer taraftan, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ ise, Teorem 5.7.1'e göre muhtemel dolanım tipleri R_3, R_4, R_8 ve R_{11} şeklindedir. İlk olarak, R_3 dolanım tipi için Ricci tensörü (5.268) formunda olduğundan, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ şeklinde elde edilir. Aynı durum R_8 dolanım tipi için de sağlanmaktadır. Fakat, R_4 dolanım tipi için, Ricci tensörü (5.205) formunda olduğundan dolayı, Segre tipi $\{(1,1)(11)\}$ olarak elde edilir. Ayrıca, R_{11} dolanım tipi için, $F = l \wedge x$, $G = l \wedge y$ ve $H = x \wedge y$ olmak üzere,

$$S_{ab} = (a+b) l_a l_b + c(x_a x_b + y_a y_b) - e(l_a y_b + y_a l_b) + f(l_a x_b + x_a l_b) \tag{5.271}$$

bulunur. O halde, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(211)\}$ olması için, (5.271) denkleminde, $c = e = f = 0$ koşulları sağlanmalıdır. Bu takdirde, (5.209) denkleminden, f eğrilik dönüşümünün değer uzayının yalnızca F ve G bivektörleri tarafından gerildiği sonucuna ulaşılır ve Ambrose-Singer Teoremi'nden çelişki elde edilir. Böylece, $\{(211)\}$ Segre tipi için mümkün olan dolanım tipleri, R_3 ve R_8 şeklinde elde edilir.

Bunlara ek olarak, Ricci tensörünün Segre tipinin $\{(31)\}$ olması durumunda, Teorem 5.7.1'den, muhtemel dolanım tipi yalnızca R_3 olmalıdır. Ancak, (5.268) denklemine göre, söz konusu Segre tipinin meydana gelmesi mümkün değildir.

Öte yandan, Ricci tensörü öz reküran ise, özdeğerlerin hepsi sıfır olmak koşuluyla, muhtemel Segre tipleri $\{(211)\}$ ve $\{(31)\}$ şeklindedir. Öncelikle, $\{(211)\}$ Segre tipi için, Teorem 5.7.1 kullanılarak, olası dolanım tipleri, R_2, R_6, R_7, R_9, R_{12} ve R_{14} şeklinde elde edilir. Yukarıdaki adımlara benzer şekilde, R_2 ve R_7 dolanım tipleri için, Ricci tensörü farklı Segre tipinde olduğundan, bu dolanım tiplerinin meydana gelmesi mümkün değildir. Bununla birlikte, R_6, R_9, R_{12} ve R_{14} dolanım tiplerinin ilgili bivektörleri için, Ricci tensörü hesaplandığı takdirde, R_6, R_9 ve R_{12} tipleri için Ambrose-Singer Teoremi'nden çelişki elde edilmektedir. Böylece, muhtemel dolanım tipi yalnızca R_{14} olarak elde edilir.

İkinci olarak, Bölüm 5.6'da kanıtlandığı üzere, Ricci tensörünün öz reküran ve Segre tipinin $\{(31)\}$ olması durumunda, (5.250) ve (5.251) denklemlerinden, $S = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde, söz konusu Segre tipinin meydana gelmesi mümkün değildir.

Böylece, yukarıda elde edilen sonuçlar, aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 5.7.2 (M,g), $4-$boyutlu $(+,+,+,-)$ metrik işaretli ve Ricci-reküran bir manifold olsun.

i. Eğer Ricci tensörü paralel veya paralel bir tensör alanı ile orantılı ise, muhtemel Segre tipleri ve dolanım tipleri aşağıda verilmektedir.

- $\{1,(111)\} \Rightarrow R_{13}$,
- $\{(1,11)1\} \Rightarrow R_{10}$,
- $\{(1,1)(11)\} \Rightarrow R_2$, R_4 veya R_7,
- $\{(211)\} \Rightarrow R_3$ veya R_8.

ii. Eğer Ricci tensörü öz reküran ise, bu tensörün bütün özdeğerleri sıfır olmak üzere, muhtemel Segre tipi yalnızca $\{(211)\}$ ve dolanım tipi R_{14} şeklindedir.

Not 5.7.1 ([28], [33]) (M,g) manifoldunun Ricci tensörü sıfırsa, bu durum genel görelilik teorisindeki vakum duruma karşılık gelmektedir. Böylece, M manifoldunun mümkün olan dolanım tipleri, R_8, R_{14} veya R_{15} şeklindedir. Ayrıca, (M,g) Einstein manifoldu ise, mümkün olan dolanım tipleri, R_7, R_{14} veya R_{15} olarak elde edilir.

Yukarıda incelenen durumlara ek olarak, pozitif tanımlı metriğe sahip, $4-$boyutlu manifoldlar üzerinde ikinci mertebeden, simetrik ve reküran tensör alanları incelenecektir. İlk olarak, x,y,z,w; $m \in M$ noktasında teğet uzayın ortonormal bazı olmak üzere, g metriği için tamlık bağıntısı,

$$g_{ab} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b + w_a w_b \tag{5.272}$$

şeklinde verilir.

Bununla birlikte, $(+,+,+,+)$ metrik işaretli manifoldlar için, basit bivektörlerin tümü uzaysaldır. Ayrıca, basit olmayan bir F bivektörü, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ olmak üzere,

$$F = \alpha(x \wedge y) + \beta(z \wedge w) \tag{5.273}$$

biçiminde yazılır.

Öte yandan, pozitif tanımlı metrik işarete sahip, $4-$boyutlu manifoldlar için, ϕ, Lie cebri, $o(4)$ ortogonal cebrinin bir alt cebrini oluşturmaktadır ve dolanım tipleri [32] numaralı kaynakta mevcuttur. Burada, S_1, S_2, S_3, $\overset{+}{S}_3$, $\overset{+}{S}_4$ ve S_6 listelemesi kullanılacaktır. Söz konusu dolanım tiplerinin boyutları ve sahip oldukları bazlar aşağıda yer alan Çizelge 5.5'te verilmektedir. Burada, $\overset{+}{S}$, $o(3)$ Lie cebrini göstermektedir ve $G \in \overset{-}{S}_m$ $(G \neq 0)$ şeklindedir.

Diğer taraftan, M manifoldu üzerinde sıfırdan farklı, ikinci mertebeden ve simetrik olan bir T tensörü göz önüne alındığı takdirde, M manifoldu pozitif tanımlı metrik işarete sahip olduğundan dolayı, T tensörü $\mathbb{R}$ üzerinde diyagonalleştirilebilir. O halde, söz konusu metrik işaret için, T tensörünün öz reküran olması mümkün değildir. Böylece, Bölüm 5.5'te uygulanan teknikler yardımıyla, $\nabla T = 0$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden ve simetrik T tensörleri tespit edilebilmektedir. Bu tensörler ve muhtemel Segre tipleri, Çizelge 5.5'in dördüncü ve beşinci sütunlarında ifade edilmektedir. Ayrıca, Çizelge 5.5'in üçüncü sütununa göre, S_1 dolanım tipi için, z ile w vektör alanlarının ve S_3 dolanım tipi için, w vektör alanının paralel vektör alanları olduğu görülebilir.

Çizelge 5.5 : $(+,+,+,+)$ metriğinin dolanım cebirleri ve ikinci mertebeden simetrik T tensörü için $\nabla T = 0$ probleminin Segre tipi çözümleri.

Tip	Boyut	Baz	$\nabla T = 0$ koşulunu sağlayan T tensörü	Segre tipi
S_1	1	$x \wedge y$	$\phi g_{ab} + \alpha z_a z_b + \beta w_a w_b$ $+\gamma(z_a w_b + w_a z_b)$	$\{11(11)\}$, $\{(11)(11)\}$, $\{1(111)\}$, $\{(1111)\}$
S_2	2	$x \wedge y, z \wedge w$	$\phi g_{ab} + \alpha(x_a x_b + y_a y_b)$	$\{(11)(11)\}$, $\{(1111)\}$
S_3	3	$x \wedge y, x \wedge z, y \wedge z$	$\phi g_{ab} + \alpha w_a w_b$	$\{1(111)\}$, $\{(1111)\}$
$\overset{+}{S}_3$	3	$\overset{+}{S}$	ϕg_{ab}	$\{(1111)\}$
$\overset{+}{S}_4$	4	$\overset{+}{S}, G$	ϕg_{ab}	$\{(1111)\}$
S_6	6	$o(4)$	ϕg_{ab}	$\{(1111)\}$

Yukarıdaki durumlara ek olarak, Ricci tensörünün paralel veya paralel bir tensör alanı ile orantılı olması durumunda, problem nötr ve Lorentz metrikler için incelenen durumlara benzer şekilde çözülebilmektedir. Öncelikle, $\{1111\}$ ve $\{11(11)\}$ Segre tiplerinin meydana gelmesi mümkün değildir. Şayet, Ricci tensörünün Segre tipi $\{1(111)\}$ ise, Çizelge 5.5'e göre, muhtemel dolanım tipleri S_1 ve S_3 olmalıdır. Ancak, $x \wedge y$ bivektörü ile birlikte, S_1 dolanım tipi için,

$$S_{ab} = a(x_a x_b + y_a y_b) \tag{5.274}$$

bulunur. Dolayısıyla, (5.274) ifadesinden, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(11)(11)\}$ olarak bulunur. O halde, yanlış Segre tipi elde edilir. Öte yandan, $F = x \wedge y$, $G = y \wedge z$ ve $H = x \wedge z$ olmak üzere, S_3 dolanım tipi için, Ricci tensörü,

$$\begin{aligned} S_{ab} &= (a+c)x_a x_b + (a+b)y_a y_b + (b+c)z_a z_b - d(x_a z_b + z_a x_b) \\ &\quad + e(y_a z_b + z_a y_b) + f(x_a y_b + y_a x_b) \end{aligned} \tag{5.275}$$

formundadır. Bu takdirde, (5.275) denkleminde, $d = e = f = 0$ ve $a = b = c$ olması durumunda, Ricci tensörünün $\{1(111)\}$ Segre tipinde olması mümkündür.

Bununla birlikte, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(11)(11)\}$ ise, Çizelge 5.5'e göre, muhtemel dolanım tipleri S_1 ve S_2 olmalıdır. Bu durumda, (5.274) denkleminden S_1

dolanım tipi için istenilen Segre tipi elde edilir. Ayrıca, S_2 dolanım tipinin, $F = x \wedge y$ ve $G = z \wedge w$ bivektörleri kullanılırsa, Ricci tensörü,

$$S_{ab} = a(x_a x_b + y_a y_b) + b(z_a z_b + w_a w_b) \tag{5.276}$$

şeklinde bulunur. O halde, (5.276) denkleminden, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(11)(11)\}$ olarak elde edilir. Böylece, aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 5.7.3 (M,g), $4-$boyutlu $(+,+,+,+)$ metrik işaretli bir manifold olmak üzere, T, M manifoldu üzerinde sıfırdan farklı, ikinci mertebeden, simetrik ve reküran bir tensör alanı olsun. T tensörünün g metriğinin sabit bir katı olmadığı kabul edilsin. Bu takdirde,

i. Eğer $\nabla T = 0$ ise, muhtemel Segre tipleri ve dolanım tipleri aşağıda verilmektedir.

- $\{1(111)\} \Rightarrow S_1$ veya S_3,
- $\{(11)(11)\} \Rightarrow S_1$ veya S_2,
- $\{11(11)\} \Rightarrow S_1$.

ii. Eğer Ricci tensörü paralel ya da paralel bir tensör alanı ile orantılı ise, muhtemel Segre tipleri ve dolanım tipleri aşağıda verilmektedir.

- $\{1(111)\} \Rightarrow S_3$,
- $\{(11)(11)\} \Rightarrow S_1$ veya S_2 şeklindedir.

Not 5.7.2 Eğer (M,g) manifoldu bir Einstein manifoldu ise, söz konusu metrik işaret için muhtemel dolanım tipleri, S_2, $\overset{+}{S_3}$, $\overset{+}{S_4}$ ve S_6 olabilmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bazı özel manifoldlar üzerinde, değişik vektör alanları ile ilgili çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Diferansiyel geometride temel bir yere sahip olan manifold kavramından yola çıkarak tanımlanan özel manifoldların araştırılması ve bazı kısıtlamalar altında, bu manifoldların çeşitli özelliklerinin elde edilmesinin amaçlanması, çalışmanın ilk adımını oluşturmuştur. Buradan hareketle, söz konusu manifoldun Ricci tensörünün sağlaması gereken özel koşullara göre tanımlanan manifoldlar, tez çalışmasında incelenen başlıca manifoldlar arasında yer almıştır.

Öncelikle, genelleştirilmiş Einstein manifoldları arasında yer alan yarı-Einstein manifoldları ve yarı-Einstein manifoldlarının genelleştirilmişi olan neredeyse yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlarının pek çok geometrik özelliği analiz edilmiştir. Bu manifoldlar üzerinde tors oluşturan vektör alanları, reküran vektör alanları, konsörkılır vektör alanları, paralel vektör alanları ve $\varphi(\mathrm{Ric})$ vektör alanları olarak adlandırılan çeşitli özel vektör alanları incelenmiştir. Söz konusu manifoldların üreteç vektör alanlarının ne tür özel vektör alanları olabileceği hakkında birçok teorem kanıtlanmıştır. Ayrıca, özel yarı-Einstein manifoldlarının uzay-zaman modelleri üzerine de sonuçlar elde edilmiştir.

Bununla birlikte, üzerinde özel vektör alanları tanımlanan yarı-Einstein ve neredeyse yarı-Einstein manifoldlarının konformal dönüşümleri incelenmiş ve bu durumda, göz önüne alınan manifoldu tanımlayan büyüklüklerin değişim özellikleri araştırılmıştır.

Ayrıca, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldların Ricci tensörünün bazı şartlar altında ve üreteç vektör alanlarının özel vektör alanları olması durumunda, bu manifoldların geometrik özelliklerinin değişimi ile ilgili pek çok teorem ispatlanmıştır. Böylece, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlarının üreteç vektör alanlarının ne çeşit özel vektör alanları olabileceği de analiz edilmiştir.

Daha sonra, pseudo Ricci simetrik ve hemen hemen pseudo Ricci simetrik genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları üzerinde bazı özel vektör alanları göz önüne alınmış ve bu manifoldlarla ilgili birçok sonuç elde edilmiştir. Genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldları için elde edilen sonuçlar kullanılarak, pseudo Ricci simetrik ve hemen hemen pseudo Ricci simetrik genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlarının üreteç vektör alanları arasında bağıntılar bulunmuştur. Böylece, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldu ile pseudo Ricci simetrik ve hemen hemen pseudo Ricci simetrik manifoldların söz konusu büyüklükleri ilişkilendirilmiştir.

Son olarak, farklı metrik işaretlere sahip $4-$boyutlu herhangi bir düzgün manifold göz önüne alınmış ve bu manifoldlar üzerinde tanımlı ikinci mertebeden simetrik olan tensör alanlarının, paralel tensör alanı ve reküran tensör alanı olması durumları irdelenmiştir. Bu doğrultuda, $(+,+,-,-)$, $(+,+,+,-)$ ve $(+,+,+,+)$ metrik işaretli manifoldlar için, söz konusu tensörün Segre tipleri ve dolanım tiplerine göre tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu problemde, paralel vektör alanları ve reküran vektör alanları da ilgili dolanım tipine göre belirlenmiştir. Bu problemler, daha sonra, ikinci mertebeden simetrik bir tensör olan Ricci tensörüne uygulanarak, $(+,+,-,-)$, $(+,+,+,-)$ ve $(+,+,+,+)$ metrik işaretli, $4-$boyutlu manifoldlar üzerinde Ricci tensörünün mümkün olan bütün Segre tipleri ve dolanım tipleri analiz edilmiştir. Tüm bu sonuçlar ilgili teoremlerle ifade edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, çeşitli manifoldlar göz önüne alınarak, bu manifoldların özelliklerinin ve aynı zamanda üzerinde tanımlanabilen özel vektör alanlarının incelenmiş olmasından dolayı, bu çalışmanın diferansiyel geometri alanında çalışmakta olan ve bu konularla ilgilenen araştırmacılar için iyi bir kaynak oluşturacağı düşünülmektedir. Bu özel manifoldlar üzerinde, çalışmada incelenen vektör alanları dışındaki vektör alanlarının varlığı araştırılabilir. Ayrıca, literatürde yer alan farklı özel manifoldlar üzerindeki vektör alanlarının incelenebileceği ve bu manifoldların genel görelilik teorisindeki uygulamaları ile ilgili farklı çalışmaların da yapılmasıyla, konunun daha genişletilebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Besse, A.L.** (1987). *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg , Germany.

[2] **Chaki, M.C. ve Maity, R.K.** (2000). On quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, *57*, 297–306.

[3] **De, U.C. ve Ghosh, G.C.** (2004). On quasi-Einstein manifolds, *Period. Math. Hungar.*, *48*(1–2), 223–231.

[4] **Deszcz, R.**, **Glogowska, M.**, **Hotloś, M. ve Şentürk, Z.** (1998). On certain quasi-Einstein semisymmetric hypersurfaces, *Annales Univ. Sci. Budapest.*, *41*, 151–164.

[5] **Deszcz, R.**, **Hotloś, M. ve Şentürk, Z.** (2001). On curvature properties of quasi-Einstein hypersurfaces in semi-Euclidean spaces, *Soochow J. Math.*, *27*(4), 375–389.

[6] **Guha, S.** (2003). On quasi-Einstein and generalized quasi-Einstein manifolds, *Facta Universitatis*, *3*(14), 821–842.

[7] **Chaki, M.C.** (2001). On generalized quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, *58*, 683–691.

[8] **De, U.C. ve Ghosh, G.C.** (2004). On generalized quasi-Einstein manifolds, *Kyungpook Math. J.*, *44*, 607–615.

[9] **Chaki, M.C.** (2004). On super quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, *64*, 481–488.

[10] **De, U.C. ve Gazi, A.K.** (2008). On nearly quasi-Einstein manifolds, *Novi Sad J. Math.*, *38*(2), 115–121.

[11] **Bhattacharyya, A.**, **De, T. ve Debnath, D.** (2007). Mixed generalized quasi Einstein manifold and some properties, *Analele Şt Ale. Univ. Al. I. Cuza Din Iaşi (S.N.) Matematică*, *LIII*, 137–148.

[12] **Shaikh, A.A. ve Jana, S.K.** (2008). On pseudo generalized quasi-Einstein manifolds, *Tamkang J. Math.*, *1*, 9–24.

[13] **Chaki, M.C.** (1987). On pseudo symmetric manifolds, *Analele Şt Ale. Univ. Al. I. Cuza Din Iaşi*, *33*, 53–58.

[14] **Chaki, M.C.** (1988). On pseudo Ricci symmetric manifolds, *Bulgar. J. Phys.*, *15*, 526–531.

[15] **Chaki, M.C. ve Kawaguchi, T.** (2007). On almost pseudo Ricci symmetric manifolds, *Tensor (N.S.)*, *68*, 10–14.

[16] **Tamássy, L. ve Binh, T.Q.** (1993). On weak symmetries of Einstein and Sasakian manifolds, *Tensor (N. S.)*, *53*, 140–148.

[17] **Brinkmann, H.W.** (1925). Einstein spaces which are mapped conformally on each other, *Math. Ann.*, *94*(1), 119–145.

[18] **Chepurna, O.**, **Kiosak, V. ve Mikeš, J.** (2010). Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor, *Aplimat–Journal of Applied Mathematics*, *3*(1), 253–258.

[19] **Eisenhart, L.P.** (1926). *Riemannian Geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton.

[20] **Fu, F.**, **Yang, X. ve Zhao, P.** (2012). Geometrical and physical characteristics of a class of conformal mappings, *J. Geom. Phys.*, *62*, 1467–1479.

[21] **Ishii, Y.** (1957). On conharmonic transformations, *Tensor (N. S.)*, *7*, 73–80.

[22] **Kiosak, V.A.** (2012). On the conformal mappings of quasi-Einstein spaces, *Journal of Mathematical Sciences*, *184*(1), 12–18.

[23] **Mikeš, J.**, **Gavrilchenko, M.L. ve Gladysheva, E.I.** (1994). Conformal mappings onto Einstein spaces, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, *49*(3), 10–14.

[24] **Yano, K.** (1944). On the torse-forming directions in Riemannian spaces, *Proc. Imp. Acad.*, *20*(6), 340–345.

[25] **Mikeš, J. ve Rachunek, L.** (2000). Torse-forming vector fields in T-semisymmetric Riemannian spaces, *Proc. of the Colloquium on Diff. Geo.*, 219–229.

[26] **Rachunek, L. ve Mikeš, J.** (2005). On tensor fields semiconjugated with torse-forming vector fields, *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica*, *44*, 151–160.

[27] **Hinterleitner, I. ve Kiosak, V.A.** (2008). $\phi(\mathrm{Ric})$-vector fields in Riemannian spaces, *Archivum Mathematicum*, *44*(5), 385–390.

[28] **Hall, G.S.** (2004). *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, World Scientific.

[29] **Ghanam, R. ve Thompson, G.** (2001). The holonomy Lie algebras of neutral metrics in dimension four, *J. Math. Phys.*, *42*(5), 2266–2284.

[30] **Hall, G.S.** (2015). The geometry of 4-dimensional Ricci flat manifolds which admit a metric, *J. Geom. Phys.*, *89*, 50–59.

[31] **Hall, G.S.** (1988). Connections and symmetries in spacetime, *Gen. Rel. Grav.*, *20*(4), 399–406.

[32] **Hall, G.S. ve Wang, Z.** (2012). Projective structure in 4-dimensional manifolds with positive definite metrics, *J. Geom. Phys.*, *62*, 449–463.

[33] **Hall, G.S. ve Lonie, D.P.** (2000). Holonomy groups and spacetimes, *Class. Quant. Grav.*, *17*, 1369–1382.

[34] **Schell, J.F.** (1961). Classification of four-dimensional Riemannian spaces, *J. Math. Phys.*, *2*, 202–206.

[35] **Wang, Z. ve Hall, G.** (2013). Projective structure in 4−dimensional manifolds with metric of signature $(+,+,-,-)$, *J. Geom. Phys.*, *66*, 37–49.

[36] **Weatherburn, C.E.** (1966). *An Introduction to Riemannian Geometry and The Tensor Calculus*, Cambridge.

[37] **Hicks, N.J.** (1965). *Notes on differential geometry*, D. Van Nostrand Inc., Princeton.

[38] **O'Neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc.

[39] **Singh, R.N.**, **Pandey, M.K. ve Gautam, D.** (2011). On nearly quasi Einstein manifold, *Int. Journal of Math. Analysis*, *5*(36), 1767–1773.

[40] **Walker, A.G.** (1950). On Ruse's spaces of recurrent curvature, *Proc. London Math. Soc.*, *52*, 36–64.

[41] **De, U.C.**, **Guha, N. ve Kamilya, D.** (1995). On generalized Ricci-recurrent manifolds, *Tensor (N.S.)*, *56*(3), 312–317.

[42] **Özgür, C. ve Sular, S.** (2008). On some properties of generalized quasi-Einstein manifolds, *Indian J. Math.*, *50*(2), 297–302.

[43] **Arslan, K.**, **Ezentaş, R.**, **Murathan, C. ve Özgür, C.** (2001). On pseudo Ricci-symmetric manifolds, *Balkan. J. Geo. and Its App.*, *6*(2), 1–5.

[44] **Patterson, E.M.** (1951). On symmetric recurrent tensors of the second order, *Quart. J. Math. Oxford*, *22*, 151–158.

[45] **Datta, D.K.** (1974). Recurrent tensors and holonomy group, *Bull. Australian. Maths. Soc.*, *10*(1), 71–77.

[46] **Datta, D.K.** (1964). Some theorems on symmetric recurrent tensors of the second order, *Tensor (N.S.)*, *15*, 61–65.

[47] **Kobayashi, S. ve Nomizu, K.** (1963). *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, New York.

[48] **Ambrose, W. ve Singer, I.** (1953). A theorem on holonomy, *Trans. Am. Math. Soc.*, *75*, 428.

[49] **Hall, G.S.** (2015). Four-dimensional Ricci-flat manifolds which admit a metric, *Filomat*, *29*(3), 563–571.

[50] **Petrov, A.Z.** (1969). *Einstein Spaces*, Pergamon.

[51] **Hall, G.S.** (2014). *Preprint, University of Aberdeen*.

[52] **Hervik, S. ve Coley, A.** (2010). Curvature operators and scalar curvature invariants, *Class. Quant. Grav.*, *27*(9), 095014.

[53] **Hall, G.S. ve Rendall, A.D.** (1989). Local and global algebraic structures in general relativity, *Int. Jn. Theor. Phys.*, *28*, 365–375.

[54] **Öktem, F.** (1976). On parallel null 1-planes in space-time, *Nu. Cim.*, *34*(1), 169–181.

[55] **Hall, G.S.** (2013). On the converse of Weyl's conformal and projective theorems, *Publications de l'Institut Mathematique*, *94*, 55–65.

[56] **Hall, G.S.** (1977). Recurrence conditions in space-time, *J. Phys A.*, *10*, 29–42.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Bahar KIRIK

Doğum Yeri ve Tarihi: Şişli, 18.07.1987

Adres: Halaskargazi Mah., Rumeli Cad., Ay Apt. NO:65 Daire:2, Şişli, İstanbul.

E-Posta: bkirik@itu.edu.tr, baharkirik@gmail.com

Lisans: İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Y. Lisans: İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

- Araştırma Görevlisi - İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Şubat 2010- Halen)
- İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi 2008 Yılı Fakülte Birincilik Ödülü
- TÜBİTAK-BİDEB 2210 Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı (2008-2011)
- TÜBİTAK-BİDEB 2211 Yurt İçi Doktora Burs Programı (2011-2015)
- TÜBİTAK-BİDEB 2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı [6 Ay (01.09.2014-28.02.2015)]

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- Makaleler

▪ Özen Zengin, F. and **Kırık, B.**, 2013: Conformal mappings of nearly quasi-Einstein manifolds, *Miskolc Mathematical Notes*, 14(2), 629–636.

▪ Özen Zengin, F. and **Kırık, B.**, 2013: On a special type nearly quasi-Einstein manifold, *New Trends in Mathematical Sciences*, 1(1), 100–106.

▪ **Kırık, B.** and Özen Zengin, F., 2014: On almost pseudo Ricci-symmetric generalized quasi-Einstein manifolds, *Tensor (N.S.)*, 75(1), 52–60.

▪ **Kırık, B.** and Özen Zengin, F., 2015: Generalized quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields, *Acta Mathematica Academiae Paedagogiace Nyíregyháziensis* , 31(1), 61–69.

▪ **Kırık, B.** and Özen Zengin, F., 2015: Conformal mappings of quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields, *Filomat*, 29(3), 525–534.

▪ Hall, G. S. and **Kırık, B.**, 2015: Recurrence structures in 4-dimensional manifolds with metric of signature $(+,+,-,-)$, *Journal of Geometry and Physics*, 98, 262–274.

- Konferanslar

▪ Özen Zengin, F. and **Kırık, B.**, 2012: On a special type nearly quasi-Einstein manifold, *ICAAA 2012 (International Conference on Applied Analysis and Algebra)*, June 20-24, 2012 Yıldız Technical University, İstanbul, Turkey.

▪ **Kırık, B.** and Özen Zengin, F., 2012: On nearly quasi-Einstein manifolds, *XVII. Geometrical Seminar*, September 03-08, 2012 Zlatibor, Serbia.

▪ Özen Zengin, F. and **Kırık, B.**, 2012: Conformal mappings of nearly quasi-Einstein manifolds, *Algebra Geometry Mathematical Physics*, September 12-14, 2012 Brno, Czech Republic.

▪ Özen Zengin, F. and **Kırık, B.**, 2013: Pseudo Ricci symmetric generalized quasi-Einstein manifolds, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling*, June 02-05, 2013, Yıldız Technical University, İstanbul, Turkey.

▪ **Kırık, B.** and Özen Zengin, F., 2013: Generalized quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields, *Joint Events of Colloquium on Differential Geometry and its Applications and IX-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory*, August 25-31, 2013 Debrecen, Hungary.

▪ **Kırık, B.** and Özen Zengin, F., 2013: On almost pseudo Ricci symmetric generalized quasi-Einstein manifolds, *The 13th International Conference of Tensor Society on Differential Geometry and Its Applications, and Informatics Besides*, September 03-07, 2013 Iaşi, Romania.

▪ **Kırık, B.** and Özen Zengin, F., 2014: Conformal mappings of quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields, *XVIII. Geometrical Seminar*, May 25-28, 2014, Vrnjačka Banja, Serbia.

▪ **Kırık, B.** and Özen Zengin, F., 2015: Some results on quasi-Einstein and generalized quasi-Einstein manifolds, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM2015)*, June 08-12, 2015 Yıldız Technical University, İstanbul, Turkey.

▪ **Kırık, B.** ve Özen Zengin, F., 2015: Neredeyse yarı-Einstein manifoldlarının bazı özellikleri, *13. Geometri Sempozyumu*, Temmuz 27-30, 2015 Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.

▪ Hall, G. S. and **Kırık, B.**, 2015: Holonomy theory and recurrence of tensors on $4-$dimensional manifolds, *20th International Summer School on Global Analysis and its Applications*, August 17-21, 2015 Stará Lesná, Slovakia.