

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**CHEBYSHEV SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ADI TÜREVLİ YÜKSEK  
MERTEBE BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Soner AYDINLIK**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**ARALIK 2015**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**CHEBYSHEV SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ADI TÜREVLİ YÜKSEK  
MERTEBE BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Soner AYDINLIK  
509141207**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ**

**ARALIK 2015**







İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509141207 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Soner AYDINLIK, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “CHEBSHEV SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ADI TÜREVLİ YÜKSEK MERTEBE BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ**  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**            **Prof.Dr. Nalan ANTAR**  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Doç. Dr. M. Alper TUNGA**  
Bahçeşehir Üniversitesi

**Teslim Tarihi**            : **27 Kasım 2015**  
**Savunma Tarihi**        : **22 Aralık 2015**





*Aileme,*



## **ÖNSÖZ**

Yüksek lisansa başladığım ilk günden itibaren, tez konumun belirlenmesinden bitimine kadar benden yardımını, bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ'a, bu süreç boyunca bana güvendikleri ve zor zamanlarımda bana destek oldukları için ailem ve arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

Aralık 2015

Soner Aydınlık



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ .....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET .....	xv
SUMMARY .....	xvii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. CHEBYSHEV POLİNOMLARI .....</b>	<b>5</b>
2.1 Tanım .....	5
2.2 Chebyshev Polinomlarının Özellikleri .....	5
2.3 Chebyshev Polinomlarının Kökleri Ve Ekstremum Noktaları.....	8
<b>3. CHEBYSHEV SONLU FARKLAR YÖNTEMİ .....</b>	<b>11</b>
3.1 Chebyshev Yaklaşım Polinomunun Katsayıları.....	11
3.2 Chebyshev Yaklaşım Polinomunun Türevleri .....	16
3.2.1 Chebyshev polinomlarının türevleri.....	17
<b>4. UYGULAMALAR .....</b>	<b>25</b>
4.1 Adi Türevli Lineer Diferansiyel Denklemler .....	27
4.1.1 İkinci mertebe başlangıç değer problemi .....	27
4.1.2 İkinci mertebe sınır değer problemi .....	29
4.1.3 Yüksek mertebe başlangıç değer problemi .....	31
4.1.4 Yüksek mertebe sınır değer problemi .....	33
4.1.5 Yüksek mertebe robin sınır değer problemi.....	35
4.1.6 Yüksek mertebe karışık sınır değer problemi .....	38
4.1.7 Yüksek mertebe sistem .....	40
4.2 Adi Türevli Nonlineer Diferansiyel Denklemler .....	43
4.2.1 İkinci mertebe başlangıç değer problemi .....	43
4.2.2 İkinci mertebe sınır değer problemi .....	46
4.2.3 Yüksek mertebe başlangıç değer problemi .....	48
4.2.4 Yüksek mertebe sınır değer problemi .....	50
4.2.5 Yüksek mertebe Robin sınır değer problemi .....	52
4.2.6 Yüksek mertebe karışık sınır değer problemi .....	55
4.2.7 Yüksek mertebe sistem .....	58
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>61</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>63</b>
<b>EKLER .....</b>	<b>65</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>91</b>



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

<b>Çizelge 4.1</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>29</b>
<b>Çizelge 4.2</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>31</b>
<b>Çizelge 4.3</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>33</b>
<b>Çizelge 4.4</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>35</b>
<b>Çizelge 4.5</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>38</b>
<b>Çizelge 4.6</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>40</b>
<b>Çizelge 4.7</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>43</b>
<b>Çizelge 4.8</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>46</b>
<b>Çizelge 4.9</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>48</b>
<b>Çizelge 4.10</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>50</b>
<b>Çizelge 4.11</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>52</b>
<b>Çizelge 4.12</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>55</b>
<b>Çizelge 4.13</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>58</b>
<b>Çizelge 4.14</b> : $N$ nin farklı değerleri için maksimum hatalar..	<b>60</b>





## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 4.1 : $N = 4$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	28
Şekil 4.2 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	28
Şekil 4.3 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	29
Şekil 4.4 : $N = 4$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	30
Şekil 4.5 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	31
Şekil 4.6 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	31
Şekil 4.7 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	32
Şekil 4.8 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	33
Şekil 4.9 : $N = 6$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	34
Şekil 4.10 : $N = 9$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	35
Şekil 4.11 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	35
Şekil 4.12 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	37
Şekil 4.13 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	37
Şekil 4.14 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	39
Şekil 4.15 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	40
Şekil 4.16 : $N = 4$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	42
Şekil 4.17 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	42
Şekil 4.18 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	43
Şekil 4.19 : $N = 4$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	45
Şekil 4.20 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	45
Şekil 4.21 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	45
Şekil 4.22 : $N = 4$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	47
Şekil 4.23 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	47
Şekil 4.24 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	48
Şekil 4.25 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	49
Şekil 4.26 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	50
Şekil 4.27 : $N = 10$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	51
Şekil 4.28 : $N = 14$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	52
Şekil 4.29 : $N = 7$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	54
Şekil 4.30 : $N = 9$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	54
Şekil 4.31 : $N = 11$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	55
Şekil 4.32 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	57
Şekil 4.33 : $N = 16$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	57
Şekil 4.34 : $N = 4$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	59
Şekil 4.35 : $N = 8$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.....	60
Şekil 4.36 : $N = 12$ için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması..	60



# CHEBYSHEV SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ADI TÜREVLİ YÜKSEK MERTEBE BAŞLANGIÇ VE SINIR PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

## ÖZET

Bu çalışmada adi türevli yüksek mertebeden başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözülmesi amaçlanmaktadır. Yüksek mertebeden sınır değer problemleri uygulamalı mekaniğin birçok mühendislik probleminde ortaya çıkmaktadır. Adi türevli yüksek mertebede diferansiyel denklemlerin çözümü için global faz-integrasyon, Adomian-ayrıştırma, "The new-iterative", diferansiyel dönüşüm, diferansiyel kuadratik kuralı, homotopi analiz, homotopi pertürbasyon, Spline ve Laplace ayrıştırma gibi çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden Adomian yöntemi karmaşık Adomian polinomlarının hesabını, homotopi yöntemleri sağlanması gereken birçok koşulu ve uygun parametrelerin bulunmasını gerektirmekte ve hemen hepsi Chebyshev polinomlarına göre daha fazla CPU zamanına ihtiyaç duymaktadır.

Chebyshev polinomları sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde tam ortogonal bir küme oluşturmakta rekürsif ilişkileri kolayca elde edilebilmesi nedeniyle özellikle türev ve integralleri istenilen mertebeden rekürsif olarak hesaplanabilmektedir. Chebyshev polinomları aynı dereceden diğer polinomlara göre verilen aralıkta maksimum hatası minimum olan en uygun yaklaşım polinomlarıdır.

Chebyshev sonlu farklar yöntemi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde sıklıkla kullanılan fonksiyonlardan biridir. Bu yöntemde diferansiyel denklem hangi mertebeden olursa olsun yaklaşım polinomunun denklemde görünen mertebeden türevleri hesaplanmakta ve bu türevler diferansiyel denklemde kullanılarak, denklem, lineerse lineer denklem sistemine, nonlinear ise nonlinear denklem sistemine indirgenmekte, dolayısıyla buradaki tek problem nonlinear denklem sisteminin çözümü olmaktadır. Ayrıca bu yöntem ile birçok sayısal yöntemde olduğu gibi çözüm aralığının sadece belirli noktalarında değil, tüm aralık boyunca geçerli bir yaklaşım polinomu olarak elde edilir.

Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile birinci ve ikinci mertebeye başlangıç veya sınır değer problemlerinin çözümü literatürde sıklıkla görülmektedir. Nadiren birkaç problemde ise ortaya çıkan üçüncü mertebeden diferansiyel denklemler Chebyshev yaklaşım polinomunun 3. mertebeden türevi için ardışık toplam sembolleri kullanılarak çözülmüştür. Bu mantık  $n$ . mertebeden türev için ardışık  $n$  tane toplam sembolü kullanılmasını gerektirmekte ve her toplamda içerideki ifade de değişeceğinden, programlamada güçlükler neden olmaktadır. Yüksek mertebeden diferansiyel denklemler, rekürsif bir ilişkinin var olmasına rağmen bu rekürsif ilişkinin giderek karmaşılaşması nedeniyle Chebyshev sonlu farklar yöntemi kullanılarak çözülememektedir.

Bu tez çalışmasında Chebyshev polinomlarının her mertebeden türevleri için var olan rekürsif ilişki yerine genel bir formül üretilmiştir. Üretilen bu genel formül ile Chebyshev sonlu farklar yöntemi her mertebeden adi türevli başlangıç veya sınır değer problemine uygulanabilir hale getirilmiş ve bu yöntem uygulanarak problemler

lineer veya nonlinear denklem sistemlerine indirgenmiş, bunların çözümünden de diferansiyel denklemin çözümü olarak yaklaşım polinomları elde edilmiştir. Çalışma kapsamında, bu genel türev formülü yardımıyla genelleştirilen Chebyshev sonlu farklar yöntemi farklı yüksek mertebelerden aditürevli lineer sistemlere, başlangıç ve sınır değer, Robin sınır değer, karışık sınır değer problemleri ile nonlinear sistemlere uygulanmıştır. Elde edilen sayısal çözümler ile, analitik çözümler karşılaştırılmış ve yaklaşım polinomunun terim sayısındaki artışla birlikte sayısal çözümlerin hızla analitik çözümlere yakınsadığı grafiklerle gösterilmiştir.

# **SOLUTION OF INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF HIGHER ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CHEBYSHEV FINITE DIFFERENCE METHOD**

## **SUMMARY**

In this work, it is aimed to solve initial and mixed boundary value problems of higher order ordinary differential equations. High-order boundary value problems arise in many engineering problems of applied mechanics. Many classical engineering problems such as calculus of variations problems, kinematics are modeled successfully with at least second-order differential equations. However, different order differential equations come up when the mathematical constraints are reduced for compliance with physical reality. For example, when non elastic, microstructured material is considered, third-order differential equations arise at the mass flow of a micropolar material. Even for the elastic case, fourth-order differential equations arise in the bending of the linear elastic rod. Modelling of the behavior of the induction motor requires fifth order differential equation, but when the fluid layers are heated and rotated, the resulting classic heat dissipation require sixth order differential equation. Many other examples can be found in the literature, but here the two examples are given lastly for extreme cases; when the magnetic effects are considered in setting of above example, the differential equation is tenth order, and the vibration of a uniform bar governed by eighth-order differential equation is more familiar one.

Various methods such as Global Phase-Integration Method, Adomian-decomposition method, The New-Iterative Method, Differential Transformation Method, Differential Quadrature Rule, Homotopy Analysis Method, Homotopy Perturbation Method, Spline Method and Laplace decomposition methods are used for the solution of high-order ordinary differential equations. Adomian method requires the calculation of complex Adomian polynomials, homotopy methods require several conditions to be satisfied and the presence of appropriate parameters and almost all of them need more CPU time than Chebyshev polynomials.

Chebyshev polynomials create a complete orthogonal set for continuous functions space and specially their derivatives and integrals of any order can be calculated, since their recursive relationships can easily be obtained. Chebyshev polynomials are the most appropriate approximation polynomials, maximum error of which is the minimum on the given interval among the other same degree polynomials.

Chebyshev finite difference method is one of the frequently used functions for numerical solution of differential equations. In this method, no matter what order of differential equations, all order derivatives of the approximation polynomial appearing in the equation are calculated and by using this derivatives in the differential equations, the equation is reduced to the linear system, if equation is linear. Similarly, if the equation is nonlinear, it is reduced to the nonlinear system. Therefore, the only problem remaining here is the solution of the nonlinear equation. In addition, in this method, the solution is not obtained for only at certain points as

many numerical methods, but also a valid approximation polynomial as a solution is obtained throughout the entire interval.

The solution of first and second order initial or boundary value problems with Chebyshev finite difference method is studied widely in the literature. As we known, in rarely a few problems, third-order differential equations are solved by Chebyshev finite difference method. In these studies, the summation symbol is used three times, iteratively for the third-order derivative of the approximation polynomial. This logic requires the use of the summation symbols  $n$  times, consecutively for the  $n^{\text{th}}$  order derivatives, which causes difficulties in programming phases since the expressions inside the summation symbols may change each time. Although there is a recursive relationship between the derivatives of the approximation polynomial, higher order differential equations have not solved using Chebyshev finite difference methods before this thesis because of the increasing complexity of this recursive relationship between derivatives.

In this thesis, a general formula is presented for every order derivatives of Chebyshev polynomials instead of existing recursive relationship of Chebyshev polynomials. Thanks to the obtained general formula, Chebyshev finite difference method is made applicable to the initial or boundary value problems of any order of ordinary differential equations. Thus, the problems are reduced to linear or nonlinear system of equations and the approximation polynomials are obtained as the solutions of the given differential equations by solving this system. In this study, Chebyshev finite difference method with the proposed generalized formula for the any order derivatives is applied to a linear system, some initial and boundary value problems, Robin and mixed boundary value problems and a nonlinear system of different higher order ordinary differential equations. The obtained numerical solutions are compared with analytical solutions and an increase in the number of terms of the approximation polynomial causes rapid convergence of numerical solutions to the analytical solutions, this fact is shown by graphs for all examples.

This thesis consists of four parts.

In the first section, the subject and purpose of thesis is mentioned.

In the second part of the thesis, Chebyshev Polynomials of the first kind is defined, their properties are given and the recursive relationship between the successive Chebyshev polynomials are shown in detail. Then, the extreme points and the roots of the Chebyshev polynomials were found.

In the third part of the thesis, Chebyshev finite differences method is described in steps. In the first step, assuming that Chebyshev polynomials can be obtained by sum of series, an approximation polynomial which uses the extreme points of Chebyshev polynomials is obtained. In the second step, a formula was obtained for the coefficients of the approximation polynomial. In the third step, first and second order derivatives of Chebyshev polynomials have been found step by step and then third, fourth and fifth derivatives are calculated in a similar way and by the help of these derivatives, a general formula is obtained for any higher order derivatives of Chebyshev polynomials. In the last step, with the guidance of this proposed formula, a general formula is obtained for any order of derivatives of approximation polynomial.

In the fourth part of the thesis, some examples are given. First, to illustrate the method, a basic linear and nonlinear initial value problems are solved. In the second

part of this section, various linear examples are solved. Respectively, a second and a sixth order boundary value problems, an eighth order initial value problem, an eighth order Robin boundary value problem, an eighth order mixed boundary value problem, a fourth order system and lastly a nonlinear initial value problem of second order are given. In the third part of this section, various nonlinear examples are solved. Respectively, a second and a tenth order boundary value problem, an eighth order initial value problem, a seventh order Robin boundary value problem, a twelfth order mixed boundary value problem, and finally a fourth order system are given.





## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada adi türevli yüksek mertebeden başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözülmesi amaçlanmaktadır. Yüksek mertebeden sınır değer problemleri akışkanlar mekaniği, astrofizik, uygulamalı mekanik gibi birçok mühendislik probleminde ortaya çıkmaktadır. Kinematik, varyasyonlar hesabı problemleri gibi birçok klasik mühendislik problemleri en azından ikinci mertebeye diferansiyel denklemler ile başarı ile modellenmektedir. Ancak, fiziksel gerçeklere uygunluk için matematiksel kısıtlamalar biraz daha esnetildiğinde, örneğin malzeme klasik elastik değil de, mikroyapılı alındığında mikropolar malzemenin kütle akışında üçüncü mertebeden [1], linear elastik çubukların eğilmesinde dördüncü mertebeden diferansiyel denklemler ortaya çıkmaktadır [2]. Indüksiyon motorunun davranışı beşinci mertebeye [3], akışkan tabakaları ısıtıldığında ve dönmeye tabi tutulduğunda ortaya çıkan klasik ısı yayılımı altıncı mertebeye, ortamda manyetik etkiler düşünüldüğünde onuncu mertebeye [4], düzgün çubukların burulma titreşimleri sekizinci mertebeye diferansiyel denklemlerle modelleme gerektirmektedir [5].

Literatürde adi türevli yüksek mertebeye diferansiyel denklemlerin çözümü için çoğunlukla homotopi analizi yöntemi kullanılmakla birlikte, Baldwin altıncı dereceden sınır değer problemini çözmek için global faz-integrasyonu yöntemini [6], Wazwaz sekizinci dereceden sınır değer problemi için Adomian ayrıştırma yöntemini [7], Ullan, Khan ve Rahim ise çalışmalarında onuncu dereceden nonlinear denklemleri çözmek için “The new-iterative” [8] yöntemini kullanmışlardır. Ayrıca Abdel-Hassan, Ertürk yüksek mertebeden nonlinear sınır değer problemlerini çözerken diferansiyel dönüşüm yöntemini [9], sekizinci dereceden sınır değer problemini çözmek için Li ve Wu diferansiyel kuadratik [10], Golbabai ve Javidi homotopi pertürbasyon [11], Siddiqi, Twizell ve Akram ise Spline yöntemlerini kullanmışlardır [12-13-14]. Khan ve Hussain nonlinear Blasius akışı denkleminin seri çözümünü elde edebilmek için Laplace ayrıştırma yöntemini kullanmışlardır [15]. Bu yöntemlerden Adomian yöntemi karmaşık Adomian polinomlarının hesabını,

homotopi yöntemleri ise uygun parametrelerin bulunmasının yanı sıra bir çok koşulu daha gerektirmektedir [16].

İlk kez Rus matematikçi Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) tarafından kullanılan Chebyshev polinomları [17], 1930 lu yıllarda Corneilus Lanczos tarafından sayısal yöntemlerdeki üstünlüğü kanıtlanırsa da [18], Clenshaw tarafından Chebyshev yaklaşım polinomlarının 1950 lerde kullanılmasına kadar [19, 20], hak ettiği ilgiyi görmemiştir. Özellikle Lanczos tarafından Chebyshev polinomlarının ortogonal oldukları ve küçük dereceden polinomlar kullanılarak iyi yaklaşım sağlayabildikleri gösterilmiştir [21]. Chebyshev polinomları bu ortogonalite özellikleri nedeniyle, sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde tam ortogonal bir küme oluşturmaktadır. Ayrıca rekürsif ilişkilerin kolayca elde edilebilmesi nedeniyle özellikle türev ve integralleri istenilen mertebeden rekürsif olarak hesaplanabilmektedir ve aynı dereceden diğer polinomlara göre verilen aralıkta maksimum hatası minimum olan en uygun yaklaşım polinomları oldukları da ispatlanmıştır [22].

Chebyshev sonlu farklar yöntemi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde sıklıkla kullanılan fonksiyonlardan biridir [1, 23-25]. Bu yöntemde diferansiyel denklem hangi mertebeden olursa olsun yaklaşım polinomunun denklemden görünen mertebeden türevleri hesaplanmakta ve bu türevler diferansiyel denklemden kullanılarak, denklem, lineerse lineer denklem sistemine, nonlinear ise nonlinear denklem sistemine indirgenmekte, dolayısıyla buradaki tek problem nonlinear denklem sisteminin çözümü olmaktadır. Chebyshev yönteminde birçok sayısal yöntemde olduğu üzere, çözüm aralığının sadece belirli noktalarında değil, tüm aralık boyunca geçerli bir yaklaşım polinomu çözümü elde edildiğini özellikle vurgulamak gerekir. Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile birinci mertebeli problemler ile ikinci mertebeli başlangıç veya sınır değer problemlerinin çözümü literatürde sıklıkla görülmektedir; El-Kady ve Elbarbary (2003) çalışmalarında Chebyshev yaklaşım polinomunun ilk iki mertebeden türevlerini rekürsif bir ilişki olarak değil, genel bir formülle elde etmişler ve bu türevler yardımıyla da ikinci mertebeli sınır değer problemlerini çözmüşlerdir [23]. Saadatmandi ve Farsangi (2007) ikinci mertebeli nonlinear sistem, Saadatmandi ve Deghan (2008) varyasyonlar hesabı problemlerinin çözümlerini Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile elde etmişlerdir, ancak bu çalışmalarda da sadece ilk iki mertebeli problemler çözülebilmektedir [24,

25]. Aouadi (2008) ısı ile gerdirilmiş bir yüzeyden mikropolar akışı ve kütle transferini incelerken ortaya çıkan 3. mertebe diferansiyel denklemin çözümü için önceki çalışmalarda elde edilen Chebyshev yaklaşım polinomunun ilk iki türevinden yararlanarak üçüncü türev için iteratif ilişkilerden bir formül elde etmiştir [1]. Fakat burada yaklaşım polinomunun 3. mertebeden türevi için ardışık toplam sembolleri kullanmıştır. Bu mantık ise,  $n$  . mertebeden türev için ardışık  $n$  tane toplam sembolü kullanılmasını gerektirmekte ve her toplamda içerideki ifade de değişeceğinden, bu durum programlamada güçlükler neden olmaktadır. Yukarıda belirtilen diğer yöntemlere göre Chebyshev sonlu farklar yönteminin yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için kullanılmasının temel nedeni, yüksek mertebeden türevler için rekürsif bir ilişkinin var olması, ancak bahsedildiği üzere bu rekürsif ilişkinin giderek karmaşıklaşması nedeniyle yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için kullanımının etkili olmamasıdır.

Bu tez çalışmasında Chebyshev polinomlarının her mertebeden türevleri için var olan rekürsif ilişki yerine genel bir formül üretilmiştir. Üretilen bu genel formül ile Chebyshev sonlu farklar yöntemi her mertebeden adi türevli başlangıç veya sınır değer problemine uygulanabilir hale getirilmiş ve bu yöntem uygulanarak problemler lineer veya nonlinear denklem sistemlerine indirgenmiş, bunların çözümünden de diferansiyel denklemlerin çözümleri olan yaklaşım polinomları elde edilmiştir. Çalışma kapsamında, bu genel formül yardımıyla genelleştirilen Chebyshev sonlu farklar yöntemi farklı yüksek mertebelerden lineer sistemlere, başlangıç ve sınır değer, Robin sınır değer, karışık sınır değer problemleri ile nonlinear sistemlere uygulanmış ve elde edilen sonuçlar, bu problemlerin analitik çözümleriyle de karşılaştırılmıştır.

Tez dört bölümden oluşmakta olup, birinci bölümünde tez konusu ve amacından bahsedilmiş, ikinci bölümde ise Chebyshev polinomları tanımlanmış, özellikleri maddeler halinde verilmiş ve bu özelliklerden Chebyshev polinomları arasındaki rekürsif ilişkiler detaylı bir şekilde gösterilmiştir. Son olarak da bu polinomların kökleri ve ekstremum noktaları bulunmuştur.

Üçüncü bölümde Chebyshev sonlu farklar yöntemi aşamalı olarak anlatılmıştır. İlk aşamada çözümün Chebyshev polinomlarının seri toplamı şeklinde oluşturulabileceği varsayılarak, bu polinomların ekstremum noktalarının kullanıldığı bir yaklaşım polinomu elde edilmiştir. İkinci aşamada bu yaklaşım polinomunun katsayıları için

bir formül elde edilmiştir. Üçüncü aşamada Chebyshev polinomlarının birinci ve ikinci merteye türevleri örnek oluşturması açısından adım adım gösterilerek bulunmuş, üçüncü, dördüncü ve beşinci türevleri de benzeri bir mantıkla hesaplanarak, bu beş türev yardımıyla da herhangi bir mertebeden Chebyshev polinomlarının türevleri için genel bir formül elde edilmiştir. Son aşamada da oluşturulan bu formül yardımıyla yaklaşım polinomunun türevleri için genel bir formül elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde adi türevli diferansiyel denklemler incelenmiş olup, ilk olarak ikinci mertebeden lineer bir sistem, bir başlangıç ve bir de sınır değer problemi verilmiştir. İkinci olarak yüksek mertebeden lineer, birer tane 8. mertebeden başlangıç değer, 6. mertebeden sınır değer, 8. mertebeden Robin sınır değer ve 8. mertebeden karışık sınır değer problemi verilmiştir. Üçüncü olarak, ikinci merteye nonlinear bir sistem, bir başlangıç ve bir de sınır değer problemi verilmiştir. Son olarak yüksek mertebeden problemlerden ise birer tane 8. mertebeden nonlinear başlangıç değer, 10. mertebeden sınır değer, 7. mertebeden Robin sınır değer ve 12. mertebeden karışık sınır değer problemlerinin sayısal çözümleri Chebyshev sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. İncelenen tüm problemler hangi aralıkta verilirse verilsin, uygun lineer bir dönüşümle Chebyshev polinomlarının tanım aralığına taşınmıştır. Verilen ikinci mertebeki ilk örnekler yöntemin daha iyi anlaşılması için detaylı çözülmüş, yüksek mertebeden örneklerde ise detaylı çözüm çok uzun olacağından sadece sonuçları verilmiştir. İncelenen tüm problemler için analitik çözümler ile Chebyshev sonlu farklar yönteminden elde edilen tüm aralıkta geçerli yaklaşım polinomu çözümleri karşılaştırılmış ve yaklaşım polinomunun terim sayısındaki artışla sayısal çözümlerin hızla analitik çözümlere yakınsadığı grafiklerle gösterilmiştir.

## 2. CHEBYSHEV POLİNOMLARI

### 2.1. Tanım

Chebyshev polinomlarının dört farklı türü olmasına rağmen bu çalışmada diğer türlerine göre daha yaygın olarak kullanılan 1. Tip Chebyshev Polinomları incelenmiştir [23-26].

Birinci Tip Chebyshev Polinomları

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \forall n \geq 0, \quad x \in [-1, 1] \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır [22]. Ayrıca bu polinomlar

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \quad \forall n \geq 0 \quad (2.2)$$

olarak da tanımlanabilir [27].

### 2.2. Chebyshev Polinomlarının Özellikleri

Aşağıda Chebyshev polinomlarının özellikleri sıralanmıştır.

#### 1. Üretici fonksiyon

Birinci Tip Chebyshev Polinomları aşağıdaki fonksiyonun seri açılımından üretilebilir;

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n \quad \forall n \geq 0 \quad (2.3)$$

#### 2. $x$ herhangi bir reel sayı veya kompleks sayı olmak üzere

$$T_n \left( \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) = \frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}, \quad n > 0 \quad (2.4)$$

ilişkisi vardır.

3. Chebyshev polinomlarının en yüksek dereceli terimin katsayısı  $2^{N-1}$  ( $N \geq 1$ ) dir.

4.  $T_{2N}(x)$  çift,  $T_{2N+1}(x)$  tek fonksiyondur.

5. Chebyshev polinomları arasındaki rekürsif ilişki

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (2.5)$$

şeklindedir .

*İspat:* (2.1) ifadesinden,

$$T_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)\cos^{-1}(\cos \theta)) = \cos((n+1)\theta) \quad (2.6)$$

$$T_{n+1}(\cos \theta) = \cos(n\theta)\cos \theta - \sin(n\theta)\sin \theta \quad (2.7)$$

ve

$$T_{n-1}(\cos \theta) = \cos((n-1)\cos^{-1}(\cos \theta)) = \cos((n-1)\theta) \quad (2.8)$$

$$T_{n-1}(\cos \theta) = \cos(n\theta)\cos \theta + \sin(n\theta)\sin \theta \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.7) ve (2.9) toplanarak,

$$T_{n+1}(\cos \theta) + T_{n-1}(\cos \theta) = 2\cos(n\theta)\cos \theta \quad (2.10)$$

sonucuna ulaşılır. Burada,  $\theta = \cos^{-1} x$  ilişkisi kullanılır

$$T_{n+1}(\cos(\cos^{-1}x)) + T_{n-1}(\cos(\cos^{-1}x)) = 2\cos(n(\cos^{-1}x))\cos(\cos^{-1}x) \quad (2.11)$$

ve bu ifade sadeleştirilirse (2.5) rekürsif ilişkisine ulaşılır.

6. Chebyshev polinomları  $x \in [-1,1]$  aralığında

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.12)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler.

*İspat:*  $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$  olduğundan,  $n = m \neq 0$  için

$$I = \int_{-1}^1 w(x)T_n(x)T_m(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{(\cos(n\cos^{-1}x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (2.13)$$

elde edilir, burada  $\theta = \cos^{-1} x$  dönüşümü yapılırsa

$$I = \int_{\pi}^0 -(\cos(n\theta))^2 d\theta \quad (2.14)$$

haline gelir. Trigonometrik yarım açı formülleri kullanılarak ve sınırların yerleri değiştirilerek integral

$$\int_0^{\pi} \frac{(\cos 2\theta + 1)}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (2.15)$$

olarak bulunur.

$I$  integrali  $n = m = 0$  için incelenir ve  $T_0(x) = \cos(0 \cos^{-1} x) = 1$  olduğu kullanılırsa,

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi \quad (2.16)$$

sonucuna ulaşılır.

Son olarak  $I$  integrali,  $n \neq m \neq 0$  için incelenirse;

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \cos^{-1} x) \cos(m \cos^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (2.17)$$

şeklini alır. Benzer şekilde  $\theta = \cos^{-1} x$  dönüşümü ve gerekli sadeleştirmelerle

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta] d\theta = 0 \quad (2.18)$$

elde edilir. Yukarıdaki bu üç durum

$$\int_{-1}^1 w(x) T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi / 2, & n = m \neq 0 \\ \pi, & n = m = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

şeklinde yazıldığında Chebyshev polinomlarının ağırlık fonksiyonuna göre,  $[-1, 1]$  aralığında ortogonal olduğu kolaylıkla görülebilir.

### 2.3. Chebyshev Polinomlarının Kökleri Ve Ekstremum Noktaları

**Teorem 2.2:**  $T_n(x)$  polinomunun  $n \geq 1$  iken  $x \in [-1,1]$  aralığında

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

noktalarında  $n$  tane kökü ve

$$\tilde{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.21)$$

Noktalarında  $(n+1)$  tane ekstremumu vardır.

*İspat:* Chebyshev polinomlarının kökleri için,

$$T_n(\bar{x}_k) = \cos(n \cos^{-1} \bar{x}_k) = 0 \quad (2.22)$$

denklemini sağlayan  $\bar{x}_k$  değerlerine ihtiyaç vardır. İfadenin her iki yanının arccos 'u alındığında

$$\cos^{-1}(\cos(n \cos^{-1} \bar{x}_k)) = \cos^{-1} 0 \rightarrow n \cos^{-1} \bar{x}_k = \frac{\pi}{2}(2k-1) \quad (2.23)$$

elde edilir ki, buradan

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

noktalarında  $n$  tane kökü olduğu sonucuna ulaşılır.

Ekstremum noktaları için ise, (2.1) ifadesinin türevi alınır,

$$T'_n(\tilde{x}_k) = \frac{n \sin(n \cos^{-1} \tilde{x}_k)}{\sqrt{1-\tilde{x}_k^2}} = 0 \quad (2.25)$$

denklemden de,

$$\tilde{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

olarak elde edilir. Ekstremum noktaları (2.1) ifadesinde yerine yazılır,

$$T_n(\tilde{x}_k) = \cos\left(n \cos^{-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right) \quad (2.27)$$



şeklinde yeniden düzenlenirse Chebyshev polinomlarının ekstremum değerleri

$$T_n(\tilde{x}_k) = (-1)^k \quad (2.28)$$

olarak bulunur. Buradan da  $T_n(x)$  polinomunun  $k$  tek sayı ise minimum,  $k$  çift sayı ise maksimum değer aldığı kolayca görülebilir.



### 3. CHEBYSHEV SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Bu bölümde Chebyshev sonlu farklar yönteminden bahsedilmiştir. Bu yöntemde çözümün

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) \quad (3.1)$$

şeklinde Chebyshev polinomlarının seri toplamı olarak yazılabileceği varsayılır. Burada toplam sembolündeki  $\sum$  işareti ilk ve son terimlerin yarısının alınması anlamındadır ve N yaklaşım polinomunun derecesini göstermektedir. (3.1) deki ifadenin seri açılımı

$$y(x) = \frac{1}{2} a_0 T_0 + a_1 T_1 + \dots + a_n T_n + \dots + \frac{1}{2} a_N T_N \quad (3.2)$$

şeklinde de yazılabilir.

#### 3.1 Chebyshev Yaklaşım Polinomunun Katsayıları

(3.1) deki ifadenin seri açılımında  $a_n$  katsayılarının bulunabilmesi için her iki taraf  $w(x)$  ve  $T_m(x)$  ile çarpılıp  $[-1,1]$  aralığında integre edilirse, Chebyshev polinomlarının ortogonalite özelliğinden dolayı

$$\int_{-1}^1 w(x) y(x) T_m(x) dx = \frac{\pi}{2} a_n = \frac{\pi}{2} a_m, \quad n = m \quad (3.3)$$

ifadesi elde edilir.  $n \neq m$  iken (2.19) dan dolayı yukarıdaki integral sıfır olacağından sağ tarafta yalnızca  $\frac{\pi}{2} a_n$  ifadesi kalır.

Buradan da

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 w(x) y(x) T_n(x) dx \quad (3.4)$$

olarak bulunur. Bu integral düzenlenerek

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y(x_j) T_n(x_j) \quad (3.5)$$

sonucuna ulaşılır.

*İspat:*

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) L_j(x) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanan Lagrange interpolasyon formülü  $f(x) = y(x) T_n(x)$  olarak alınır ve (3.4) ifadesine uygulanırsa  $a_n$  katsayıları

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 w(x) \left( \sum_{j=1}^n y(x_j) T_n(x_j) L_j(x) \right) dx \quad (3.7)$$

halini alır. Bu ifade

$$w_j(x) = \int_{-1}^1 w(x) L_j(x) dx \quad (3.8)$$

şeklinde tekrar yazılırsa

$$a_n = \frac{2}{\pi} w_j(x) \left( \sum_{j=1}^n y(x_j) T_n(x_j) \right) \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Buradan  $w_j(x)$  ifadesi bulunup yerine yazıldığında  $a_n$  katsayılarına da ulaşılmış olacaktır.

(3.8) integralinin çözümü için ilk olarak

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (3.10)$$

ifadesi yerine yazıldığında,

$$w_j(x) = \int_{-1}^1 w(x) \left( \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) dx \quad (3.11)$$

halini alan integraldeki  $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x - x_i$  ifadesi

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x - x_i = \frac{\prod_{i=1}^n x - x_i}{x - x_j} = \frac{P_n(x)}{a_n(x - x_j)} \quad (3.12)$$

şeklinde düzenlenir. Burada,  $P_n(x)$   $n$ . dereceden bir polinomu ve  $a_n$ , en yüksek dereceli terim olan  $x^n$  teriminin katsayısıdır.

(3.12) ifadesinin limiti alındığında

$$\lim_{x \rightarrow x_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x - x_i = \lim_{x \rightarrow x_j} \frac{P_n(x)}{a_n(x - x_j)} \quad (3.13)$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen belirsizlik gereği L' Hospital kuralı uygulandığında

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_j - x_i = \frac{P_n'(x_j)}{a_n} \quad (3.14)$$

şeklinde yazılarak (3.11) integralinde bu sonuç kullanılırsa

$$w_j(x) = \int_{-1}^1 w(x) \left( \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x - x_i) \frac{a_n}{P_n'(x_j)} \right) dx \quad (3.15)$$

olarak bulunur. (3.12) ifadesi (3.15) de kullanıldığında

$$w_j(x) = \frac{1}{P_n'(x_j)} \int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x - x_j} dx \quad (3.16)$$

sonucu elde edilir. Burada

$$\frac{1}{x - x_j} = \frac{1 - \left(\frac{x}{x_j}\right)^k}{x - x_j} + \left(\frac{x}{x_j}\right)^k \frac{1}{x - x_j} \quad (3.17)$$

olduğu kullanılırsa, (3.16) yardımıyla

$$\frac{1}{P_n'(x_j)} \int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x - x_j} dx = \frac{1}{P_n'(x_j)} \int_{-1}^1 w(x) P_n(x) \left( \frac{1 - \left(\frac{x}{x_j}\right)^k}{x - x_j} + \left(\frac{x}{x_j}\right)^k \frac{1}{x - x_j} \right) dx \quad (3.18)$$

ifadesine ulaşılır. Gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapıldığında,

$$x_j^k \int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} dx = \int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} x^k dx, \quad k \leq n \quad (3.19)$$

elde edilir.  $x_j^k = q(x_j)$  ve  $x^k = q(x)$  atamaları yapılarak ulaşılan

$$\int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} dx = \frac{1}{q(x_j)} \int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} q(x) dx \quad (3.20)$$

ifadesinde  $q(x)$  en fazla  $n$ . dereceden bir polinom olabilir.  $\frac{P_n(x)}{x-x_j}$  ifadesinin  $(n-1)$ .

dereceden olduğuna dikkat edilirse  $q(x) = P_{n-1}(x)$  olarak alınmalıdır.  $s(x)$ ,  $(n-2)$ .

dereceden bir polinom olmak üzere  $\frac{P_n(x)}{x-x_j}$  ifadesi

$$\frac{P_n(x)}{x-x_j} = a_n x^{n-1} + s(x) \quad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir. (3.20) yeniden düzenlendiğinde

$$\int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} dx = \frac{1}{P_{n-1}(x_j)} \int_{-1}^1 w(x) (a_n x^{n-1} + s(x)) q(x) dx \quad (3.22)$$

halini alır. Bu ifade

$$\int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} dx = \frac{1}{P_{n-1}(x_j)} \left( \int_{-1}^1 w(x) a_n x^{n-1} q(x) dx + \int_{-1}^1 w(x) s(x) q(x) dx \right) \quad (3.23)$$

şeklinde açılır ve parantez içindeki ikinci terimin, farklı dereceden iki polinomun ağırlık fonksiyonuna göre integralini içerdiğinden, sıfır olduğu dikkate alınarak

$$\int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} dx = \frac{1}{P_{n-1}(x_j)} \int_{-1}^1 w(x) a_n x^{n-1} q(x) dx \quad (3.24)$$

ifadesine ulaşılır.  $q(x) = P_{n-1}(x)$  olarak alındığından

$$\int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} dx = \frac{1}{P_{n-1}(x_j)} \int_{-1}^1 w(x) a_n x^{n-1} P_{n-1}(x) dx \quad (3.25)$$

elde edilir.

$$x^{n-1} = \underbrace{\left( x^{n-1} - \frac{P_{n-1}(x)}{a_{n-1}} \right)}_{(n-2). \text{ derece}} + \frac{P_{n-1}(x)}{a_{n-1}} \quad (3.26)$$

ifadesi (3.25) de kullanılarak

$$\int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} dx = \frac{a_n}{P_{n-1}(x_j)} \left[ \int_{-1}^1 w(x) \left( x^{n-1} - \frac{P_{n-1}(x)}{a_{n-1}} \right) P_{n-1}(x) dx + \int_{-1}^1 w(x) \frac{P_{n-1}(x)}{a_{n-1}} P_{n-1}(x) dx \right] \quad (3.27)$$

şeklinde düzenlendikten sonra bu ifade  $\frac{1}{P_n'(x_j)}$  ile çarpılır ve (3.16) ifadesine dikkat edilirse

$$\frac{1}{P_n'(x_j)} \int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n(x)}{x-x_j} dx = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{\int_{-1}^1 w(x) P_{n-1}^2(x) dx}{P_n'(x_j) P_{n-1}(x_j)} = w_j(x) \quad (3.28)$$

sonucuna ulaşılır.

Elde edilen ifade  $P_n(x)$  polinomları yerine Chebyshev polinomları alınarak düzenlendiğinde

$$\frac{1}{T_n'(x_j)} \int_{-1}^1 w(x) \frac{T_n(x)}{x-x_j} dx = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{\int_{-1}^1 w(x) T_{n-1}^2(x) dx}{T_n'(x_j) T_{n-1}(x_j)} = w_j(x) \quad (3.29)$$

bulunur. Chebyshev polinomları için

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-1} \\ a_{n-1} &= 2^{n-2} \\ \int_{-1}^1 w(x) T_{n-1}^2(x) dx &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

ifadelerinin gerçekleştiği ve  $x_j = \cos\left[\frac{(2j-1)}{2n}\pi\right]$  olduğu gözönünde tutulursa

$$\begin{cases} T_n'(x_j) = n(-1)^{j+1} \frac{1}{\sin\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)} \\ T_{n-1}(x_j) = (-1)^{j+1} \sin\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) \end{cases} \quad (3.31)$$

olarak elde edilir ve bunlar (3.29) denkleminde kullanılırsa

$$w_j(x) = 2 \frac{\frac{\pi}{2}}{(-1)^{2i+2} n} = \frac{\pi}{n} \quad (3.32)$$

sonucuna ulaşılır ve (3.9) ifadesi buna göre yeniden düzenlendiğinde

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y(x_j) T_n(x_j) \quad (3.33)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak (3.1) ile verilen yaklaşım polinomunun elde edilebilmesi için gerekli katsayılar da belirlenmiş olur.

### 3.2. Chebyshev Yaklaşım Polinomunun Türevleri

(3.6) dan faydalanılarak yaklaşım polinomu

$$y(x) = \sum_{j=0}^N L_j(x) y(x_j) \quad (3.34)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede  $y(x)$  in  $m$  . mertebeden türevleri

$$y^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^N L_j^{(m)}(x) y(x_j) \quad (3.35)$$

yapısında elde edilir. Genel notasyona uygun olarak  $y^{(m)}(x)$  türevlerini  $x_k$  noktalarında hesaplamak için (3.35) te  $L_j^{(m)}(x_k)$  ifadeleri yerine,  $d_{k,j}^{(m)}$  kullanılarak

$$y^{(m)}(x_k) = \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(m)} y(x_j) \quad (3.36)$$

elde edilir. (3.1) de  $y(x)$  in  $m$  . mertebeden türevi alınır ve (3.33) bu sonuçta kullanılırsa

$$y^{(m)}(x) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^N y(x_j) T_n(x_j) T_n^{(m)}(x) \quad (3.37)$$

halini alır. Bu denklem  $x_k$  noktaları için,

$$y^m(x_k) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^N y(x_j) T_n(x_j) T_n^m(x_k) \quad (3.38)$$

sonucunu verir. (3.36) ve (3.38) denklemlerinin eşitlendiğinde,



$$d_{k,j}^{(m)} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N T_n(x_j) T_n^{(m)}(x_k) \quad (3.39)$$

olarak bulunur. Bu ifadede sadece Chebyshev polinomlarının türevleri,  $T_n^{(m)}(x)$  ler bilinmemektedir ve bu bilinmeyenler aşağıdaki bölümde elde edilmiştir.

### 3.2.1 Chebyshev polinomlarının türevleri

(2.1) deki Chebyshev polinomunun türevi,

$$T_n'(x) = n \sin[n \arccos x] \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.40)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 = T_1'(x), \quad n=0 \\ T_1(x) &= x = \frac{T_2'(x)}{4}, \quad n=1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

ilişkileri vardır. Trigonometrik dönüşümlerden faydalanılır ve basit kesirlere ayırma

işlemi yapıldıktan sonra 1.terim  $\frac{(n+1)}{(n+1)}$ , 2.terim  $\frac{(n-1)}{(n-1)}$  ile çarpılırsa,

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{(n+1)}{(n+1)} \sin[(n+1) \arccos x] - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{(n-1)}{(n-1)} \sin[(n-1) \arccos x] \quad (3.42)$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{cases} T_{n+1}'(x) = (n+1) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin[(n+1) \arccos x] \\ T_{n-1}'(x) = (n-1) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin[(n-1) \arccos x] \end{cases} \quad (3.43)$$

olduğundan

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \frac{T_{n+1}'(x)}{(n+1)} - \frac{1}{2} \frac{T_{n-1}'(x)}{(n-1)}, \quad n > 1 \quad (3.44)$$

şeklinde yazılır ve (3.41) sonuçları ile birleştirilirse,

$$T_n(x) = \begin{cases} \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}, & n = 0 \\ \frac{T'_{n+1}(x)}{2(n+1)}, & n = 1 \\ \frac{T'_{n+1}(x)}{2(n+1)} - \frac{T'_{n-1}(x)}{2(n-1)}, & n > 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

elde edilir. Burada görülen

$$T_n(x) = \frac{T'_{n+1}(x)}{2(n+1)} - \frac{T'_{n-1}(x)}{2(n-1)}, \quad n > 1 \quad (3.46)$$

ifadesi

$$T'_{n+1}(x) = 2(n+1) \left( T_n(x) + \frac{T'_{n-1}(x)}{2(n-1)} \right) \quad (3.47)$$

olarak düzenlenir ve  $n$  görülen yerlere  $n-1$  yazılırsa

$$T'_n(x) = 2n \left( T_{n-1}(x) + \frac{T'_{n-2}(x)}{2(n-2)} \right) \quad (3.48)$$

şeklinde bulunur. Burada  $n$  çift iken iteratif bir ilişki kurulur

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= 2n \left( T_{n-1}(x) + \frac{T'_{n-2}(x)}{2(n-2)} \right) \\ \frac{T'_{n-2}(x)}{2(n-2)} &= T_{n-3}(x) + \frac{T'_{n-4}(x)}{2(n-4)} \\ \frac{T'_{n-4}(x)}{2(n-4)} &= T_{n-5}(x) + \frac{T'_{n-6}(x)}{2(n-6)} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{T'_4(x)}{2 \cdot (4)} &= T_3(x) + \frac{T'_2(x)}{2(2)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

ve  $\frac{T'_2(x)}{4} = T_1(x)$  eşitliği kullanılıp, terimler alt alta toplanırsa

$$T'_n(x) = 2n \left( T_{n-1}(x) + T_{n-3}(x) + T_{n-5}(x) + \dots + T_3(x) + T_1(x) \right) \quad (3.50)$$

olarak bulunur. Aynı ifadede  $n$  tek iken benzer bir iteratif ilişki kurulur

$$\begin{aligned}
T_n'(x) &= 2n \left( T_{n-1}(x) + \frac{T_{n-2}'(x)}{2(n-2)} \right) \\
\frac{T_{n-2}'(x)}{2(n-2)} &= T_{n-3}(x) + \frac{T_{n-4}'(x)}{2(n-4)} \\
\frac{T_{n-4}'(x)}{2(n-4)} &= T_{n-5}(x) + \frac{T_{n-6}'(x)}{2(n-6)} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\frac{T_3'(x)}{2 \cdot 3} &= T_2(x) + \frac{T_1'(x)}{2 \cdot 1}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

ve  $\frac{T_1'(x)}{2} = \frac{T_0(x)}{2}$  eşitliği kullanılıp, terimler alt alta toplanırsa

$$T_n'(x) = 2n \left( T_{n-1}(x) + T_{n-3}(x) + T_{n-5}(x) + \dots + T_2(x) + \frac{T_0(x)}{2} \right) \tag{3.52}$$

elde edilir. Çift ve tek durumunda elde edilen (3.50) ve (3.52) deki ifadeler toplam sembolüyle gösterilirse, her iki durumda da Chebyshev polinomlarının birinci merteye türevi için,

$$T_n'(x) = \sum_{\substack{l=0 \\ (n+l)\text{tek}}}^{n-1} \frac{2n}{c_l} T_l(x), \quad c_0 = 2, c_i = 1 \quad i \neq 0 \tag{3.53}$$

sonucu elde edilir. (3.48) ifadesinin türevi alınarak Chebyshev polinomlarının ikinci merteye türevi

$$T_n''(x) = 2n \left( T_{n-1}'(x) + \frac{T_{n-2}''(x)}{2(n-2)} \right) \tag{3.54}$$

olarak bulunur. (3.48) yardımıyla,

$$T_n''(x) = 2n \left( \sum_{\substack{l=0 \\ (n-1+l)\text{tek}}}^{n-2} \frac{2(n-1)}{c_l} T_l(x) + \frac{T_{n-2}''(x)}{2(n-2)} \right), \quad n > 2 \tag{3.55}$$

bulunur ve burada  $n$  çift iken iteratif bir ilişki kurulursa,

$$\begin{aligned}
T_n''(x) &= 2n \left( \sum_{\substack{l=0 \\ (n-1+l)\text{tek}}}^{n-2} \frac{2(n-1)}{c_l} T_l(x) + \frac{T_{n-2}''(x)}{2(n-2)} \right) \\
\frac{T_{n-2}''(x)}{2(n-2)} &= \left( \sum_{\substack{l=0 \\ (n-1+l)\text{tek}}}^{n-4} \frac{2(n-3)}{c_l} T_l(x) + \frac{T_{n-4}''(x)}{2(n-4)} \right) \\
\frac{T_{n-4}''(x)}{2(n-4)} &= \left( \sum_{\substack{l=0 \\ (n-1+l)\text{tek}}}^{n-6} \frac{2(n-5)}{c_l} T_l(x) + \frac{T_{n-6}''(x)}{2(n-6)} \right) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\frac{T_4''(x)}{2(4)} &= \left( \sum_{\substack{l=0 \\ (n-1+l)\text{tek}}}^2 \frac{2(3)}{c_l} T_l(x) + \frac{T_2''(x)}{2(2)} \right)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

şeklinde bulunur. Burada  $\frac{T_2''(x)}{2(2)} = T_0(x)$  eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
T_n''(x) &= 2n \left[ \left( \frac{2(n-1)}{c_0} T_0 + \frac{2(n-1)}{c_2} T_2 + \dots + \frac{2(n-1)}{c_{n-2}} T_{n-2} \right) \right. \\
&+ \left( \frac{2(n-3)}{c_0} T_0 + \frac{2(n-3)}{c_2} T_2 + \dots + \frac{2(n-3)}{c_{n-4}} T_{n-4} \right) \\
&+ \left( \frac{2(n-5)}{c_0} T_0 + \frac{2(n-5)}{c_2} T_2 + \dots + \frac{2(n-5)}{c_{n-6}} T_{n-6} \right) + \dots \\
&\left. + \left( \frac{6}{c_0} T_0 + \frac{6}{c_2} T_2 \right) + \left( \frac{2}{c_0} T_0 \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

elde edilir.  $n$  tek için (3.55) de benzer işlemler yapılır

$$\begin{aligned}
T_n''(x) &= 2n \left( \sum_{\substack{l=0 \\ (n-1+l)\text{tek}}}^{n-2} \frac{2(n-1)}{c_l} T_l(x) + \frac{T_{n-2}''(x)}{2(n-2)} \right) \\
\frac{T_{n-2}''(x)}{2(n-2)} &= \left( \sum_{\substack{l=0 \\ (n-1+l)\text{tek}}}^{n-4} \frac{2(n-3)}{c_l} T_l(x) + \frac{T_{n-4}''(x)}{2(n-4)} \right) \\
\frac{T_{n-4}''(x)}{2(n-4)} &= \left( \sum_{\substack{l=0 \\ (n-1+l)\text{tek}}}^{n-6} \frac{2(n-5)}{c_l} T_l(x) + \frac{T_{n-6}''(x)}{2(n-6)} \right) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\frac{T_3''(x)}{2(3)} &= \left( \sum_{\substack{l=0 \\ (n-1+l)\text{tek}}}^1 \frac{2(2)}{c_l} T_l(x) + \frac{T_1''(x)}{2(1)} \right)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

ve  $\frac{T_1''(x)}{2(2)} = 0$  eşitliği de kullanılır ise

$$\begin{aligned}
T_n''(x) &= 2n \left[ \left( \frac{2(n-1)}{c_1} T_1 + \frac{2(n-1)}{c_3} T_3 + \dots + \frac{2(n-1)}{c_{n-2}} T_{n-2} \right) \right. \\
&+ \left( \frac{2(n-3)}{c_1} T_1 + \frac{2(n-3)}{c_3} T_3 + \dots + \frac{2(n-3)}{c_{n-4}} T_{n-4} \right) \\
&\left. + \left( \frac{2(n-5)}{c_1} T_1 + \frac{2(n-5)}{c_3} T_2 + \dots + \frac{2(n-5)}{c_{n-6}} T_{n-6} \right) + \dots + \left( \frac{2[2]_1}{c_1} T_1 \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.59}$$

şeklinde yazılır. Çift ve tek için elde edilen (3.57) ve (3.59) ifadeleri sadeleştiğinde Chebyshev polinomlarının ikinci mertebeye türevleri için,

$$T_n''(x) = \sum_{\substack{l=0 \\ (n+l)\text{çift}}}^{n-2} \frac{1}{c_l} n(n^2 - l^2) T_l(x) \tag{3.60}$$

sonucu elde edilir.

Benzer işlemlerle Chebyshev polinomlarının üçüncü, dördüncü ve beşinci mertebeden türevleri için

$$T_n'''(x) = \sum_{\substack{l=0 \\ (n+l)\text{tek}}}^{n-3} \frac{1}{4c_l} n(n^2 - (l+1)^2)(n^2 - (l-1)^2) T_l(x), \tag{3.61}$$

$$T_n^{(4)}(x) = \sum_{\substack{l=0 \\ (n+l)\text{ çift}}}^{n-4} \frac{1}{24c_l} n(n^2 - (l-2)^2)(n^2 - l^2)(n^2 - (l+2)^2)T_l(x) \quad (3.62)$$

ve

$$T_n^{(5)}(x) = \sum_{\substack{l=0 \\ (n+l)\text{ tek}}}^{n-5} \frac{1}{192c_l} n(n^2 - (l-3)^2)(n^2 - (l-1)^2)(n^2 - (l+1)^2)(n^2 - (l+3)^2)T_l(x) \quad (3.63)$$

formülleri elde edilir. Bu ifadelerden genelleştirme yapılarak, Chebyshev polinomlarının herhangi bir mertebeden türevi için genel formül

$$T_n^{(m)}(x) = \sum_{\substack{l=0 \\ (n+l+m)\text{ çift}}}^{n-m} \left[ \prod_{\substack{i=2-m \\ m>1}}^{m-2} (n^2 - (l+i)^2) \right] \frac{n}{c_l} \frac{1}{(m-1)!2^{(m-3)}} T_l(x), \quad m \geq 1 \quad (3.64)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu genel formülden herhangi bir noktada m. mertebe türevin değeri,  $T_n^m(x_k)$  hesaplanıp (3.39) daki ifadeye yerine yazılırsa,

$$d_{k,j}^{(m)} = \frac{\theta_j}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{l=0 \\ (n+l+m)\text{ çift}}}^{n-m} \left[ \prod_{i=2-m}^{m-2} (n^2 - (l+i)^2) \right] \frac{\theta_n n}{c_l} \frac{1}{(m-1)!2^{(m-3)}} T_n(x_j) T_l(x_k), \quad m > 1; k, j = 0, 1, \dots, N \quad (3.65)$$

olarak bulunur. (Çarpım sembollerindeki \* lar çarpım indisinin ikişer ikişer artacağını göstermektedir.)  $d_{k,j}^{(m)}$  katsayısı (3.36) denkleminde kullanıldığında yaklaşım polinomunun m. mertebe türevleri hesaplanabilir.

Sonuç olarak, tüm adi türevli başlangıç ve sınır değer problemleri, yaklaşım polinomu (3.1), yaklaşım polinomunun katsayıları (3.5) ve yaklaşım polinomunun türevleri (3.36) cinsinden yazılarak lineer veya nonlineer problem haline getirilir. Yaklaşım polinomunun kaçınıcı derece ( $N$ ) alındığına bağlı olarak, ( $N+1$ ) bilinmeyen bulunması için ( $x_j, j = 0, 1, \dots, N$ ) noktaları için ( $N+1$ ) denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Newton-Raphson yöntemi ile çözümlenerek orijinal diferansiyel denklemin çözümü olan yaklaşım polinomu bulunur.

Saadatmandi ve Deghan (2008) çalışmalarında 2. mertebe sınır değer problemlerinin çözümlerini vermişlerdir [25]. Aouadi (2008) ısı ile gerdirilmiş bir yüzeyden mikropolar akışı ve kütle transferi konusunu incelerken ortaya çıkan 3. Mertebe diferansiyel denklemin çözümü için

$$d_{k,j}^{(3)} = \frac{4\gamma_j}{L} \sum_{n=0}^L \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{\gamma_n n l}{c_l c_i} (n^2 - l^2) T_n(x_j) T_l(x_k), \quad (n+l)\text{ çift}, (i+l)\text{ tek} \quad (3.66)$$

ifadesinden faydalanmışlardır [1]. (3.66) ifadesinde 3. Türev, görüleceği üzere daha önceki türevler cinsinden verilmiştir. Bu durum hem bilgisayar ortamında programlamayı zorlaştırmakta, hem de daha yüksek mertebeden türevlerinin hesabında yeni toplamlar gelmesine neden olmakta, dolayısıyla yüksek mertebeden türevlerinin genel halde verilmesini imkansızlaştırmaktadır.

Bu çalışmada ise problem kaçınıcı mertebeden olursa olsun, (3.65) ve (3.36) genel ifadeleri kullanılarak denklem sistemine dönüştürülebilmekte ve tek güçlük bu denklem sisteminin istenilen yakınsaklık mertebesinde çözülmesi olarak ortaya çıkmaktadır. Bu güçlük ise, alınan denklemler ve başlangıç koşullarının uygun seçilmesi ile aşılabilmektedir.

Bir sonraki bölümde en kolay 2. mertebe lineer başlangıç değer probleminden başlayıp, 4, 6, 7, 8, 10 ve 12. mertebeden lineer ve nonlinear başlangıç, sınır, Robin sınır değer ve karışık sınır değer ve sistem problemleri genelleştirilen Chebyshev sonlu farklar yöntemiyle çözülmüş, sonuçlar analitik çözümler ile karşılaştırılarak çoğunlukla hata payının  $10^{-8}$  olduğu, en büyük hata payının bile  $10^{-2}$  yi geçmediği gözlenmiştir.





#### 4. UYGULAMALAR

Bu bölümde analitik çözümü bilinen çeşitli adi diferansiyel denklemlerin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile elde edilen çözümlerine ve bu iki çözümün grafiksel karşılaştırmalarına yer verilmiştir. İncelenen tüm örneklerde yaklaşım polinomunun farklı dereceleri için de sonuçlar verilmiştir. Her örneğin incelenen ilk derecesi için sonuçlar tez metni içinde, diğer dereceler için ise eklerdeki programlarda verilmiştir.

Yöntemin uygulanması için ilk olarak incelenen problemlerin tanımlı olduğu herhangi bir  $[a, b]$  aralığı, Chebyshev polinomlarının tanımlı olduğu  $[-1, 1]$  aralığına taşınır. Bu dönüşüm elde edilen diferansiyel denklemlere ve sınır koşullarına da uygulanarak problem yeniden düzenlenir. Ortaya çıkan yeni diferansiyel denklemde yaklaşım polinomu ve türevleri için ise (3.1) ve (3.36) ifadeleri kullanılır. Bunlar için gerekli olan  $d_{k,j}^{(m)}$  katsayıları da (3.65) yardımıyla elde edilir. Chebyshev polinomlarının denklemlere uygulanması mantığının daha iyi anlaşılması ve bu çalışmadaki bazı örneklerin elle de çözülebilmesi için  $N = 4$  iken  $d_{k,j}^{(1)}$ ,  $d_{k,j}^{(2)}$ ,  $d_{k,j}^{(3)}$  ve  $d_{k,j}^{(4)}$  değerleri matris gösterimiyle,

$$\mathbf{d}^{(1)} = (d_{k,j}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 5.5 & -6.8284 & 2 & -1.1715 & 0.5 \\ 1.7071 & -0.7071 & -1.4142 & 0.7071 & -0.2928 \\ -0.5 & 1.4142 & 0 & -1.4142 & 0.5 \\ 0.2928 & -0.7071 & 1.4142 & 0.7071 & -1.7071 \\ -0.5 & 1.1715 & -2 & 6.8284 & -5.5 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{d}^{(2)} = (d_{k,j}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 17 & -28.4852 & 18 & -11.5147 & 5 \\ 9.2426 & -13.9999 & 6 & -2 & 0.7573 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 0.7573 & -2 & 6 & -13.9999 & 9.2426 \\ 5 & -11.5147 & 18 & -28.4852 & 17 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{d}^{(3)} = (d_{k,j}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 30 & -56.4852 & 48 & -39.5147 & 18 \\ 22.9705 & -42.4264 & 33.9411 & -25.4558 & 10.9705 \\ 6 & -8.4852 & 0 & 8.4852 & -6 \\ -10.9705 & 25.4558 & -33.9411 & 42.4264 & -22.9705 \\ -18 & 39.5147 & -48 & 56.4852 & -30 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{d}^{(4)} = (d_{k,j}^{(4)}) = \begin{pmatrix} 24 & -48 & 48 & -48 & 24 \\ 24 & -48 & 48 & -48 & 24 \\ 24 & -48 & 48 & -48 & 24 \\ 24 & -48 & 48 & -48 & 24 \\ 24 & -48 & 48 & -48 & 24 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

şeklinde verilmiştir, burada  $k, j = 0, \dots, 4$  tür.

Bu katsayılar yardımıyla elde edilen türev ifadeleri (3.65) deki yaklaşım polinomunu yeniden düzenlenen diferansiyel denklem ve sınır koşullarında kullanılarak diferansiyel denklem ve sınır koşulları cebrik bir denklem sistemine dönüştürülür. Bu cebrik denklem sisteminden  $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_{N-1}), y(x_N)$  çözülür. Bir sonraki adım olarak (3.33) ifadesinden  $a_n$  katsayıları hesaplanarak (3.1) de kullanılır ve böylece  $y(x)$  yaklaşım polinomu elde edilerek yöntem tamamlanmış olur.

Aşağıdaki örneklerin Mathematica programı ile yapılmış çözümleri eklerde mevcut olup, kodlarda  $N = 4$  için  $y(0), y(1), y(2), y(3), y(4)$  olarak belirtilen ifadeler  $y(x_0), y(x_1), y(x_2), y(x_3), y(x_4) = y(x_N)$  değerlerini ifade etmektedir.

Analitik çözümün ve Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile elde edilen sayısal çözümün karşılaştırılması grafiklerde farklı terim sayıları için verilmiştir. Grafiklerdeki analitik çözüm noktaları, Chebyshev sonlu farklar yönteminden elde edilen sayısal çözüm ise eğrisel bir çizgi ile gösterilmiştir.

Elde edilen grafikler değerlendirildiğinde beklendiği üzere; terim sayısının artması ile Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile bulunan sayısal çözümün, analitik çözüme yakınsadığı görülmektedir.

## 4.1 Adi Türevli Lineer Diferansiyel Denklemlerin Chebyshev Sonlu Farklar Yöntemi İle Çözümleri

Bu bölümde çeşitli Adi türevli lineer diferansiyel denklemler Chebyshev sonlu farklar yöntemiyle çözülmüştür.

### 4.1.1 İkinci mertebe başlangıç değer problemi

$$y''(x) + 2y'(x) = 12x + 6, \quad 1 \leq x \leq 2 \quad (4.5)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 6 \quad (4.6)$$

başlangıç koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

*Çözüm:* (4.5) de verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = 3x^2$  dir. Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[1, 2]$  aralığını  $[-1, 1]$  aralığına  $t \rightarrow 2x - 3$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni diferansiyel denklem ve başlangıç koşulları

$$4y'' + 4y' = 6t + 24, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.7)$$

$$y(-1) = 3, \quad y'(-1) = 3 \quad (4.8)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$4 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^2 y(t_j) + 4 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^1 y(t_j) = 6t_k + 24, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.9)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k = N$  için başlangıç koşullarından da  $y(t_N) = 3$ ,

$\sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 y(t_j) = 3$  değerleri kullanılır ise,  $N = 4$  için çözümün

$$y(t_0) = 12, \quad y(t_1) = 10.3069, \quad y(t_2) = 6.7500, \quad y(t_3) = 3.9430, \quad y(t_4) = 3. \quad (4.10)$$

değerleri elde edilir. Buradan (3.33) sayesinde

$$a_0 = 14.25, \quad a_1 = 4.5, \quad a_2 = 0.3749, \quad a_3 = 6.6 \times 10^{-16}, \quad a_4 = -1.3 \times 10^{-15} \quad (4.11)$$

katsayılarına ulaşılır. (3.1) ifadesinden de arzu edilen yaklaşım polinomu

$$y(t) = 6.75 + 4.5t + 0.75t^2 - 2.6 \times 10^{-15}t^3 - 5.3 \times 10^{-15}t^4 \quad (4.12)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow 2x - 3$  dönüşümü kullanıldığında da

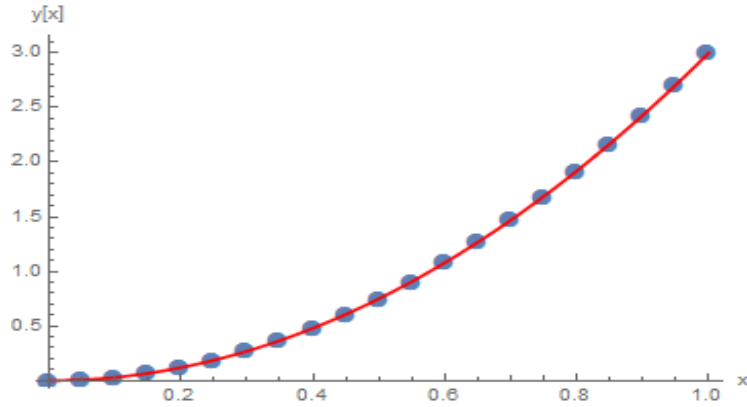
$$y(x) = -3.28 \times 10^{-13} + 9.5 \times 10^{-13}x + 2.99x^2 + 4.9 \times 10^{-13}x^3 - 8.5 \times 10^{-14}x^4 \quad (4.13)$$

$N=8$  ve  $N=12$  için doğrudan ekte verilen programlarla elde edilen çözümler de sırasıyla aşağıdaki gibidir.

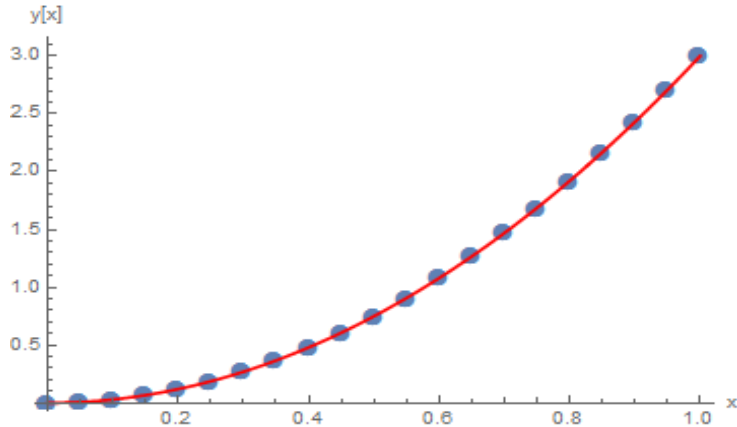
$$y(x) = -1.5 \times 10^{-9} + 8.7 \times 10^{-9}x + 2.9x^2 + 3. \times 10^{-8}x^3 - 2.6 \times 10^{-8}x^4 + 1.4 \times 10^{-8}x^5 - 4.9 \times 10^{-9}x^6 + 9.5 \times 10^{-10}x^7 - 8. \times 10^{-11}x^8 \quad (4.14)$$

$$y(x) = 0.000001 - 0.00001x + 3.00004x^2 - 0.0001x^3 + 0.0001x^4 - 0.0001x^5 + 0.0001x^6 - 0.00009x^7 + 0.0004x^8 - 0.0001x^9 + 0.0002x^{10} - 3.4 \times 10^{-7}x^{11} + 1.9 \times 10^{-8}x^{12} \quad (4.15)$$

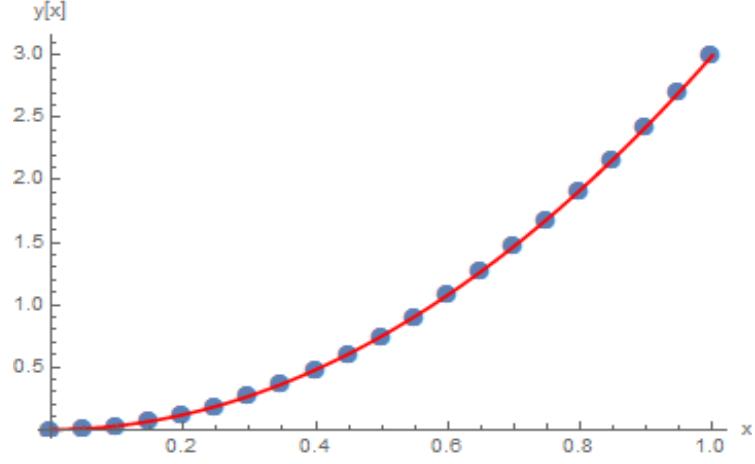
Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 de  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.1 :  $N = 4$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.2 :  $N = 8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



**Şekil 4.3 :**  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.1' de verilmiştir.

**Çizelge 4.1 :**  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	4	8	12
	$2.3 \times 10^{-13}$	$2.2 \times 10^{-10}$	$2.6 \times 10^{-6}$

#### 4.1.2 İkinci mertebe sınır değer problemi

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2 \cos(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.16)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (4.17)$$

sınır koşulları altında Chebyshev sonlu farklar yöntemini kullanarak elde ediniz.

*Çözüm:* (4.16) da verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = \sin(x)$  dir.

Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0, \frac{\pi}{2}]$

aralığını  $[-1, 1]$  aralığına  $t \rightarrow \frac{4}{\pi}x - 1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni

diferansiyel denklem ve sınır koşulları

$$4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(t+1)\right), \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.18)$$

$$y(-1) = 0, y(1) = 1 \quad (4.19)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^2 y(t_j) + \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^1 y(t_j) + y(t_k) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}(t_k + 1)\right), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.20)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k=0$  ve  $k=N$  için sınır koşullarından da  $y(t_N) = 0$ ,  $y(t_0) = 1$  değerleri kullanılır ise,  $N=4$  için yaklaşım polinomu

$$y(t) = 0.7068 + 0.5543t - 0.2171t^2 - 0.0543t^3 + 0.0103t^4 \quad (4.21)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow \frac{4}{\pi}x - 1$  dönüşümü kullanıldığında da

$$y(x) = 0. + 0.9984x + 0.0130x^2 - 0.1978x^3 + 0.0272x^4 \quad (4.22)$$

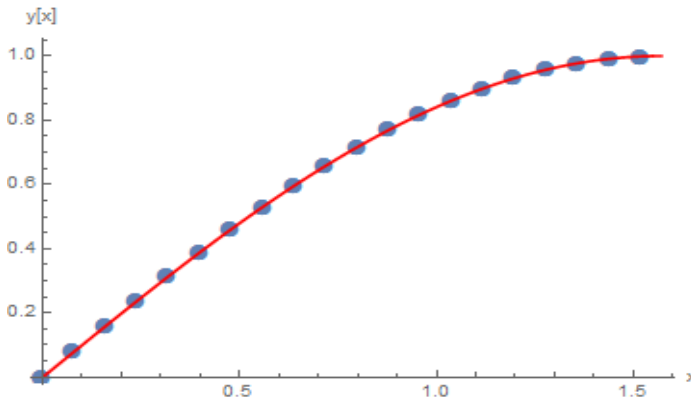
$N=8$  ve  $N=12$  için doğrudan ekte verilen programlarla elde edilen çözümler de sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = -2.3 \times 10^{-15} + 0.999x + 7.4 \times 10^{-7}x^2 - 0.1666x^3 + 0.00002x^4 + 0.0082x^5 + 0.00006x^6 - 0.0002x^7 + 0.00001x^8 \quad (4.23)$$

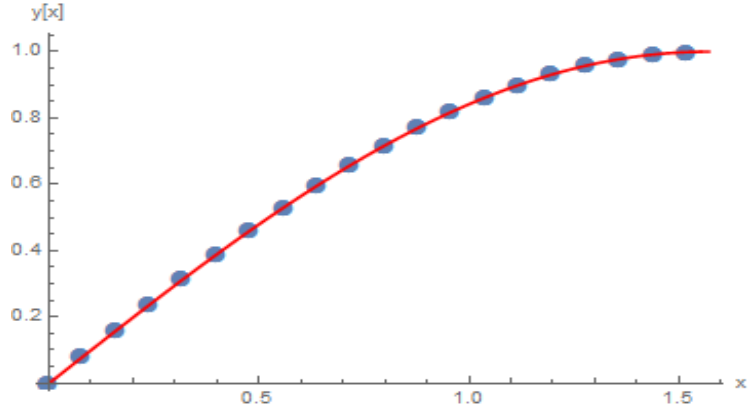
ve

$$y(x) = 3.3 \times 10^{-15} + 0.9x + 3.2 \times 10^{-12}x^2 - 0.1x^3 + 6.2 \times 10^{-10}x^4 + 0.008x^5 + 9.7 \times 10^{-9}x^6 - 0.0001x^7 + 2.6 \times 10^{-8}x^8 + 0.000002x^9 + 1.5 \times 10^{-8}x^{10} - 3.1 \times 10^{-8}x^{11} + 1.4 \times 10^{-9}x^{12} \quad (4.24)$$

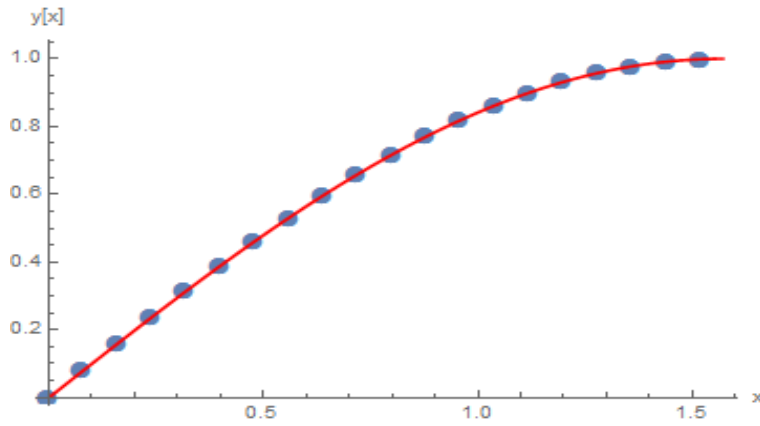
Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 da  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.4 :  $N = 4$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.5 :  $N = 8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.6 :  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.2' de verilmiştir.

Çizelge 4.2 :  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	4	8	12
	$4 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-9}$	$1.0 \times 10^{-14}$

#### 4.1.3 Yüksek mertebe başlangıç değer problemi

$$y^{(8)}(x) = 256e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.25)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$y(0) = 1, \quad y^{(m)}(0) = 2^m \quad m = 1, 2, \dots, 7 \quad (4.26)$$

başlangıç koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

*Çözüm:* (4.25) de verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = e^{2x}$  dir. Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0,1]$  aralığını  $[-1,1]$  aralığına  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni diferansiyel denklem ve sınır koşulları

$$y^{(8)}(t) = e^{(t+1)}, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.27)$$

$$y(-1) = 1, \quad y^{(m)}(-1) = 1 \quad m = 1, 2, \dots, 7 \quad (4.28)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$\sum_{j=0}^N d_{k,j}^8 y(t_j) + e^{(t_k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.29)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k = N$  için başlangıç koşullarından da  $y(t_N) = 1, y^{(m)}(t_N) = 1, m = 1, 2, \dots, 7$  değerleri kullanılır ise,  $N = 8$  için

$$y(t) = 2.7184 + 2.7194t + 1.3630t^2 + 0.4608t^3 + 0.1229t^4 + 0.0303t^5 + 0.0075t^6 + 0.0015t^7 + 0.0001t^8 \quad (4.30)$$

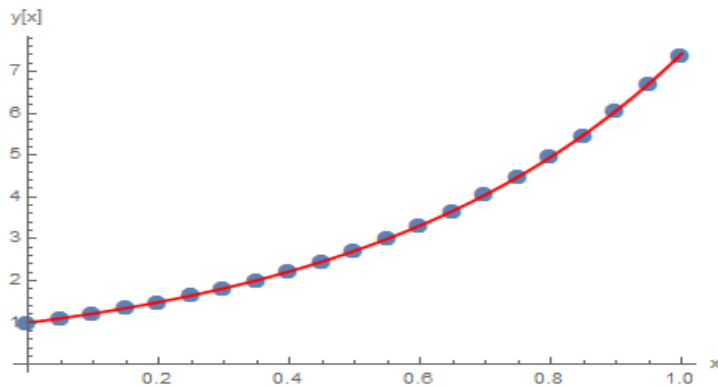
olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü kullanıldığında da

$$y(x) = 0.9999 + 2.x + 1.9999x^2 + 1.3333x^3 + 0.6666x^4 + 0.2666x^5 + 0.0888x^6 + 0.0253x^7 + 0.0434x^8 \quad (4.31)$$

şeklinde elde edilir.  $N = 12$  için doğrudan ekte verilen programlarla elde edilen çözümde aşağıdaki gibidir.

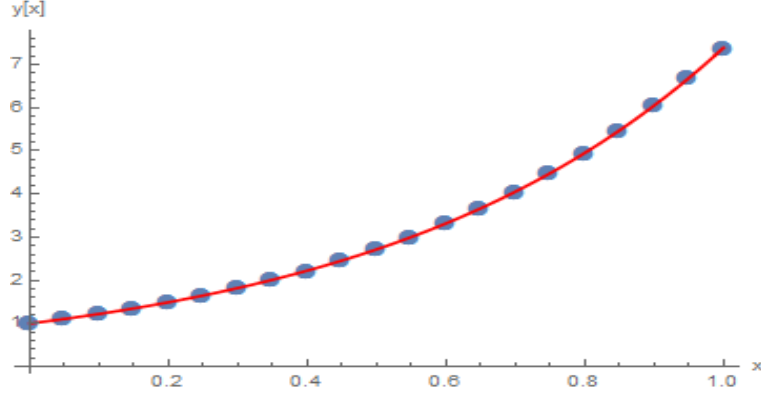
$$y(x) = 1. + 1.9999x + 2.x^2 + 1.3333x^3 + 0.6666x^4 + 0.2666x^5 + 0.0888x^6 + 0.0253x^7 + 0.0089x^8 - 0.0003x^9 + 0.001x^{10} - 0.0002x^{11} + 0.00004x^{12} \quad (4.32)$$

Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 de analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



**Şekil 4.7 :**  $N = 8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.





**Şekil 4.8 :**  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.3’ de verilmiştir.

**Çizelge 4.3 :**  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	8	12
	$3.5 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$

#### 4.1.4 Yüksek mertebe sınır değer problemi

$$y^{(6)}(x) + y^{(4)}(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.33)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y(\pi) = -1, \quad y'(\pi) = 0, \quad y''(\pi) = 1 \quad (4.34)$$

sınır koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

**Çözüm:** (4.33) de verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = \cos(x)$  dir.

Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0, \pi]$

aralığını  $[-1, 1]$  aralığına  $t \rightarrow \frac{2}{\pi}x - 1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni

diferansiyel denklem ve sınır koşulları

$$\frac{64}{\pi^6} y^{(6)}(t) + \frac{16}{\pi^4} y^{(4)}(t) = 0, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.35)$$

$$y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = -\frac{\pi^2}{4}, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = \frac{\pi^2}{4} \quad (4.36)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$\frac{64}{\pi^6} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^6 y(t_j) + \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^4 y(t_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.37)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k=0$  ve  $k=N$  için sınır koşullarından da

$$y(t_N) = 0, \quad \sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 y(t_j) = 0, \quad \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 y(t_j) = -\frac{\pi^2}{4}, \quad y(t_0) = -1, \quad \sum_{j=0}^N d_{0,j}^1 y(t_j) = 0, \quad \sum_{j=0}^N d_{0,j}^2 y(t_j) = \frac{\pi^2}{4}$$

değerleri kullanılır ise,  $N = 6$  için yaklaşım polinomu

$$y(t) = 0.0075 - 1.5665t + 0.0226t^2 + 0.6331t^3 - 0.0226t^4 - 0.0665t^5 + 0.0075t^6 \quad (4.38)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow \frac{2}{\pi}x - 1$  dönüşümü kullanıldığında da

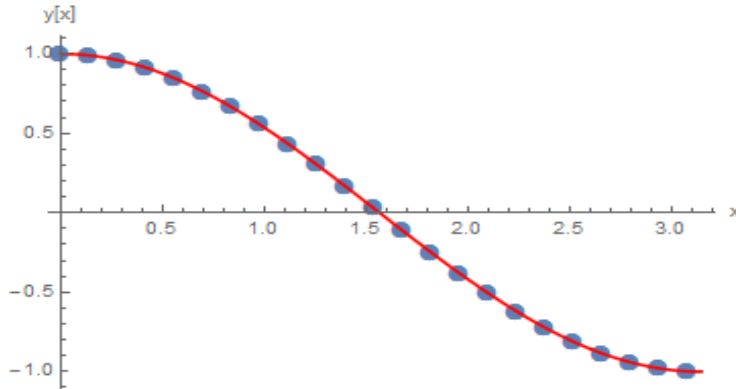
$$y(x) = 0.9999 - 4.8 \times 10^{-15}x - 0.4999x^2 - 0.0239x^3 + 0.0695x^4 - 0.0116x^5 + 0.0005x^6 \quad (4.39)$$

$N=9$  ve  $N=12$  için doğrudan ekte verilen programlarla elde edilen çözümler de sırasıyla aşağıdaki gibidir.

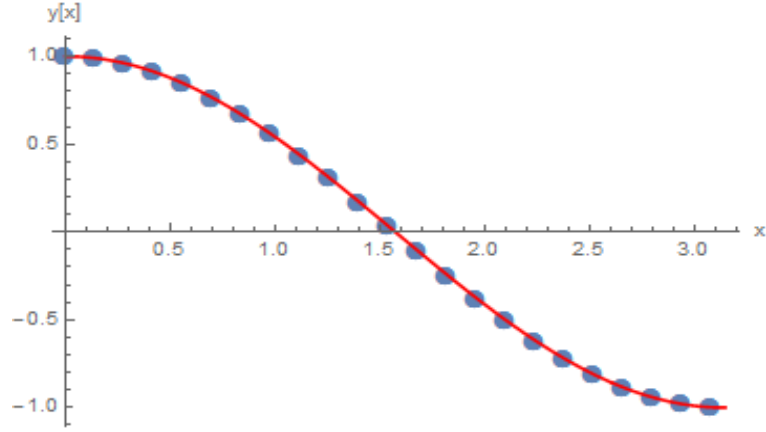
$$y(x) = 1 - 4.5 \times 10^{-14}x - 0.4999x^2 - 0.0048x^3 + 0.0491x^4 - 0.0038x^5 - 0.0007x^6 + 0.00004x^7 + 0.000004x^8 - 3.3 \times 10^{-7}x^9 \quad (4.40)$$

$$y(x) = 0.9999 + 6.7 \times 10^{-13}x - 0.5x^2 - 0.005x^3 + 0.0494x^4 - 0.004x^5 - 0.0006x^6 + 0.00003x^7 + 0.00004x^8 - 1.5 \times 10^{-7}x^9 - 3.3 \times 10^{-8}x^{10} + 2.2 \times 10^{-9}x^{11} - 3.3 \times 10^{-11}x^{12} \quad (4.41)$$

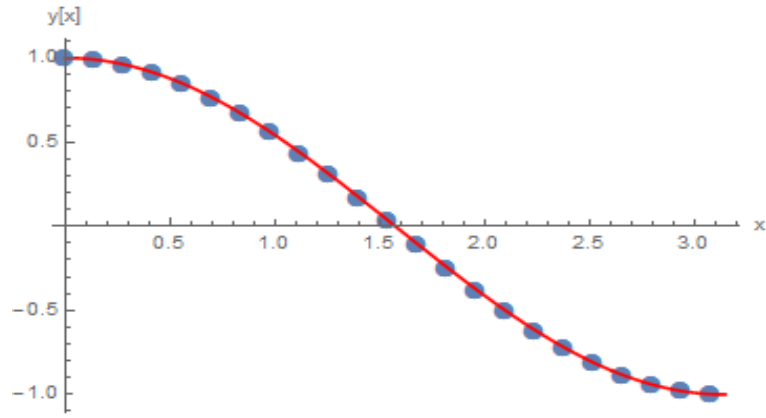
Şekil 4.9 , Şekil 4.10 ve Şekil 4.11 de  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.9 :  $N = 6$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.10 :  $N = 9$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.11 :  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4. 4' de verilmiştir.

Çizelge 4.4 :  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	6	9	12
	$5.9 \times 10^{-3}$	$5.6 \times 10^{-4}$	$6.1 \times 10^{-4}$

#### 4.1.5 Yüksek mertebe Robin sınır değer problemi

$$y^{(8)}(x) - 64y^{(2)}(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.42)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$\begin{aligned}
y(0) + y'(0) &= 2, \quad y(1) + y'(1) = 2 \cosh(2) + \sinh(2), \\
y(0) + y''(0) &= 0, \quad y(1) + y''(1) = 5 \sinh(2), \\
y(0) + y'''(0) &= 8, \quad y(1) + y'''(1) = 8 \cosh(2) + \sinh(2), \\
y(0) + y^{(5)}(0) &= 32, \quad y(1) + y^{(5)}(1) = 32 \cosh(2) + \sinh(2),
\end{aligned} \tag{4.43}$$

sınır koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

*Çözüm:* (4.42) de verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = \sinh(2x)$  dir. Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0,1]$  aralığını  $[-1,1]$  aralığına  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni diferansiyel denklem

$$y^{(8)}(t) - y^{(2)}(t) = 0, \quad -1 \leq t \leq 1 \tag{4.44}$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned}
y(-1) + 2y'(-1) &= 2, \quad y(1) + 2y'(1) = 2 \cosh(2) + \sinh(2), \\
y(-1) + 4y''(-1) &= 0, \quad y(1) + 4y''(1) = 5 \sinh(2), \\
y(-1) + 8y'''(-1) &= 8, \quad y(1) + 8y'''(1) = 8 \cosh(2) + \sinh(2), \\
y(-1) + 32y^{(5)}(-1) &= 32, \quad y(1) + 32y^{(5)}(1) = 32 \cosh(2) + \sinh(2),
\end{aligned} \tag{4.45}$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$\sum_{j=0}^N d_{k,j}^8 y(t_j) - \sum_{j=0}^N d_{k,j}^2 y(t_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \tag{4.46}$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k = 0$  ve  $k = N$  için sınır koşullarından da

$$\begin{aligned}
y(t_N) + 2 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 y(t_j) &= 2, \quad y(t_0) + 2 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^1 y(t_j) = 2 \cosh(2) + \sinh(2), \\
y(t_N) + 4 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 y(t_j) &= 0, \quad y(t_N) + 4 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 y(t_j) = 5 \sinh(2), \\
y(t_N) + 8 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^3 y(t_j) &= 8, \quad y(t_0) + 8 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^3 y(t_j) = 8 \cosh(2) + \sinh(2), \\
y(t_N) + 32 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^5 y(t_j) &= 32, \quad y(t_0) + 32 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^5 y(t_j) = 32 \cosh(2) + \sinh(2),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

değerleri kullanılır ise,  $N = 8$  için yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned}
y(t) &= 1.1691 + 1.5478t + 0.5843t^2 + 0.2569t^3 + 0.0506t^4 + 0.0128t^5 + 0.0011t^6 \\
&+ 0.0003t^7 + 0.00008t^8
\end{aligned} \tag{4.48}$$

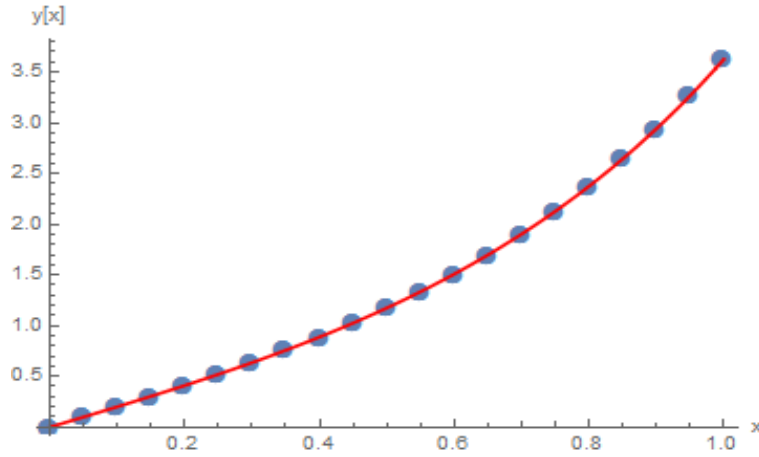
olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü kullanıldığında da

$$y(x) = -0.0125 + 2.0125x + 0.0062x^2 + 1.3354x^3 - 0.0366x^4 + 0.2667x^5 + 0.0727x^6 - 0.0424x^7 + 0.0212x^8 \quad (4.49)$$

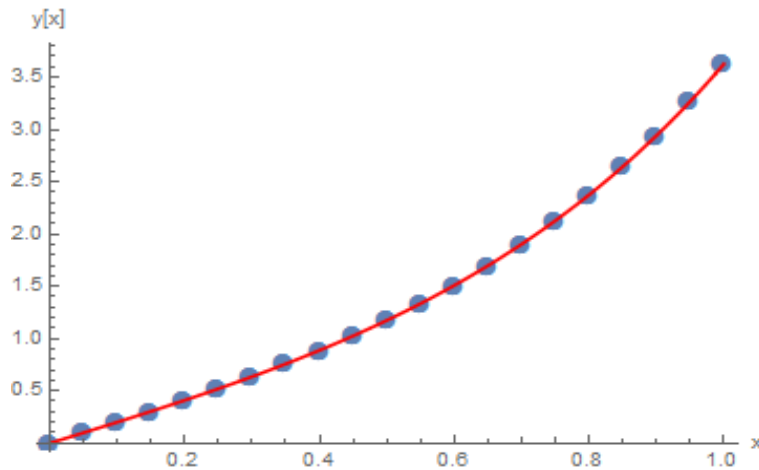
şeklindedir.  $N = 12$  için doğrudan ekte verilen programla elde edilen çözüm de aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = -0.00006 + 2.00006x + 0.00003x^2 + 1.3333x^3 - 0.0002x^4 + 0.2666x^5 + 0.0008x^6 + 0.0239x^7 + 0.0013x^8 + 0.0005x^9 + 0.0004x^{10} - 0.0007x^{11} + 0.0002x^{12} \quad (4.50)$$

Şekil 4.12 ve Şekil 4.13 de  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.12 :  $N = 8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.13:  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4. 5' de verilmiştir.

**Çizelge 4.5 :**  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	8	12
	$1.0 \times 10^{-2}$	$6.3 \times 10^{-5}$

#### 4.1.6 Yüksek mertebe karışık sınır değer problemi

$$y^{(8)}(x) - y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.51)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$\begin{aligned} y(0) + y' \left( \frac{\pi}{2} \right) &= 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y \left( \frac{\pi}{2} \right) + y'(0) = 3 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y(0) + y'' \left( \frac{\pi}{2} \right) = e^{\frac{\pi}{2}}, \\ y \left( \frac{\pi}{2} \right) + y''(0) &= 2 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y \left( \frac{\pi}{2} \right) + y'''(0) = 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y(0) + y''' \left( \frac{\pi}{2} \right) = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \\ y^{(4)} \left( \frac{\pi}{2} \right) &= 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y^{(4)}(0) = 1 \end{aligned} \quad (4.52)$$

sınır koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

*Çözüm:* (4.51) de verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = \sin(x) + e^{-x}$  dir. Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0, \frac{\pi}{2}]$  aralığını  $[-1, 1]$  aralığına  $t \rightarrow \frac{4}{\pi}x - 1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni diferansiyel denklem

$$\left( \frac{4}{\pi} \right)^8 y^{(8)}(t) - y(t) = 0, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.53)$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} y(-1) + \left( \frac{4}{\pi} \right) y'(1) &= 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y(1) + \left( \frac{4}{\pi} \right) y'(-1) = 3 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y(-1) + \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 y''(1) = e^{\frac{\pi}{2}} \\ y(1) + \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 y''(-1) &= 2 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y(1) + \left( \frac{4}{\pi} \right)^3 y'''(-1) = 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y(-1) + \left( \frac{4}{\pi} \right)^3 y'''(1) = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \\ \left( \frac{4}{\pi} \right)^4 y^{(4)}(1) &= 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad \left( \frac{4}{\pi} \right)^4 y^{(4)}(-1) = 1 \end{aligned} \quad (4.54)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$\left( \frac{4}{\pi} \right)^8 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^8 y(t_j) - y(t_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.55)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k=0$  ve  $k=N$  için sınır koşullarından da

$$\begin{aligned} y(t_N) + \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{j=0}^N d_{0,j}^1 y(t_j) &= 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y(t_0) + \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 y(t_j) = 3 + e^{\frac{\pi}{2}}, \\ y(t_N) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^2 y(t_j) &= e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y(t_0) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 y(t_j) = 2 + e^{\frac{\pi}{2}}, \\ y(t_0) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^3 y(t_j) &= 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad y(t_N) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^3 y(t_j) = 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \\ \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^4 y(t_j) &= 1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^4 y(t_j) = 1, \end{aligned} \quad (4.56)$$

değerleri kullanılır ise,  $N=8$  için yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned} y(t) &= 2.9111 + 2.2727t + 0.4563t^2 + 0.1195t^3 + 0.0459t^4 + 0.0071t^5 + \\ &0.0004t^6 + 0.00006t^7 + 0.00001t^8 \end{aligned} \quad (4.57)$$

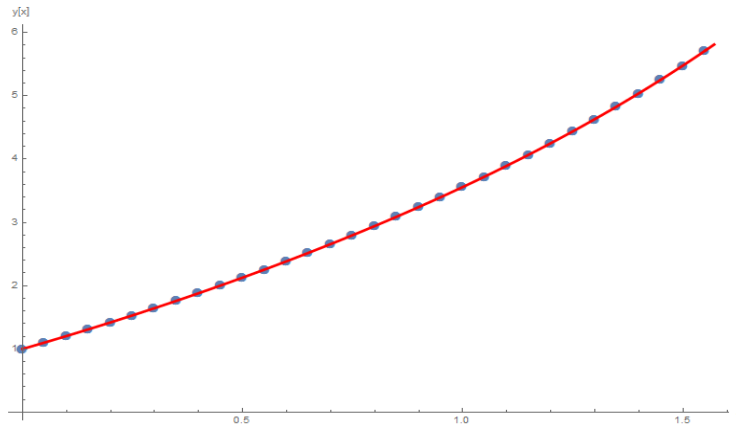
olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow \left(\frac{4}{\pi}\right)x-1$  dönüşümü kullanıldığında da

$$\begin{aligned} y(x) &= 1.0143 + 1.9970x + 0.4985x^2 - 0.0004x^3 + 0.0416x^4 + 0.0159x^5 \\ &+ 0.0023x^6 - 0.0005x^7 + 0.0001x^8 \end{aligned} \quad (4.58)$$

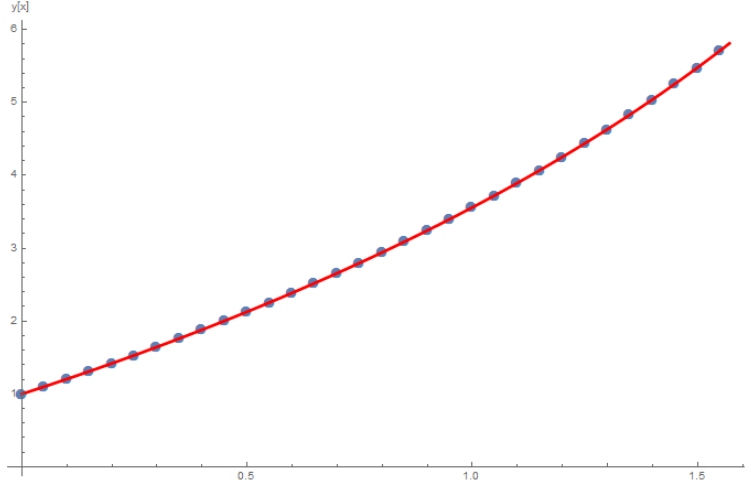
şeklindedir.  $N=12$  için doğrudan ekte verilen programla elde edilen çözüm de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} y(x) &= 1.0001 + 1.9999x + 0.4999x^2 - 5.4 \times 10^{-7}x^3 + 0.0416x^4 + 0.0166x^5 + 0.0013x^6 \\ &- 0.0001x^7 + 0.00002x^8 + 0.0005x^9 - 2.7 \times 10^{-9}x^{10} + 8.9 \times 10^{-8}x^{11} - 7.7 \times 10^{-9}x^{12} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Şekil 4.14 ve Şekil 4.15 de analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.14 :  $N=8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



**Şekil 4.15 :**  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.6' da verilmiştir.

**Çizelge 4.6 :**  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	8	12
	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-5}$

#### 4.1.7 Yüksek mertebe sistem

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) - z'(x) &= 0 \\ z^{(4)}(x) - y(x) &= \cosh(x) - \sinh(x) \end{aligned} \quad (4.60)$$

ile verilen diferansiyel denklemleri

$$\begin{cases} y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 1 \\ z(0) = 1, z'(0) = 0, z''(0) = 1, z'''(0) = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

koşulları altında Chebyshev sonlu farklar yöntemini kullanarak çözüünüz.

*Çözüm:* (4.60) ile verilen diferansiyel denklem sisteminin analitik çözümü  $y(x) = \sinh(x)$ ,  $z(x) = \cosh(x)$  tir. Burada  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü ile yukardaki denklem ve sınır koşulları

$$\left. \begin{aligned} 16y^{(4)}(t) - 2z'(t) &= 0 \\ 16z^{(4)}(t) - y(t) &= \cosh((t+1)/2) - \sinh((t+1)/2) \end{aligned} \right\} -1 \leq t \leq 1 \quad (4.62)$$



$$\begin{cases} y(-1) = 0, 2y'(-1) = 1, 4y''(-1) = 0, 8y'''(-1) = 1 \\ z(-1) = 1, 2z'(-1) = 0, 4z''(-1) = 1, 8z'''(-1) = 0 \end{cases} \quad (4.63)$$

olarak elde edilir. Bu denklem yaklaşım polinomu ve türevlerinin Chebyshev açılımları ile

$$\left. \begin{aligned} 16 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(4)} y(t_j) - 2 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(1)} z(t_j) &= 0 \\ 16 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(4)} y(t_j) - y(t_k) &= \cosh((t_k + 1)/2) - \sinh((t_k + 1)/2) \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots, N-4 \quad (4.64)$$

halinde yazılır ve  $k = N$  için başlangıç koşullarından

$$\begin{cases} y(N) = 0, 2 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 y(t_j) = 1, 4 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 y(t_j) = 0, 8 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^3 y(t_j) = 1 \\ z(N) = 1, 2 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 z(t_j) = 0, 4 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 z(t_j) = 1, 8 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^3 z(t_j) = 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

elde edilir.  $N = 4$  için yaklaşım polinomları

$$\begin{cases} y(t) = 0.5234 + 0.5730t + 0.0783t^2 + 0.0314t^3 + 0.0026t^4 \\ z(t) = 1.1291 + 0.2664t + 0.1496t^2 + 0.0164t^3 + 0.0041t^4 \end{cases} \quad (4.66)$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlar  $t \rightarrow 2x - 1$  dönüşümü ile de

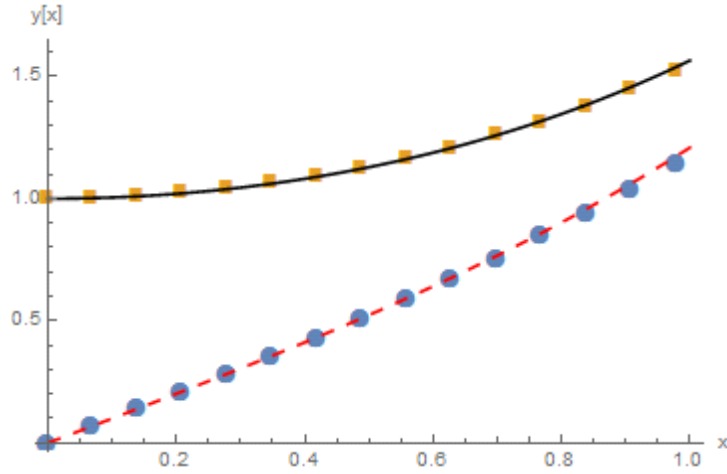
$$\begin{cases} y(x) = 0. + 1.x - 1.5 \times 10^{-12} x^2 + 0.1666x^3 + 0.0423x^4 \\ z(x) = 0.9999 + 4.3 \times 10^{-15} x + 0.5000x^2 - 1.5 \times 10^{-14} x^3 + 0.0657x^4 \end{cases} \quad (4.67)$$

halini alır.  $N = 8$  ve  $N = 12$  için çözümler sırasıyla aşağıdaki gibidir.

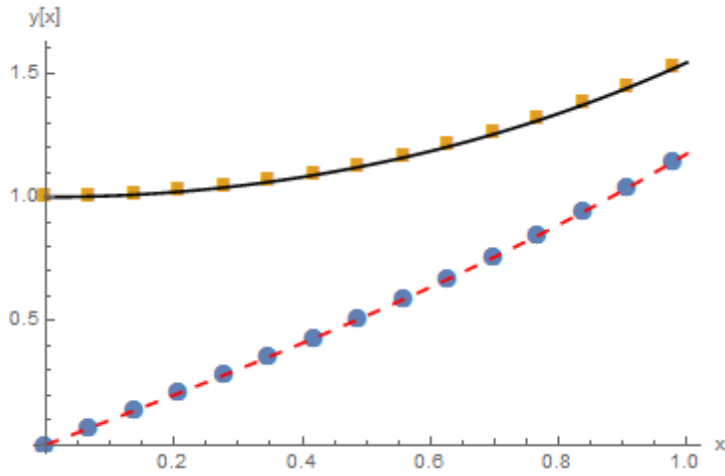
$$\begin{cases} y(x) = 2.3 \times 10^{-15} + 0.9999x + 8.1 \times 10^{-9} x^2 + 0.1666x^3 + 0.00003x^4 + \\ 0.0082x^5 + 0.00007x^6 + 0.0001x^7 + 0.00001x^8 \\ z(x) = 1. + 2.3 \times 10^{-13} x + 0.4999x^2 + 1.2316 \times 10^{-10} x^3 + 0.0417x^4 - \\ 0.00009x^5 + 0.0014x^6 - 0.00003x^7 + 0.00003x^8 \end{cases} \quad (4.68)$$

$$\begin{cases}
y(x) = 4.3 \times 10^{-14} + 1.x - 3.4 \times 10^{-7} x^2 + 0.1666x^3 - 0.0001x^4 + \\
0.0094x^5 - 0.0048x^6 + 0.0138x^7 - 0.0251x^8 + 0.0297x^9 - \\
0.0219x^{10} + 0.0091x^{11} - 0.0016x^{12} \\
z(x) = 1. - 4.2 \times 10^{-12} x + 0.5x^2 - 1.1 \times 10^{-8} x^3 + 0.0416x^4 + 0.000001x^5 \\
+ 0.0013x^6 - 0.000003x^7 + 0.00003x^8 - 0.00002x^9 + 0.00001x^{10} \\
- 0.000007x^{11} + 0.000001x^{12}
\end{cases} \quad (4.69)$$

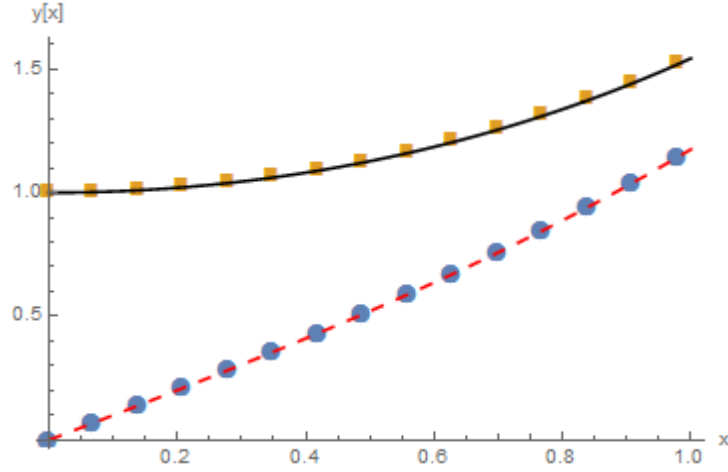
şeklindedir. Şekil 4.16, Şekil 4.17 ve Şekil 4.18 de  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır. Burada  $z(x)$  için analitik çözüm kareler, sayısal çözüm eğrisel bir çizgi,  $y(x)$  için analitik çözüm noktalar, sayısal çözüm ise kesikli bir çizgi ile gösterilmiştir.



Şekil 4.16 :  $N = 4$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.17 :  $N = 8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



**Şekil 4.18 :**  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.1.7' de verilmiştir. Çizelgedeki 1. Satır  $N$  değerlerini gösterirken 2. Satır  $y(x)$  3. Satır  $z(x)$  için hatayı göstermektedir.

**Çizelge 4.1.7 :**  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	4	8	12
	$3.3 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-5}$	$7.8 \times 10^{-9}$
	$1.5 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-7}$

## 4.2 Adi Türevli Nonlineer Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde çeşitli Nonlineer adi türevli diferansiyel denklemler Chebyshev sonlu farklar yöntemiyle çözülmüştür.

### 4.2.1 İkinci mertebe başlangıç değer problemi

$$y''(x) - (y(x))^3 + \frac{19}{4}y(x) = \frac{1}{4}\sin(6x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.70)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad (4.71)$$

başlangıç koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

*Çözüm:* (4.70) de verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = \sin(2x)$  dir. Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0,1]$

aralığını  $[-1,1]$  aralığına  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni diferansiyel denklem ve başlangıç koşulları

$$4y''(t) - y(t)^3 + \frac{19}{4}y(t) - \frac{1}{4}\sin(3t+3) =, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.72)$$

$$y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 1 \quad (4.73)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$4 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^2 y(t_j) - y(t_k)^3 + \frac{19}{4}y(t_k) - \frac{1}{4}\sin(3t_k+3) = 0, \quad k = 0,1,2,\dots,N-1 \quad (4.74)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k = N$  için başlangıç koşullarından da  $y(t_N) = 0$ ,

$\sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 y(t_j) = 1$  değerleri kullanılır ise,  $N=4$  için Newton-Raphson yöntemi

kullanılarak çözümün

$$y(t_0) = 0.8879, \quad y(t_1) = 0.9808, \quad y(t_2) = 0.8419, \quad y(t_3) = 0.2954, \quad y(t_4) = 0. \quad (4.75)$$

değerleri elde edilir. Buradan (3.33) yardımıyla

$$a_0 = 1.2811, \quad a_1 = 0.4642, \quad a_2 = -0.1990, \quad a_3 = -0.0203, \quad a_4 = 0.0048 \quad (4.76)$$

katsayılarına ulaşılır. (3.1) ifadesinden de arzu edilen yaklaşım polinomu

$$y(t) = 0.8444 + 0.5252t - 0.4367t^2 - 0.0813t^3 + 0.0386t^4 \quad (4.77)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü kullanıldığında da

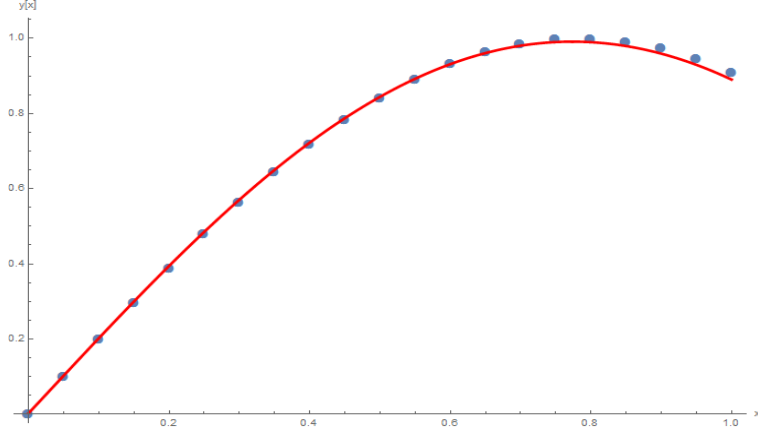
$$y(x) = 0.0024 + 1.9999x + 0.1575x^2 - 1.8887x^3 + 0.6191x^4 \quad (4.78)$$

$N=8$  ve  $N=12$  için doğrudan ekte verilen programlarla elde edilen çözümler de sırasıyla aşağıdaki gibidir.

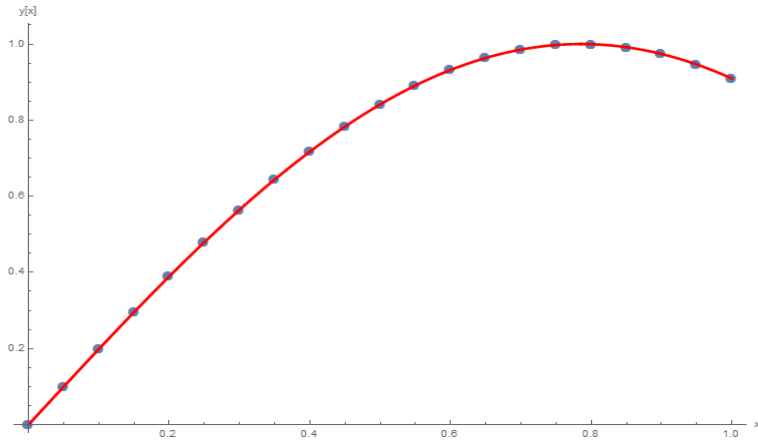
$$y(x) = 8.5 \times 10^{-8} + 1.9999x + 0.00002x^2 - 1.3336x^3 + 0.0020x^4 \\ + 0.2604x^5 + 0.0104x^6 - 0.0356x^7 + 0.0055x^8 \quad (4.79)$$

$$y(x) = 4.4 \times 10^{-13} + 2.x + 3. \times 10^{-10} x^2 - 1.3333x^3 + 1.3 \times 10^{-7} x^4 + 0.26666x^5 \\ + 0.0004x^6 - 0.025x^7 + 0.0002x^8 + 0.0013x^9 + 0.0003x^{10} - 0.0007x^{11} + 0.0007x^{12} \quad (4.80)$$

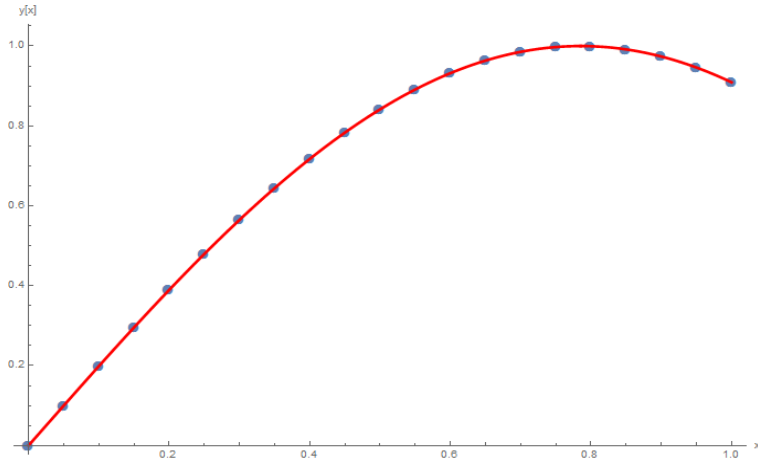
Şekil 4.19, Şekil 4.20 ve Şekil 4.21 de  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.19 :  $N = 4$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.20 :  $N = 8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.21 :  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümünün karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.8' de verilmiştir.

**Çizelge 4.8 :**  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	4	8	12
	$1.8 \times 10^{-2}$	$1.8 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-11}$

#### 4.2.2 İkinci mertebe sınır değer problemi

$$y''(x) + 2y'(x)y(x) = -\cos(x)(1 + 2\sin(x)), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.81)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (4.82)$$

sınır koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

*Çözüm:* (4.81) de verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = \cos(x)$  dir.

Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0, \frac{\pi}{2}]$

aralığını  $[-1, 1]$  aralığına  $t \rightarrow \frac{4}{\pi}x - 1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni

diferansiyel denklem ve sınır koşulları

$$4y''(t) + 4y'(t)y(t) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}(t+1)\right)(1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}(t+1)\right)), \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.83)$$

$$y(-1) = 1, \quad y(1) = 0 \quad (4.84)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^2 y(t_j) + \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^1 y(t_j) y(t_k) - \cos\left(\frac{\pi}{4}(t_k+1)\right)(1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}(t_k+1)\right)), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.85)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k=0$  ve  $k=N$  için sınır koşullarından da  $y(t_N) = 1$ ,

$y(t_0) = 0$  değerleri kullanılır ise,  $N=4$  için yaklaşım polinomu

$$y(t) = 0.7073 - 0.5541t - 0.2186t^2 + 0.0541t^3 + 0.0112t^4 \quad (4.86)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow \frac{4}{\pi}x - 1$  dönüşümü kullanıldığında da

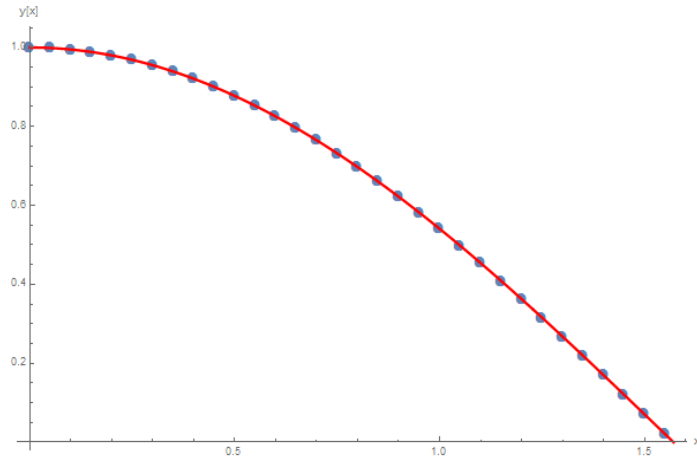
$$y(x) = 1. + 0.0009x - 0.5087x^2 + 0.0191x^3 + 0.0295x^4 \quad (4.87)$$

$N=8$  ve  $N=12$  için doğrudan ekte verilen programlarla elde edilen çözümler de sırasıyla aşağıdaki gibidir.

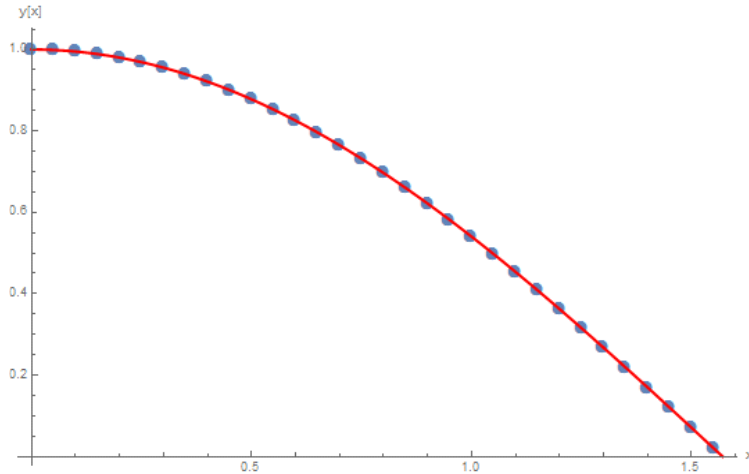
$$y(x) = 0.9999 + 1.4 \times 10^{-8}x - 0.500x^2 + 0.000005x^3 + 0.0416x^4 + 0.00004x^5 - 0.0014x^6 + 0.00002x^7 + 0.00001x^8 \quad (4.88)$$

$$y(x) = 0.9999 - 8.3 \times 10^{-13}x - 0.500x^2 + 1.6 \times 10^{-10}x^3 + 0.0416x^4 + 6.4 \times 10^{-9}x^5 - 0.0013x^6 + 3.2312 \times 10^{-8}x^7 + 0.00002x^8 + 3.0580 \times 10^{-8}x^9 - 2.9133 \times 10^{-7}x^{10} + 4.9 \times 10^{-9}x^{11} + 1.3 \times 10^{-9}x^{12} \quad (4.89)$$

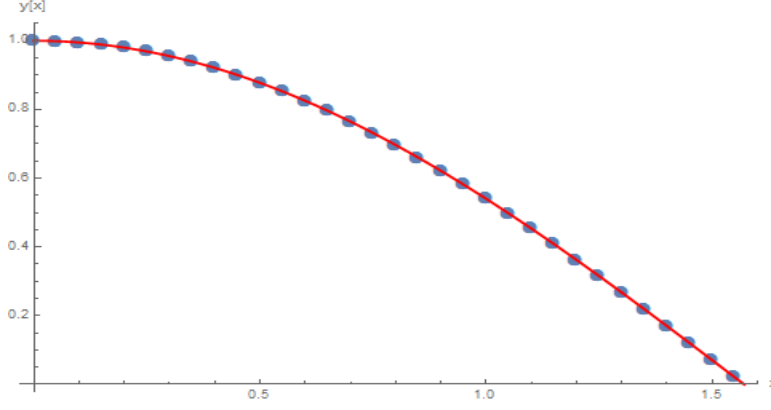
Şekil 4.22, Şekil 4.23 ve Şekil 4.24 de  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.22 :  $N = 4$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.23 :  $N = 8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



**Şekil 4.24 :**  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.9’ da verilmiştir.

**Çizelge 4.9 :**  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	4	8	12
	$5.0 \times 10^{-4}$	$2.3 \times 10^{-9}$	$2.7 \times 10^{-13}$

### 4.2.3 Yüksek mertebe başlangıç değer problemi

$$y^{(8)}(x) + y(x)y^{(1)}(x) = \sinh(x) + \sinh(x)\cosh(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.90)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$y^{(2m)}(0) = 0, \quad y^{(2m+1)}(0) = 1, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (4.91)$$

başlangıç koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

**Çözüm:** (4.90) da verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = \sinh(x)$  dir. Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0, 1]$  aralığını  $[-1, 1]$  aralığına  $t \rightarrow 2x - 1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni diferansiyel denklem ve sınır koşulları

$$2^8 y^{(8)}(t) + 2y(t)y^{(1)}(t) = \sinh\left(\frac{t+1}{2}\right) + \sinh\left(\frac{t+1}{2}\right)\cosh\left(\frac{t+1}{2}\right), \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.92)$$

$$y^{(2m)}(-1) = 0, \quad y^{(2m+1)}(-1) = 1, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (4.93)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla



$$2^8 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^8 y(t_j) + 2y(t_k) \sum_{j=0}^N d_{k,j}^1 y(t_j) = \sinh\left(\frac{t_k+1}{2}\right) \left(1 + \cosh\left(\frac{t_k+1}{2}\right)\right), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.94)$$

denklemler sistemi haline getirilir,  $k = N$  için başlangıç koşullarından da  $y^{(2m)}(t_N) = 0$ ,  $y^{(2m+1)}(t_N) = 1$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$  değerleri kullanılır ise,  $N = 8$  içinyaklaşım polinomu

$$y(t) = 0.5210 + 0.5638t + 0.0651t^2 + 0.0234t^3 + 0.0013t^4 + 0.0002t^5 + 0.00001t^6 + 0.000002t^7 + 9. \times 10^{-8}t^8 \quad (4.95)$$

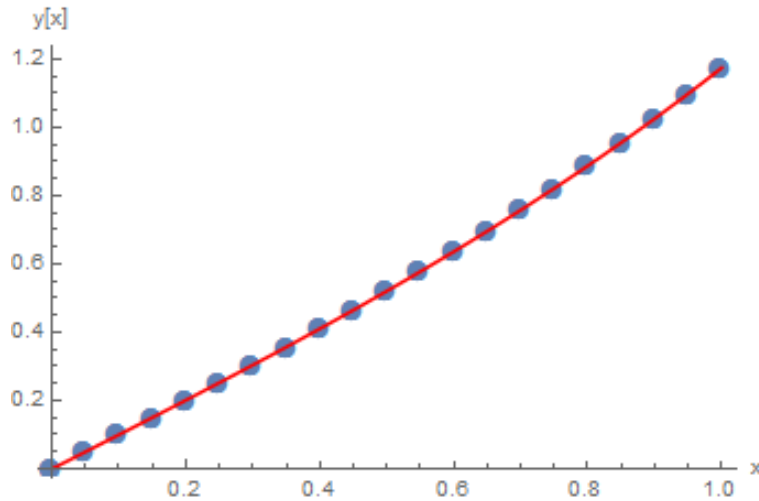
olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü kullanıldığında da

$$y(x) = -2. \times 10^{-15} + 0.9999x + 1. \times 10^{-13}x^2 + 0.16666x^3 + 1. \times 10^{-12}x^4 + 0.0083x^5 - 1. \times 10^{-12}x^6 + 0.00019x^7 + 0.00002x^8 \quad (4.96)$$

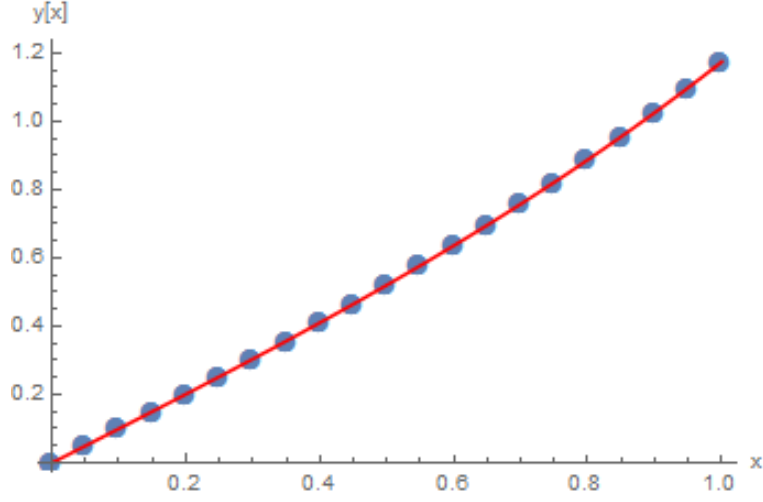
$N = 12$  için doğrudan ekte verilen programlarla elde edilen çözümde aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = .8 \times 10^{-15} + 1. x + 4.9 \times 10^{-14}x^2 + 0.16666x^3 - 2.8 \times 10^{-13}x^4 + 0.0083x^5 - 6.9 \times 10^{-10}x^6 + 0.0001x^7 + 1.4255 \times 10^{-7}x^8 + 0.000002x^9 + 5.9 \times 10^{-8}x^{10} + 5.9299 \times 10^{-9}x^{11} + 3.1 \times 10^{-9}x^{12} \quad (4.97)$$

Şekil 4.25 ve Şekil 4.26 da  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.25 :  $N = 8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



**Şekil 4.26 :**  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.10' da verilmiştir.

**Çizelge 4.10 :**  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	8	12
	$2.1 \times 10^{-5}$	$4.7 \times 10^{-8}$

#### 4.2.4 Yüksek mertebe sınır değer problemi

$$y^{(10)}(x) - e^{-x}(y(x))^2 = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.98)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$y(0) = 1, \quad y(1) = e, \quad y^{(2m)}(0) = 1, \quad y^{(2m)}(1) = e, \quad m=1,2,3,4 \quad (4.99)$$

sınır koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

**Çözüm:** (4.98) de verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = e^x$  dir. Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0,1]$  aralığını  $[-1,1]$  aralığına  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni diferansiyel denklem ve sınır koşulları

$$2^{10} y^{(10)}(t) - e^{\frac{(-t-1)}{2}}(t)y(t) = 0, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.100)$$

$$y(-1) = 1, \quad y(1) = e, \quad y^{(2m)}(-1) = \frac{1}{2^{2m}}, \quad y^{(2m)}(1) = \frac{e}{2^{2m}}, \quad m=1,2,3,4 \quad (4.101)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$2^{10} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{10} y(t_j) - e^{-\frac{t_k-1}{2}} y(t_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.102)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k=0$  ve  $k=N$  için sınır koşullarından da

$$y(t_N) = 1, \quad y(t_0) = e, \quad \sum_{j=0}^N d_{N,j}^{2m} y(t_j) = \frac{1}{2^{2m}}, \quad \sum_{j=0}^N d_{0,j}^{2m} y(t_j) = \frac{e}{2^{2m}}, \quad m=1,2,3,4 \text{ değerleri}$$

kullanılır ise,  $N = 10$  için yaklaşım polinomu

$$y(t) = 1.6487 + 0.8243t + 0.2061t^2 + 0.0343t^3 + 0.0042t^4 + 0.0004t^5 + 0.00003t^6 + 0.000002t^7 + 1.4 \times 10^{-7}t^8 + 9.2 \times 10^{-9}t^9 + 7.3 \times 10^{-10}t^{10} \quad (4.103)$$

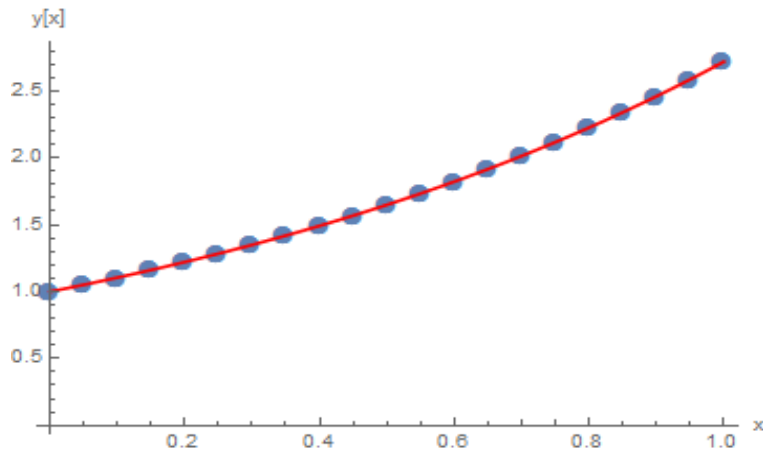
olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow 2x-1$  dönüşümü kullanıldığında da

$$y(x) = 0.9999 + 0.9999x + 0.4999x^2 + 0.1667x^3 + 0.04166x^4 + 0.0082x^5 + 0.0013x^6 + 0.0002x^7 + 0.00002x^8 + 9.8 \times 10^{-7}x^9 + 7.4 \times 10^{-7}x^{10} \quad (4.104)$$

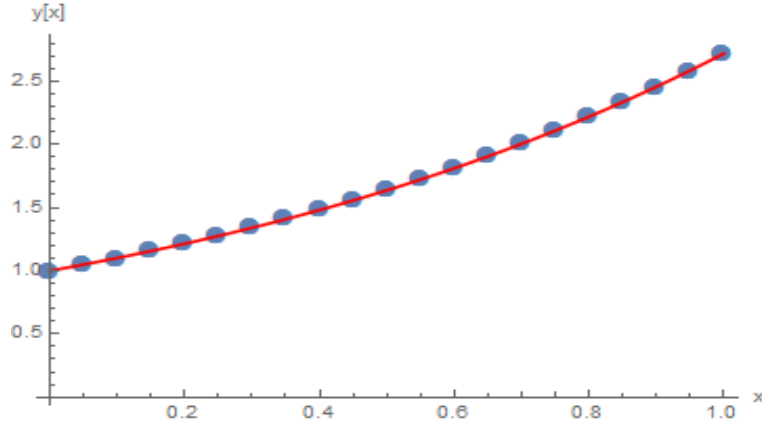
$N = 14$  için doğrudan ekte verilen programlarla elde edilen çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = 1. + 0.9003x + 0.5x^2 + 0.2280x^3 + 0.0416x^4 - 0.0235x^5 + 0.00138x^6 + 0.0092x^7 + 0.00002x^8 - 0.0034x^9 + 0.0024x^{10} + -0.00105x^{11} + 0.0003x^{12} - 0.00005x^{13} + 4.97699 \times 10^{-6}x^{14} \quad (4.105)$$

Şekil 4.27 ve Şekil 4.28 de  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.27 :  $N = 10$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



**Şekil 4.28 :**  $N = 14$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.11’ de verilmiştir.

**Çizelge 4.11 :**  $N$ ’ in farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	10	14
	$1.3 \times 10^{-5}$	$8.6 \times 10^{-3}$

#### 4.2.5 Yüksek mertebe Robin sınır değer problemi

$$y^{(7)}(x) - 128\sqrt{y(x)} \cos(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.106)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$\begin{aligned} y(0) + y'(0) &= 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y(0) + y^{(2)}(0) &= 2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\ y(0) + y^{(3)}(0) &= 0, \quad y(0) - y^{(4)}(0) = 8, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned} \quad (4.107)$$

sınır koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

**Çözüm:** (4.106) da verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = (\sin x)^2$  dir.

Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için ilk olarak  $[0, \frac{\pi}{2}]$

aralığını  $[-1, 1]$  aralığına  $t \rightarrow \frac{4}{\pi}x - 1$  dönüşümü ile taşımak gerekir. Elde edilen yeni

diferansiyel denklem

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^7 y^{(7)}(t) + 128\sqrt{y(t)} \cos\left(\frac{\pi}{4}(t+1)\right) = 0, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.108)$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} yy(-1) + \left(\frac{4}{\pi}\right) y'(-1) &= 0, \quad y(1) + \left(\frac{4}{\pi}\right) y'(1) = 1 \\ y(-1) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 y^{(2)}(-1) &= 2, \quad y(1) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 y^{(2)}(1) = -1 \\ y(-1) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 y^{(3)}(-1) &= 0, \quad y(-1) - \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 y^{(4)}(-1) = -8 \\ y(1) - \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 y^{(4)}(1) &= 9 \end{aligned} \quad (4.109)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^7 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^7 y(t_j) - \sqrt{y(t_k)} \cos\left(\frac{\pi}{4}(t_k+1)\right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.110)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k=0$  ve  $k=N$  için sınır koşullarından da

$$\begin{aligned} y(t_N) + \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 y(t_j) &= 0, \quad y(t_0) + \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{j=0}^N d_{0,j}^1 y(t_j) = 1 \\ y(t_N) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 y(t_j) &= 2, \quad y(t_0) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^2 y(t_j) = -1 \\ y(t_N) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^3 y(t_j) &= 0, \quad y(t_N) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^4 y(t_j) = -8, \\ y(t_0) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^4 y(t_j) &= 9 \end{aligned} \quad (4.111)$$

değerleri kullanılır ise,  $N=7$  için yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned} y(t) &= 0.4983 + 0.7222t + 0.0294t^2 - 0.2921t^3 - 0.0071t^4 + \\ &0.0280t^5 + 0.0004t^6 - 0.0003t^7 \end{aligned} \quad (4.112)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow \frac{4}{\pi}x - 1$  dönüşümü kullanıldığında da

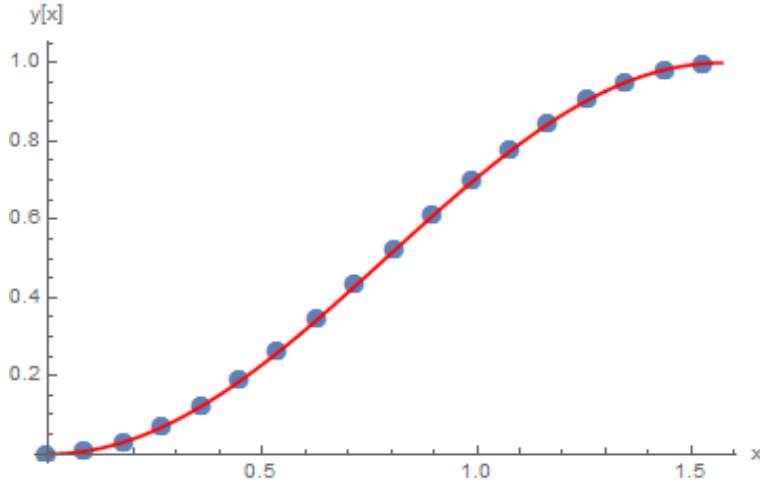
$$\begin{aligned} y(x) &= 0.0633 - 0.0633x + 0.9683x^2 - 0.0105x^3 - 0.3359x^4 + \\ &0.0594x^5 + 0.0126x^6 - 0.0019x^7 \end{aligned} \quad (4.113)$$

şeklinindedir.  $N=9$  ve  $N=13$  için doğrudan ekte verilen programlarla elde edilen çözümler de sırasıyla aşağıdaki gibidir.

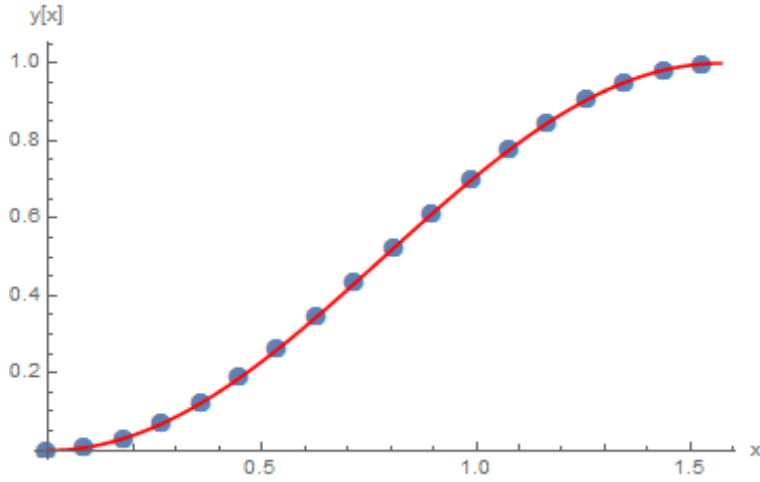
$$y(x) = -0.0302 + 0.0302x + 1.0151x^2 + 0.0050x^3 - 0.3320x^4 - 0.0456x^5 + 0.0893x^6 - 0.0174x^7 - 0.0006x^8 + 0.0002x^9 \quad (4.114)$$

$$y(x) = 1.2 \times 10^{-13} - 2.4 \times 10^{-15}x + 1.0x^2 - 2.3 \times 10^{-12}x^3 - 0.3332x^4 - 0.0002x^5 + 0.0448x^6 - 0.0003x^7 - 0.0029x^8 - 0.0001x^9 + 0.0001x^{10} - 0.00001x^{11} - 0.000003x^{12} + 4.5 \times 10^{-7}x^{13} \quad (4.115)$$

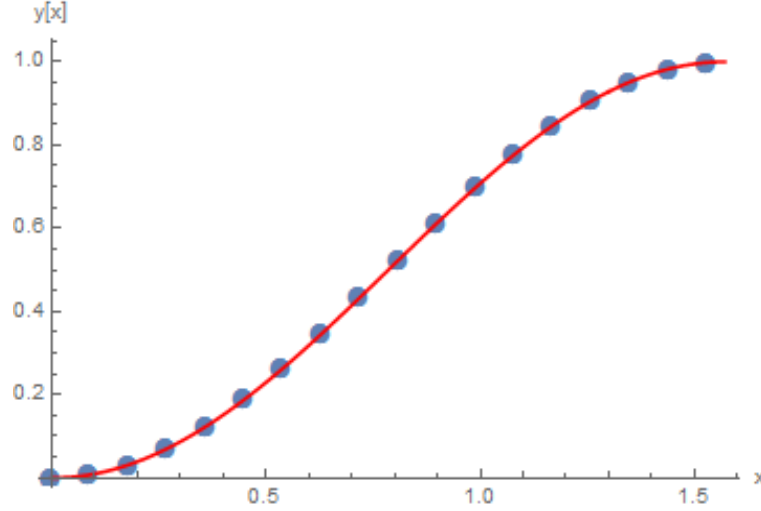
Şekil 4.29, Şekil 4.30 ve Şekil 4.31 de  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.29 :  $N = 7$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.30 :  $N = 9$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



**Şekil 4.31 :**  $N = 11$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.12’ de verilmiştir.

**Çizelge 4.12 :**  $N$  nin farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	7	9	11
	$3.0 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-3}$	$6.9 \times 10^{-5}$

#### 4.2.6 Yüksek mertebe karışık sınır değer problemi

$$y^{(12)}(x) + y^{(2)}(x) - y(x)y^{(1)}(x) - \cos(2x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.116)$$

ifadesi ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü

$$\begin{aligned} y(0) - y' \left( \frac{\pi}{2} \right) &= -2, \quad y \left( \frac{\pi}{2} \right) - y'(0) = 0, \quad y(0) + y'' \left( \frac{\pi}{2} \right) = -2 \\ y \left( \frac{\pi}{2} \right) + y''(0) &= 2, \quad y^{(3)}(0) = -1, \quad y^{(3)} \left( \frac{\pi}{2} \right) = -1, \quad y^{(4)}(0) = -1 \\ y^{(4)} \left( \frac{\pi}{2} \right) &= 1, \quad y^{(5)}(0) = 1, \quad y^{(5)} \left( \frac{\pi}{2} \right) = 1, \quad y^{(6)}(0) = 1, \quad y^{(6)} \left( \frac{\pi}{2} \right) = -1 \end{aligned} \quad (4.117)$$

sınır koşulları altında Chebyshev sonlu farklar methodunu kullanarak elde ediniz.

**Çözüm:** (4.116) da verilen diferansiyel denklemin analitik çözümü  $y(x) = \sin(x) - \cos(x)$  dir. Problemin Chebyshev sonlu farklar yöntemi ile sayısal

çözümü için ilk olarak  $[0, \frac{\pi}{2}]$  aralığını  $[-1, 1]$  aralığına  $t \rightarrow \frac{4}{\pi}x - 1$  dönüşümü ile

taşımak gerekir. Elde edilen yeni diferansiyel denklem

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^{12} y^{(12)}(t) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 y^{(2)}(t) - \left(\frac{4}{\pi}\right) y(t) y^{(1)}(t) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right) = 0, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (4.118)$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} y(-1) - \left(\frac{4}{\pi}\right) y'(-1) &= -2, \quad y(1) - \left(\frac{4}{\pi}\right) y'(1) = 0 \\ y(-1) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 y''(-1) &= -2, \quad y(1) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 y''(1) = 2, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 y^{(3)}(-1) = -1 \\ \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 y^{(3)}(1) &= -1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 y^{(4)}(-1) = -1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 y^{(4)}(1) = 1, \\ \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 y^{(5)}(-1) &= 1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 y^{(5)}(1) = 1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^6 y^{(6)}(-1) = 1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^6 y^{(6)}(1) = -1 \end{aligned} \quad (4.119)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem (3.36) nın yardımıyla

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{12} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{12} y(t_j) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^2 y(t_j) - \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{j=0}^N d_{k,j}^1 y(t_j) y(t_k) - \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}(t_k + 1)\right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.120)$$

denklem sistemi haline getirilir,  $k=0$  ve  $k=N$  için sınır koşullarından da

$$\begin{aligned} y(t_N) - \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{j=0}^N d_{0,j}^1 y(t_j) &= -2, \quad y(t_0) - \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 y(t_j) = 0, \\ y(t_N) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^2 y(t_j) &= -2, \quad y(t_0) + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 y(t_j) = 2, \\ \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^3 y(t_j) &= -1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^3 y(t_j) = -1, \\ \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^4 y(t_j) &= -1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^4 y(t_j) = 1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^5 y(t_j) = 1, \\ \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^5 y(t_j) &= 1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^6 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^6 y(t_j) = 1, \quad \left(\frac{4}{\pi}\right)^6 \sum_{j=0}^N d_{0,j}^6 y(t_j) = -1 \end{aligned} \quad (4.121)$$

değerleri kullanılır ise,  $N=12$  için yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned} y(t) = -4.8 \times 10^{-8} + 1.1107t + 5.1 \times 10^{-9} t^2 - 0.1141t^3 + 6.1 \times 10^{-9} t^4 + \\ 0.0035t^5 - 4.9 \times 10^{-9} t^6 - 0.00005t^7 + 2.6 \times 10^{-9} t^8 + 4.4 \times 10^{-7} t^9 - \\ 8.2 \times 10^{-10} t^{10} - 2.4 \times 10^{-9} t^{11} + 1.1 \times 10^{-10} t^{12} \end{aligned} \quad (4.122)$$



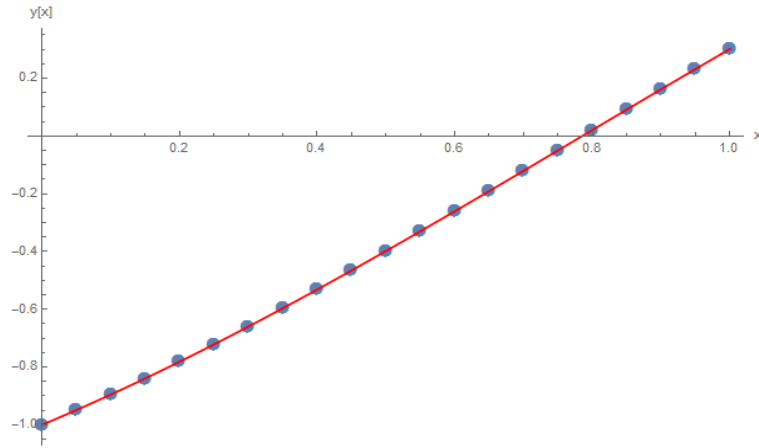
olarak bulunur. Yukarıdaki ifade de  $t \rightarrow \frac{4}{\pi}x - 1$  dönüşümü kullanıldığında da

$$y(x) = -1. + 0.9999x + 0.5x^2 - 0.16666x^3 - 0.0416x^4 + 0.0083x^5 + 0.0013x^6 - 0.0001x^7 - 0.00002x^8 + 0.000002x^9 + 3.7 \times 10^{-7}x^{10} - 5.4 \times 10^{-8}x^{11} + 2. \times 10^{-9}x^{12} \quad (4.123)$$

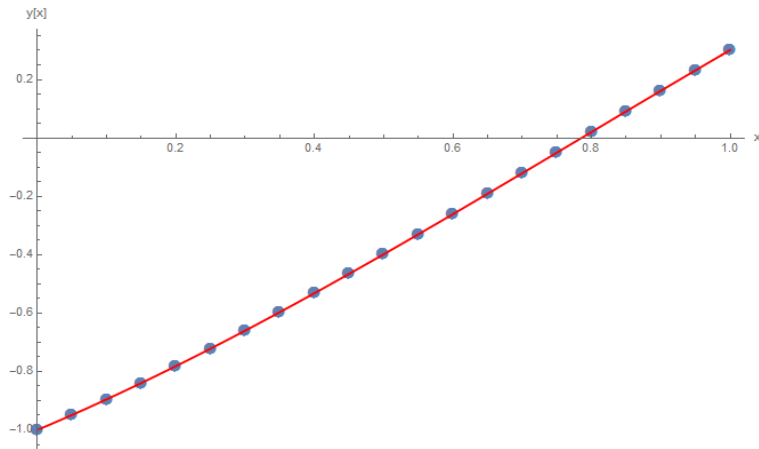
şeklindedir.  $N = 16$  için doğrudan ekte verilen programla elde edilen çözüm de aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = -1.00008 + 0.9996x + 0.5001x^2 - 0.1666x^3 - 0.0417x^4 + 0.0089x^5 - 0.0014x^6 + 0.0082x^7 - 0.0186x^8 + 0.0313x^9 - 0.0389x^{10} + 0.0353x^{11} - 0.0231x^{12} + 0.0106x^{13} - 0.0032x^{14} + 0.0005x^{15} - 0.00004x^{16} \quad (4.124)$$

Şekil 4.32 ve Şekil 4.33 de  $N$  nin farklı değerleri için analitik çözüm ile sayısal çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.32 :  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.33 :  $N = 16$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.13' de verilmiştir.

**Çizelge 4.13** :  $N$  ' in farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	12	16
	$6.5 \times 10^{-8}$	$3.6 \times 10^{-4}$

#### 4.2.7 Yüksek mertebe sistem

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) - (z(x))^2 &= \sin x - \cos^2(x) \\ z^{(4)}(x) - y(x)y'(x) &= \cos(x) - \cos(x)\sin(x) \end{aligned} \quad (4.125)$$

ile verilen diferansiyel denklemleri

$$\begin{cases} y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = -1 \\ z(0) = 1, z'(0) = 0, z''(0) = -1, z'''(0) = 0 \end{cases} \quad (4.126)$$

koşulları altında Chebyshev sonlu farklar yöntemini kullanarak çözüünüz.

*Çözüm:* (4.60) ile verilen diferansiyel denklem sisteminin analitik çözümü  $y(x) = \sin(x)$ ,  $z(x) = \cos(x)$  tir. Burada  $t \rightarrow 2x - 1$  dönüşümü ile yukardaki denklem ve sınır koşulları

$$\left. \begin{aligned} 16y^{(4)}(t) - (z(t))^2 &= \sin((t+1)/2) - \cos^2((t+1)/2) \\ 16z^{(4)}(t) - 2y(t)y'(t) &= \cosh((t+1)/2)(1 - \sinh((t+1)/2)) \end{aligned} \right\} -1 \leq t \leq 1 \quad (4.127)$$

$$\begin{cases} y(-1) = 0, 2y'(-1) = 1, 4y''(-1) = 0, 8y'''(-1) = -1 \\ z(-1) = 1, 2z'(-1) = 0, 4z''(-1) = -1, 8z'''(-1) = 0 \end{cases} \quad (4.128)$$

Bu denklem yaklaşım polinomu ve türevlerinin Chevyshev açılımları ile

$$\left. \begin{aligned} 16 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(4)} y(t_j) - z^2(t_k) &= -\cos^2((t_k+1)/2) + \sin((t_k+1)/2) \\ 16 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(4)} y(t_j) - 2y(t_k) \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(1)} y(t_j) &= \cosh((t_k+1)/2)(1 - \sinh((t_k+1)/2)) \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots, N-4 \quad (4.129)$$

halinde yazılır ve  $k = N$  için başlangıç koşullarından

$$\begin{cases} y(N) = 0, 2 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 y(t_j) = 1, 4 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 y(t_j) = 0, 8 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^3 y(t_j) = -1 \\ z(N) = 1, 2 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^1 z(t_j) = 0, 4 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^2 z(t_j) = -1, 8 \sum_{j=0}^N d_{N,j}^3 z(t_j) = 0 \end{cases} \quad (4.130)$$

elde edilir. Newton-Raphson yöntemi yardımıyla,  $N = 4$  için yaklaşım polinomları

$$\begin{cases} y(t) = 0.4812 + 0.4459t - 0.0497t^2 - 0.0123t^3 + 0.0021t^4 \\ z(t) = 0.8759 - 0.2462t - 0.1193t^2 + 0.0037t^3 + 0.0009t^4 \end{cases} \quad (4.131)$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlar  $t \rightarrow 2x - 1$  dönüşümü ile de

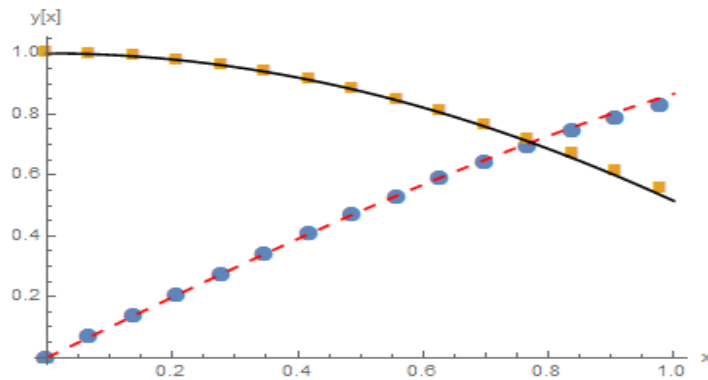
$$\begin{cases} y(x) = 5.5 \times 10^{-17} + 1.x - 1.4 \times 10^{-15} x^2 - 0.1666x^3 + 0.0339x^4 \\ z(x) = 1. + 4.4 \times 10^{-16} x - 0.4999x^2 + 1.7 \times 10^{-15} x^3 + 0.0150x^4 \end{cases} \quad (4.132)$$

halini alır.  $N = 8$  ve  $N = 12$  için çözümler sırasıyla aşağıdaki gibidir.

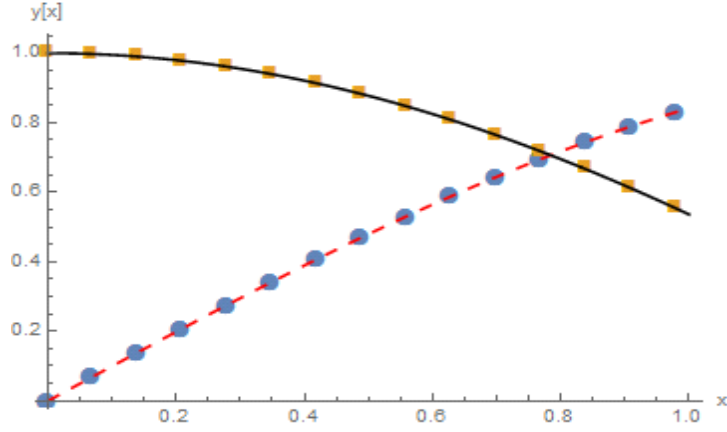
$$\begin{cases} y(x) = 1.6 \times 10^{-15} + 1.x - 6. \times 10^{-12} x^2 - 0.1666x^3 + 0.0003x^4 + \\ 0.0079x^5 + 0.0003x^6 - 0.0003x^7 + 0.00003x^8 \\ z(x) = 1. - 1.1 \times 10^{-16} x - 0.5x^2 + 7.5 \times 10^{-14} x^3 + 0.0414x^4 - 0.0038x^5 - \\ 0.0017x^6 + 0.0006x^7 - 0.00008x^8 \end{cases} \quad (4.133)$$

$$\begin{cases} y(x) = 3.2 \times 10^{-14} + x + 8.6 \times 10^{-14} x^2 - 0.1666x^3 + 2. \times 10^{-7} x^4 + 0.0083x^5 + 0.0001x^6 \\ - 0.0002x^7 + 0.00001x^8 - 0.00001x^9 + 3. \times 10^{-7} x^{10} + 7.1 \times 10^{-7} x^{11} - 1.4 \times 10^{-7} x^{12} \\ z(x) = 1. - 6.3 \times 10^{-15} x - 0.5x^2 + 1.2 \times 10^{-11} x^3 + 0.0416x^4 - 0.0041x^5 - 0.0013x^6 + \\ 0.0004x^7 + 0.00001x^8 - 0.00001x^9 - 0.00002x^{10} + 0.000001x^{11} - 1.8 \times 10^{-7} x^{12} \end{cases} \quad (4.134)$$

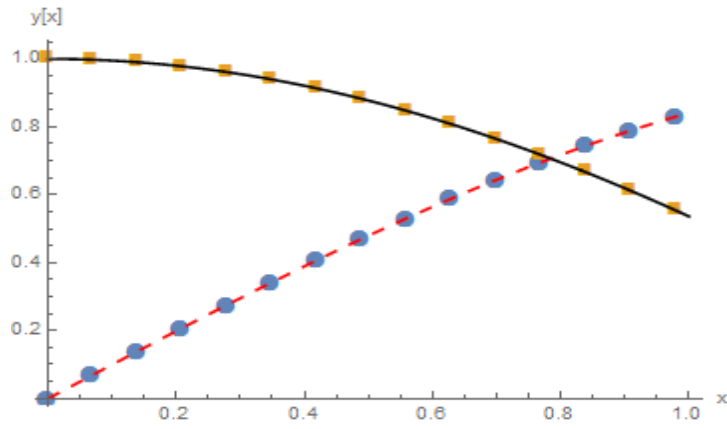
şeklindedir. Şekil 4.34, Şekil 4.35 ve Şekil 4.36 ile verilen grafiklerde  $z(x)$  için analitik çözüm karelerle, sayısal çözüm ise eğrisel bir çizgiyle,  $y(x)$  için analitik çözüm noktalarla, sayısal çözüm ise kesikli bir çizgi ile verilmiştir.



Şekil 4.34 :  $N = 4$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.35 :  $N = 8$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.36 :  $N = 12$  için analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

Yukarıda verilen problemin analitik ve sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen maksimum hatalar Çizelge 4.14' de verilmiştir. Çizelgedeki 1. Satır  $N$  değerlerini gösterirken 2. Satır  $y(x)$ , 3. Satır ise  $z(x)$  için hatayı göstermektedir.

Çizelge 4.14 :  $N$  ' in farklı değerleri için maksimum hatalar.

$N$	4	8	12
	$2.5 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-6}$
	$2.5 \times 10^{-2}$	$3.8 \times 10^{-3}$	$3.8 \times 10^{-3}$

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Chebyshev polinomlarının her mertebeden türevleri rekürsif olmayan şekilde elde edilmiş ve bu sonuçlarla adi türevli yüksek mertebeden başlangıç değer, sınır değer, Robin ve karışık sınır değer çözümleri için lineer, nonlinear diferansiyel denklem ve denklem sistemi içeren çeşitli uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Çalışmada,

- Chebyshev polinomlarının her mertebeden türevleri için genel bir formül üretilmiştir.
- Üretilen Chebyshev polinomlarının türevleri kullanılarak Chebyshev yaklaşım polinomunun her mertebeden türevleri için genel bir formül üretilmiştir. Böylelikle Chebyshev sonlu farklar yöntemi bundan önceki çalışmalarda olduğu gibi sadece ilk iki mertebeden değil, her mertebeden adi türevli başlangıç veya sınır değer problemine uygulanabilir hale getirilmiştir.
- Chebyshev sonlu farklar yöntemi kullanılarak problemlerin,
  - Cebrik denklem yapısına indirilerek kolayca çözülebildiği
  - Lineer olması durumunda indirgenmiş cebrik denklem sisteminin de lineer olduğu ve kolayca çözülebileceği
  - Nonlinear olması durumunda indirgenmiş cebrik denklem sisteminin de nonlinear olduğu ve Newton-Raphson yöntemiyle bu nonlinear problemin çözülebileceği
  - Diferansiyel denklem sistemi olması durumunda da tek farkın indirgenmiş denklem sisteminde denklem sayısının fazlalığı olduğu, ve benzer şekilde çözüme ulaşılabileceği gösterilmiştir.
- Bulunan genel formüller yardımıyla genelleştirilen Chebyshev sonlu farklar yöntemi farklı yüksek mertebelerden lineer sistemlere, başlangıç ve sınır değer, Robin sınır değer, karışık sınır değer problemleri ile nonlinear

sistemlere uygulanmış ve elde edilen sonuçlar, bu problemlerin analitik çözümleriyle de karşılaştırılmıştır.

- Bu karşılaştırma sonucunda, gerek Chebyshev serilerinin ortogonalite özellikleri, gerekse de polinom yapısında olmaları nedeniyle, diferansiyel denklemlerle modellenen birçok problem için, hem kolay programlanabilir hem de az işlemle güvenilir sonuçlara ulaşmak için Chebyshev sonlu farklar yönteminin avantajlı olduğu gözlenmiştir.
- Çok büyük nonlinear sistemlerde terim sayısındaki artışla birlikte indirgmeden elde edilen nonlinear denklem sistemini çözmek zorlaşacağından Chebyshev sonlu farklar yöntemin de güçlükler çıkmakla birlikte başlangıç koşullarının iyi seçilmesiyle birlikte bu güçlüğün üstesinden gelinebilmektedir.

Yöntemin rasyonel mertebeden türevli diferansiyel denklemlere ve çok boyutlu problemlerin çözümü için kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulaması gelecek çalışmaları beklemektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] **Aouadi, M.** (2008). Finite element and Chebyshev finite difference methods for micropolar flow past a stretching surface with heat and mass transfer, *International Journal of Computer Mathematics*, 85 (1), 105-122, doi:10.1080/00207160701374392.
- [2] **Inan, M.** (1967). *Cisimlerin Mukavemeti*, İstanbul, Türkiye.: İTÜ Vakfı Yayınları.
- [3] **Siddiqi, S. S., Iftikhar, M.** (2013). Numerical Solution of Higher Order Boundary Value Problems, *Abstract and Applied Analysis*, article id: 427521.
- [4] **Chandrasekhar, S.** (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. The International Series of Monographs on Physics, Oxford, UK.: Clarendon Press.
- [5] **Agarwal, R.P.** (1986). *Boundary value problems for Higher Ordinary Differential Equations*. Singapore.: World Scientific.
- [6] **Baldwin, P.** (1987). Asymptotic estimates of the eigenvalues of a sixth order boundary value problem obtained by using global phase integral methods, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 322281 - 305.
- [7] **Wazwaz, A.M.** (1998). A reliable modification of Adomian's Decomposition Method, *Appl. Math. and Comput*, 92, 1 - 7.
- [8] **Ullah, I., Khan, H., Rahim, M. T.** (2003). Numerical Solutions of Higher Order Nonlinear Boundary Value Problems by New Iterative Method. *Applied Mathematical Sciences*, 7 (49), 2429 – 2439
- [9] **Abdel, H., Hassan, H., Erturk, V. S.** (2009). Solutions of different types of the linear and Non-linear higher - order boundary value problems by differential transformation method, *Eu. J. Pure Appl. Math*, 426 -447.
- [10] **Liu, G. R., Wu, T. Y.** (2002). Differential quadrature solutions of eighth-order boundary-value differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 145 (1), 223–235.
- [11] **Golbabai, A., Javidi, M.** (2007). Application of homotopy perturbation method for solving eighth-order boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 191 (2), 334–346.
- [12] **Siddiqi, S. S., Twizell, E. H.** (1996). Spline solutions of linear eighth order boundary-value problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 131 (3-4), 309–325.
- [13] **Siddiqi, S. S., Twizell, E. H.** (1998). Spline solutions of linear tenth-order boundary-value problems, *International Journal of Computer Mathematics*, 68 (3-4), 345–362.

- [14] **Siddiqi, S. S., Akram, G.** (2007). Solutions of tenth-order boundary value problems using eleventh degree spline, *Applied Mathematics and Computation*, 185 (1), 115–127.
- [15] **Khan, M., Hussain, M.** (2011). Application of Laplace decomposition method on semi-infinite domain, *Numerical Algorithms*, 56 (2), 211–218.
- [16] **Jain, D.** (2007). *MVHAM: An Extension of the Homotopy Analysis Method for Improving Converge of the Multivariate Solution of Nonlinear Algebraic Equations as Typically Encountered in Analog Circuits.* (Elektronik Tez). Retrieved from <https://etd.ohiolink.edu/>
- [17] **Chebyshev, P. L.** (1854). *Théorie Des Mécanismes Connus Sous Le Nom De Parallélogrammes*, St. Petersburg Academy, Russia.
- [18] **Brown, J. D., Chu, M.T., Ellison, D. C., Plemmons, R. J.** (1993). Proceedings of the Cornelius Lanczos International Centenary Conference. Retrieved from <http://books.google.com.tr/books> (Orjinal work published 1938)
- [19] **Clenshaw, C. W.** (1955). A Note on the Summation of Chebyshev Series, *Math. Tab.*, 9, 118-120.
- [20] **Clenshaw, C. W.** (1957). The Numerical Solution of Linear Differential Equations in Chebyshev Series, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 53, 134-149
- [21] **Cornelius Lanczos (1893-1974) about mathematics.** (2013). Retrieved Şubat 21, 2013 from <https://www.youtube.com/watch?v=avSHHi9QCjA>
- [22] **Fox, L., Parker, I. B.** (1968). *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, London, England.: Oxford University Press.
- [23] **Elbarbary, E. M. E., El-Kady, M.** (2003). Chebyshev finite difference approximation for the boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 139, 513-523.
- [24] **Saadatmandi, A., Farsangi, J. A.** (2007). Chebyshev finite difference method for a nonlinear system of second-order boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 192, 586–591
- [25] **Saadatmandi, A., Dehghan, M.** (2008). The numerical solution of problems in calculus of variation using Chebyshev finite difference method, *Physics Letters A*, 372, 4037-4040.
- [26] **Saadatmandi, A., Azizi, M. R.** (2012). Chebyshev finite difference method for a Two–Point Boundary Value Problems with Applications to Chemical Reactor Theory, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 3 (1), 1 – 7.
- [27] **Rodrigues, O.** (1816). De l'attraction des sphéroïdes, *Correspondence sur l'École Impériale Polytechnique*, 3 (3), 361–385



## **EKLER**

**EK A:** Lineer diferansiyel denklemler için genel bir program.

**EK A1:** Lineer ikinci mertebe başlangıç değer.

**EK A2:** Lineer ikinci mertebe sınır değer.

**EK A3:** Lineer sekizinci mertebe başlangıç değer.

**EK A4:** Lineer altıncı mertebe sınır değer.

**EK A5:** Lineer sekizinci mertebe Robin sınır değer.

**EK A6:** Lineer sekizinci mertebe karışık sınır değer.

**EK B:** Lineer dördüncü mertebe sistem.

**EK C:** Nonlineer diferansiyel denklemler için genel bir program.

**EK C1:** Nonlineer ikinci mertebe başlangıç değer.

**EK C2:** Nonlineer ikinci mertebe sınır değer.

**EK C3:** Nonlineer sekizinci mertebe başlangıç değer.

**EK C4:** Nonlineer onuncu mertebe başlangıç değer.

**EK C5:** Nonlineer yedinci mertebe Robin sınır değer.

**EK C6:** Nonlineer onikinci mertebe karışık sınır değer.

**EK D:** Nonlineer dördüncü mertebe sistem.

## EK A

Not: Programda \*\*\* ile verilen ifadeler her program için farklı değerler almaktadır.

Diğer ifadeler ise her programda ortak olduğu için sadece bu programda verilecektir.

```
***Anl [x_]:= 3x^2
T [n_,x_]:=ChebyshevT[n,x]
*** NN=12;
t[i_]:=Cos[i Pi/NN]
c[0]=2;c[i_]:=1;Th[0]=Th[NN]=1/2;Th[i_]:=1;
d[k_,j_,m_]:=Th[j]/NN Sum[Sum[If[OddQ[n+1+m], 1/((m-1)!2^(m-3))
Product[n^2-(i)^2,{i,2-m,m+2}] T[n,t[j]] T[1,t[k]],0.],{1,0,n-m}],{n,1,NN-1}]
*** denk[NN]=y[NN]==3 ;denk[0]=Sum[d[0,j,1] y[j],{j,0,NN}]==3;
*** denk[k_]:=Sum[d[k,j,2] y[j],{j,0,NN}]+Sum[d[k,j,1]
y[j],{j,0,NN}]==6(t[k]+3)+6
CM=Table[Coefficient[denk[i][[1]],y[j]],{i,0,NN},{j,0,NN}]
right = Table[denk[i][[2]],{i,0,NN}]
sol = Inverse[CM].right
*** yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]
{y[0]->12.,y[1]->11.7964,y[2]->11.2096,y[3]->10.307,y[4]->9.1875,y[5]-
>7.96493,y[6]->6.75,y[7]->5.63555,y[8]->4.6875,y[9]->3.94302,y[10]-
>3.41539,y[11]->3.10309,y[12]->3.}
a[n_]:=2/NN Sum[Th[j] y[j] T[n,t[j]],{j,0,NN}]
Y[t_]:=Sum[Th[n] a[n] T[n,t],{n,0,NN}]
YY[t_]:=Y[t]/.yer
***Numpy=YY[t]/.t->2x-3
```

$1.25051 \cdot 10^{-6} - 0.0000109741 x + 3.00004 x^2 - 0.000105696 x^3 + 0.000170811 x^4 -$   
 $0.000195094 x^5 + 0.000161479 x^6 - 0.0000975873 x^7 + 0.000042736 x^8 - 0.0000132259$   
 $x^9 + 2.74577 \cdot 10^{-6} x^{10} - 3.43348 \cdot 10^{-7} x^{11} + 1.95578 \cdot 10^{-8} x^{12}$

```
SekNum=Plot[Nummy,{x,0,1},PlotStyle->{Red,Thickness[0.005]},AxesLabel->{"x","y[x]"}]
```

```
sonlist=Table[{x,Anl[x]},{x,0,1,0.05}]
```

```
SekAnl=ListPlot[sonlist,PlotMarkers->{Automatic,15}]
```

```
Show[SekAnl,SekNum,PlotRange->All,AxesLabel->{"x","y[x]"}]
```

## EK A1

Anl [x\_]:= 3x^2

NN=12;

denk[NN]=y[NN]==3 ;denk[0]=Sum[d[0,j,1] y[j],{j,0,NN}]==3;

denk[k\_]:=Sum[d[k,j,2] y[j],{j,0,NN}]+Sum[d[k,j,1]

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

Numy=YY[t]/.t->2x-3

## EK A2

Anl[x\_]:=Sin[ x];

NN=8;

denk[0]=y[0]==1;denk[NN]=y[NN]==0;

denk[k\_]:=Sum[d[k,j,2] y[j],{j,0,NN}]+Sum[d[k,j,1]

y[j],{j,0,NN}]+y[k]==2Cos[Pi/4(t[k]+1)]

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->1.,y[1]->0.998213,y[2]->0.973658,y[3]->0.88475,y[4]->0.707107,y[5]-  
>0.466066,y[6]->0.228014,y[7]->0.0597493,y[8]->0.}

Numy=Y[t]/.t->(4/Pi)x-1

$-2.55351 \cdot 10^{-15} + 1. x + 7.4006 \cdot 10^{-7} x^2 - 0.166674 x^3 + 0.0000273502 x^4 + 0.00827633 x^5 + 0.0000674944 x^6 - 0.000244429 x^7 + 0.0000170593 x^8$

### EK A3

Anl[x\_]:=E^(2x)

NN=12;

denk[0]=y[NN]==1,denk[NN]=Sum[d[NN,j,7] y[j],{j,0,NN}]==128;

denk[NN-1]=Sum[d[NN,j,6] y[j],{j,0,NN}]==64,

denk[NN-2]=Sum[d[NN,j,5] y[j],{j,0,NN}]==32;

denk[NN-3]=Sum[d[NN,j,4] y[j],{j,0,NN}]==16,

denk[NN-4]=Sum[d[NN,j,3] y[j],{j,0,NN}]==8;

denk[NN-5]=Sum[d[NN,j,2] y[j],{j,0,NN}]==4 ;

denk[NN-6]=Sum[d[NN,j,1] y[j],{j,0,NN}]==2;

denk[k\_]:=Sum[d[k,j,8] y[j],{j,0,NN}]==256E^(2z[k])

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->7.39051,y[1]->7.1428,y[2]->6.46342,y[3]->5.51343,y[4]->4.48185,y[5]->3.5213,y[6]->2.71829,y[7]->2.09841,y[8]->1.64872,y[9]->1.3403,y[10]->1.14336,y[11]->1.03466,y[12]->1.}

Numy=Y[t]/.t->2x-1

1. +2. x+2. x<sup>2</sup>+1.33333 x<sup>3</sup>+0.666667 x<sup>4</sup>+0.266665 x<sup>5</sup>+0.0888968 x<sup>6</sup>+0.0253725 x<sup>7</sup>+0.00896094 x<sup>8</sup>-0.000334776 x<sup>9</sup>+0.00110514 x<sup>10</sup>-0.000201128 x<sup>11</sup>+0.0000497419 x<sup>12</sup>

## EK A4

Anl[x\_]:=Cos[ x]

NN=9;

denk[0]=y[NN]==1;denk[NN]=y[0]==-1;

denk[NN-1]=Sum[d[NN,j,1] y[j],{j,0,NN}]==0;denk[NN-2]=Sum[d[NN,j,2]

y[j],{j,0,NN}]==-1;denk[NN-3]=Sum[d[0,j,1] y[j],{j,0,NN}]==0;denk[NN-

4]=Sum[d[0,j,2] y[j],{j,0,NN}]==1;

denk[k\_]:=Sum[d[k,j,6] y[j],{j,0,NN}]+Sum[d[k,j,4] y[j],{j,0,NN}]==0

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->-1.,y[1]->-0.995513,y[2]->-0.933091,y[3]->-0.706548,y[4]->-0.268937,y[5]->0.269047,y[6]->0.706601,y[7]->0.933101,y[8]->0.995513,y[9]->1.}

Numy=Y[t]/.t->2/Pi x-1

1. +3.35287\*10<sup>-14</sup> x-0.5 x<sup>2</sup>-0.00485926 x<sup>3</sup>+0.0491354 x<sup>4</sup>-0.00386686 x<sup>5</sup>-  
0.000721806 x<sup>6</sup>+0.0000480501 x<sup>7</sup>+4.35715\*10<sup>-6</sup> x<sup>8</sup>-3.34196\*10<sup>-7</sup> x<sup>9</sup>

## EK A5

Anl[x\_]:=Sinh[2x]

NN=12;k1=0;k2=NN;k3=NN-1;k4=NN-2;k5=NN-3;k6=NN-4;k7=NN-5;k8=NN-6;

denk[k1]=y[0]==Sinh[2];denk[k2]=y[NN]==0;

denk[k3]=y[NN]+Sum[d[NN,j,1] y[j],{j,0,NN}]==2,denk[k4]=Sum[d[0,j,1]

y[j],{j,0,NN}]+y[0]==2Cosh[2]+Sinh[2];denk[k5]=y[NN]+Sum[d[NN,j,3]

y[j],{j,0,NN}]==8,denk[k6]=Sum[d[0,j,3] y[j],{j,0,NN}]+y[0]==8Cosh[2]+Sinh[2];

denk[k7]=Sum[d[NN,j,2] y[j],{j,0,NN}]==0 denk[k8]=Sum[d[0,j,2]

y[j],{j,0,NN}]==4Sinh[2];

Do[If[k!=k1 && k!=k2 && k!=k3 && k!=k4 && k!=k5 && k!=k6 && k!=k7

&& k!=k8,denk[k\_]:=Sum[d[k,j,8] y[j],{j,0,NN}]-Sum[d[k,j,2]

y[j],{j,0,NN}]==0],{k,0,NN}]

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->3.62686,y[1]->3.50075,y[2]->3.15391,y[3]->2.6658,y[4]->2.12928,y[5]-

>1.61864,y[6]->1.1752,y[7]->0.810931,y[8]->0.521095,y[9]->0.297099,y[10]-

>0.134376,y[11]->0.0340808,y[12]->0.}

YY[t]

1.1752 +1.54308 t+0.5876 t<sup>2</sup>+0.25718 t<sup>3</sup>+0.0489676 t<sup>4</sup>+0.0128585 t<sup>5</sup>+0.00163174

t<sup>6</sup>+0.000306451 t<sup>7</sup>+0.0000291856 t<sup>8</sup>+4.21205\*10<sup>-6</sup> t<sup>9</sup>+3.51054\*10<sup>-7</sup> t<sup>10</sup>+2.68731\*10<sup>-8</sup>

t<sup>11</sup>+5.39262\*10<sup>-9</sup> t<sup>12</sup>



## EK A6

Anl[x\_]:=Sin[x]+E^x

NN=12;k1=0;k2=NN;k3=NN-1;k4=NN-2;k5=NN-3;k6=NN-4;k7=NN-5;k8=NN-6;

denk[k1]=y[0]==1+E^(Pi/2)denk[k2]=y[NN]==1

denk[k3]=y[NN]+ Sum[d[0,j,1] y[j],{j,0,NN}]==1+E^(Pi/2),denk[k4]=

Sum[d[NN,j,1] y[j],{j,0,NN}]+y[0]==3+E^(Pi/2);denk[k5]=y[NN]+ Sum[d[0,j,2]

y[j],{j,0,NN}]==E^(Pi/2);denk[k6]= Sum[d[NN,j,2]

y[j],{j,0,NN}]+y[0]==2+E^(Pi/2);

denk[k7]=Sum[d[NN,j,3] y[j],{j,0,NN}]==0 denk[k8]=Sum[d[0,j,3]

y[j],{j,0,NN}]==E^(Pi/2);

Do[If[k!=k1 && k!= k2 && k!= k3 && k!= k4 && k!= k5 && k!= k6 && k!= k7  
&& k!=k8,denk[k\_]:=Sum[d[k,j,8] y[j],{j,0,NN}]-y[k]==0],{k,0,NN}]

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->5.81048,y[1]->5.68309,y[2]->5.32449,y[3]->4.7956,y[4]->4.17207,y[5]-  
>3.52297,y[6]->2.90039,y[7]->2.33963,y[8]->1.86366,y[9]->1.48666,y[10]-  
>1.21599,y[11]->1.05388,y[12]->1.}

Numy=Y[t]/.t->4/Pi x-1

1. +2. x+0.5 x<sup>2</sup>-3.87319\*10<sup>-9</sup> x<sup>3</sup>+0.0416673 x<sup>4</sup>+0.0166644 x<sup>5</sup>+0.00139258 x<sup>6</sup>-  
3.73529\*10<sup>-6</sup> x<sup>7</sup>+0.0000274976 x<sup>8</sup>+4.07064\*10<sup>-6</sup> x<sup>9</sup>+8.20019\*10<sup>-7</sup> x<sup>10</sup>-1.29683\*10<sup>-7</sup>  
x<sup>11</sup>+1.74377\*10<sup>-8</sup> x<sup>12</sup>

## EK B

```
Ay=Sinh[x];Az=Cosh[x];
T[n_,x_]:=ChebyshevT[n,x]
NN=12;
t[i_]:=Cos[i Pi/NN]
c[0]=2;c[i_]:=1;Th[0]=Th[NN]=1/2;Th[i_]:=1;
d[k_,j_,m_]:=Th[j]/NN Sum[Sum[If[EvenQ[n+1+m], n Th[n]/c[l] 1/((m-1)!2^(m-3))Product[n^2-(1+i)^2,{i,2-m,m-2,2}] T[n,t[j]] T[l,t[k]],0.],{l,0,n-m}],{n,0,NN}]
denk[NN]=y[NN]==0;denk[NN-1]= Sum[d[NN,j,1] y[j],{j,0,NN}]==1/2;denk[NN-2]= Sum[d[NN,j,2] y[j],{j,0,NN}]==0;denk[0]= Sum[d[NN,j,3] y[j],{j,0,NN}]==1/8;
Do[denk[k]=16Sum[d[k,j,4] y[j],{j,0,NN}]-2Sum[d[k,j,1] z[j],{j,0,NN}]==0,{k,1,NN-3}];
denk[2NN+1]=z[NN]==1;denk[2 NN]=Sum[d[NN,j,1] z[j],{j,0,NN}]==0;denk[2 NN-1]=Sum[d[NN,j,2] z[j],{j,0,NN}]==1/4;denk[2 NN-2]=Sum[d[NN,j,3] z[j],{j,0,NN}]==0;
Do[denk[NN+1+k]=16Sum[d[k,j,4] z[j],{j,0,NN}]-y[k]==Cosh[(t[k]+1)/2]-Sinh[(t[k]+1)/2],{k,0,NN-4}]
i=0;
While[i<= 2 NN+1,m[i]=If[i<=NN,y[i],z[i-(NN+1)]];
i=i+1]
CM=Table[Coefficient[denk[i][[1]],m[j]],{i,0,2 NN+1},{j,0,2 NN+1}]
right=Table[denk[i][[2]],{i,0,2NN+1}]
sol=Inverse[CM].right
yer=Table[m[i]->sol[[i+1]],{i,0,2NN+1}]
{y[0]->1.1752,y[1]->1.14908,y[2]->1.07439,y[3]->0.961038,y[4]->0.822317,y[5]->0.671798,y[6]->0.521095,y[7]->0.379132,y[8]->0.252612,y[9]->0.146971,y[10]->0.0670374,y[11]->0.0170379,y[12]->0.,z[0]->1.54308,z[1]->1.52328,z[2]-
```

>1.46776,z[3]->1.38694,z[4]->1.29468,z[5]->1.2047,z[6]->1.12763,z[7]-  
 >1.06946,z[8]->1.03141,z[9]->1.01074,z[10]->1.00224,z[11]->1.00015,z[12]->1.}

ya[n\_]:=2/NN Sum[Th[j] y[j] T[n,t[j]],{j,0,NN}]

Table[ya[1],{1,0,4}]/.yer

{za[0],za[1],za[2],za[3],za[4]}

za[n\_]:=2/NN Sum[Th[j] z[j] T[n,t[j]],{j,0,NN}]

Y[t\_]:=Sum[Th[n] ya[n] T[n,t],{n,0,NN}]

Z[t\_]:=Sum[Th[n] za[n] T[n,t],{n,0,NN}]

YY[t\_]:=Y[t]/.yer

ZZ[t\_]:=Z[t]/.yer

ExpandAll[YY[t]]

0.521095 +0.563813 t+0.0651369 t<sup>2</sup>+0.0234921 t<sup>3</sup>+0.00135701 t<sup>4</sup>+0.000294269  
 t<sup>5</sup>+0.0000117959 t<sup>6</sup>+4.67613\*10<sup>-7</sup> t<sup>7</sup>-1.24131\*10<sup>-6</sup> t<sup>8</sup>+1.10267\*10<sup>-6</sup> t<sup>9</sup>+1.22725\*10<sup>-6</sup>  
 t<sup>10</sup>-3.34515\*10<sup>-7</sup> t<sup>11</sup>-3.98883\*10<sup>-7</sup> t<sup>12</sup>

ExpandAll[ZZ[t]]

1.12763 +0.260548 t+0.140953 t<sup>2</sup>+0.0108561 t<sup>3</sup>+0.00293653 t<sup>4</sup>+0.000135702  
 t<sup>5</sup>+0.0000244707 t<sup>6</sup>+8.08595\*10<sup>-7</sup> t<sup>7</sup>+1.10291\*10<sup>-7</sup> t<sup>8</sup>+1.84158\*10<sup>-9</sup> t<sup>9</sup>-7.90664\*10<sup>-10</sup>  
 t<sup>10</sup>+4.65169\*10<sup>-10</sup> t<sup>11</sup>+3.40416\*10<sup>-10</sup> t<sup>12</sup>

Numy=YY[t]/.t->2 x-1

ExpandAll[Numy]

4.39648\*10<sup>-14</sup>+1. x-3.43683\*10<sup>-7</sup> x<sup>2</sup>+0.166677 x<sup>3</sup>-0.000142755 x<sup>4</sup>+0.00940366 x<sup>5</sup>-  
 0.00481007 x<sup>6</sup>+0.0138687 x<sup>7</sup>-0.0251369 x<sup>8</sup>+0.0297913 x<sup>9</sup>-0.0219334  
 x<sup>10</sup>+0.00911786 x<sup>11</sup>-0.00163382 x<sup>12</sup>

Numz=ZZ[t]/.t->2 x-1

ExpandAll[Numz]

1. -4.21163\*10<sup>-12</sup> x+0.5 x<sup>2</sup>-1.13252\*10<sup>-8</sup> x<sup>3</sup>+0.0416658 x<sup>4</sup>+1.86771\*10<sup>-6</sup>  
 x<sup>5</sup>+0.00138736 x<sup>6</sup>-3.66891\*10<sup>-6</sup> x<sup>7</sup>+0.000038372 x<sup>8</sup>-0.0000202543  
 x<sup>9</sup>+0.0000169574 x<sup>10</sup>-7.41341\*10<sup>-6</sup> x<sup>11</sup>+1.39435\*10<sup>-6</sup> x<sup>12</sup>

```
sonlist=Table[{x,Anl[x]},{x,0,1,0.07}]
```

```
sonlist1=Table[{x,Anl1[x]},{x,0,1,0.07}]
```

## EK C

Not:Programda \*\*\*ile verilen ifadeler her program için farklı değerler almaktadır.

Diğer ifadeler ise her programda ortak olduğu için sadece bu programda verilecektir.

```
NewtonRaphson[g_,bas_,tol_,adim_]:=
Block[{c,uz1,unk,jac,hata,i,yer,fx,jacx,y},
uz1=Length[bas];
unk=Table[y[i],{i,0,uz1}];
jac=Table[D[g[[i]],unk[[j]]],{i,1,uz1},{j,1,uz1}];
hata=10^10;c[0]=bas;i=1;
Print["J=",jac];
While[hata>=tol && i<= adim,
yer=Table[unk[[j]]->c[i-1][[j]],{j,1,uz1}];
fx=g/.yer;jacx=jac/.yer;
c[i]=N[c[i-1]-Inverse[jacx].fx];
hata=Norm[c[i]-c[i-1]];
Print[StringForm["`. adimda ulasilan kokler=`", norm hata=`",i,c[i],hata]];
i=i+1];
i=i-1;
If[i>= adim,Print[StringForm["itn=`", ` Maximum iterasyon gecildi",i,adim]]];
Print[StringForm["`. adimda ulasilan kok=`", fonk=`", norm hata=`",i,c[i],fx=g/.Table[unk[[j]]->c[i][[j]],{j,1,uz1}],hata]];
Return[c[i]]
Anl[x_]:=Sin[2 x]
T[n_,x_]:=ChebyshevT[n,x]
t[i_]:=Cos[i Pi/NN]
```

```

c[0]=2;c[i_]:=1;Th[0]=Th[NN]=1/2;Th[i_]:=1;
*** NN=12;
d[k_,j_,m_]:=Th[j]/NN Sum[Sum[If[OddQ[n+1+m], 1/((m-1)!2^(m-3))
Product[n^2-(i)^2,{i,2-m,m+2}] T[n,t[j]] T[1,t[k]],0.],{1,0,n-m}],{n,1,NN-1}]
*** denk[NN]=y[NN]; denk[NN/2]=Sum[d1[NN,j] y[j],{j,0,NN}]-1
*** denk[k_]:=4(Sum[d2[k,j] y[j],{j,0,NN}])-(y[k])^3+19/4 y[k]-1/4Sin[3 t[k]+3]
*** bas=Table[1,{i,1,NN-1}];bas=Insert[bas,1.,NN/2+1];bas=Insert[bas,0.,-1];
denklemler=Table[denk[i],{i,0,NN}];
sol=NewtonRaphson[denklemler,bas,10^(-5),100]
***yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]
{y[0]->0.909297,y[1]->0.922947,y[2]->0.956736,y[3]->0.990724,y[4]-
>0.997495,y[5]->0.951729,y[6]->0.841471,y[7]->0.67516,y[8]->0.479426,y[9]-
>0.288723,y[10]->0.133574,y[11]->0.0340676,y[12]->0.}
a[n_]:=2/NN Sum[Th[j] y[j] T[n,t[j]],{j,0,NN}]
Y[t_]:=Sum[Th[n] a[n] T[n,t],{n,0,NN}]
YY[t_]:=Y[t]/.yer
***Numpy=YY[t]/.t->2x-1
4.45644*10^-13+2. x+3.06248*10^-10 x^2-1.33333 x^3+1.34355*10^-7 x^4+0.266666
x^5+4.61786*10^-6 x^6-0.0254105 x^7+0.0000272257 x^8+0.00137407 x^9+0.0000337975
x^10-0.0000716454 x^11+7.42481*10^-6 x^12

```

## EK C1

NN=12;

denk[NN]=y[NN]; denk[NN/2]=Sum[d1[NN,j] y[j],{j,0,NN}]-1

denk[k\_]:=4(Sum[d2[k,j] y[j],{j,0,NN}])-(y[k])^3+19/4 y[k]-1/4Sin[3 t[k]+3]

bas=Table[1,{i,1,NN-1}];bas=Insert[bas,1.,NN/2+1];bas=Insert[bas,0.,-1];

sol=NewtonRaphson[denklemler,bas,10^(-5),100]

\*\*\*yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->0.909297,y[1]->0.922947,y[2]->0.956736,y[3]->0.990724,y[4]-  
>0.997495,y[5]->0.951729,y[6]->0.841471,y[7]->0.67516,y[8]->0.479426,y[9]-  
>0.288723,y[10]->0.133574,y[11]->0.0340676,y[12]->0.}

Numy=YY[t]/.t->2x-1

4.45644\*10<sup>-13</sup>+2. x+3.06248\*10<sup>-10</sup> x<sup>2</sup>-1.33333 x<sup>3</sup>+1.34355\*10<sup>-7</sup> x<sup>4</sup>+0.266666  
x<sup>5</sup>+4.61786\*10<sup>-6</sup> x<sup>6</sup>-0.0254105 x<sup>7</sup>+0.0000272257 x<sup>8</sup>+0.00137407 x<sup>9</sup>+0.0000337975  
x<sup>10</sup>-0.0000716454 x<sup>11</sup>+7.42481\*10<sup>-6</sup> x<sup>12</sup>

## EK C2

Anl[x\_]:=Cos[ x]

NN=12;

denk[0]=y[0];denk[NN]=y[NN]-1;

denk[k\_]:= Sum[d2[k,j] y[j],{j,0,NN}]+ (Sum[d1[k,j]  
y[j],{j,0,NN}])+Cos[+(Pi/4)(t[i]+1)](1+2Sin[+(Pi/4)(t[i]+1)])

bas=Table[1.,{i,1,NN-1}];bas=Insert[bas,0,1];bas=Insert[bas,-1,-1];

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->0.,y[1]->0.0267586,y[2]->0.105029,y[3]->0.228014,y[4]->0.382683,y[5]-  
>0.549798,y[6]->0.707107,y[7]->0.835298,y[8]->0.92388,y[9]->0.973658,y[10]-  
>0.994469,y[11]->0.999642,y[12]->1.}

Numy=YY[t]/.t->(4/(Pi))x-1

1. -8.30003\*10<sup>-13</sup> x-0.5 x<sup>2</sup>+1.64992\*10<sup>-10</sup> x<sup>3</sup>+0.0416667 x<sup>4</sup>+6.41322\*10<sup>-9</sup> x<sup>5</sup>-  
0.00138891 x<sup>6</sup>+3.23122\*10<sup>-8</sup> x<sup>7</sup>+0.000024763 x<sup>8</sup>+3.05808\*10<sup>-8</sup> x<sup>9</sup>-2.91336\*10<sup>-7</sup>  
x<sup>10</sup>+4.92853\*10<sup>-9</sup> x<sup>11</sup>+1.3319\*10<sup>-9</sup> x<sup>12</sup>



### EK C3

Anl[x\_]:=Sinh[x]

NN=12;k1=NN;k2=NN-1;k3=NN-2;k4=NN-3;k5=NN-4;k6=NN-5;k7=1;k8=0;

denk[k1]= y[NN];

denk[k2]=(Sum[d[NN,j,1] y[j],{j,0,NN}])-1;

denk[k3]=(Sum[d[NN,j,2] y[j],{j,0,NN}]);

denk[k4]=(Sum[d[NN,j,3] y[j],{j,0,NN}])-1;

denk[k5]=(Sum[d[NN,j,4] y[j],{j,0,NN}]);

denk[k6]=(Sum[d[NN,j,5] y[j],{j,0,NN}])-1;

denk[k7]=(Sum[d[NN,j,6] y[j],{j,0,NN}]);

denk[k8]=(Sum[d[NN,j,7] y[j],{j,0,NN}])-1;

Do[If[k!=k1 && k!=k2 && k!=k3 && k!=k4&& k!=k5 && k!=k6 && k!=k7&& k!=k8,denk[k]= (Sum[d[k,j,8] y[j],{j,0,NN}])+y[k](Sum[d[k,j,1] y[j],{j,0,NN}]) - Sinh[(t[k]+1)/2](1+Cosh[(t[k]+1)/2]),{k,0,NN}]

bas=Table[1.,{i,1,NN-1}];

bas=Insert[bas,1,1];bas=Insert[bas,0,-1]

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->1.1752,y[1]->1.14908,y[2]->1.07439,y[3]->0.961038,y[4]->0.822317,y[5]->0.671798,y[6]->0.521095,y[7]->0.379132,y[8]->0.252612,y[9]->0.146971,y[10]->0.0670374,y[11]->0.0170379,y[12]->0.}

YY[t\_]:=Y[t]/.yer

Numy=YY[t]/.t->2x-1

$3.88578 \cdot 10^{-15} + 1. x + 4.99045 \cdot 10^{-14} x^2 + 0.166667 x^3 - 2.83329 \cdot 10^{-13} x^4 + 0.00833333 x^5 - 6.94664 \cdot 10^{-10} x^6 + 0.000198416 x^7 + 1.42552 \cdot 10^{-7} x^8 + 2.64187 \cdot 10^{-6} x^9 + 5.97053 \cdot 10^{-8} x^{10} + 5.92991 \cdot 10^{-9} x^{11} + 3.16262 \cdot 10^{-9} x^{12}$

## EK C4

Anl[x\_]:=E^x

NN=14;k1=0;k2=NN;k3=NN-1;k4=NN-2;k5=NN-3;k6=NN-4;k7=NN-5;k8=NN-6;k9=NN-7;k10=NN-8

denk[k1]=y[0]-E;denk[k2]= y[NN]-1;

denk[k3]=(Sum[d[NN,j,2] y[j],{j,0,NN}])-1;denk[k4]=(Sum[d[0,j,2] y[j],{j,0,NN}])-E;

denk[k5]=(Sum[d[NN,j,4] y[j],{j,0,NN}])-1;denk[k6]=(Sum[d[0,j,4] y[j],{j,0,NN}])-E;

denk[k7]=(Sum[d[NN,j,6] y[j],{j,0,NN}])-1;denk[k8]=(Sum[d[0,j,6] y[j],{j,0,NN}])-E;

denk[k9]=(Sum[d[NN,j,8] y[j],{j,0,NN}])-1denk[k10]=(Sum[d[0,j,8] y[j],{j,0,NN}])-E;

Do[If[k!=k1 && k!= k2 && k!= k3 && k!= k4 && k!=k5 && k!= k6 && k!= k7 && k!= k8 && k!= k9 && k!= k10 ,denk[k]=(Sum[d[k,j,10] y[j],{j,0,NN}]) - E^(-(t[k]+1)/2)y[k]^2},{k,0,NN}]

bas=Table[1.,{i,1,NN-9}]bas=Insert[bas,N[E],1]bas=Insert[bas,N[E]/256,k9]bas=Insert[bas,1/256,k8]bas=Insert[bas,N[E]/64,k7];bas=Insert[bas,1/64,k6]bas=Insert[bas,N[E]/16,k5]bas=Insert[bas,1/16,k4]bas=Insert[bas,N[E]/4,k3]bas=Insert[bas,1/4,k2]bas=Insert[bas,1,-1];

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->2.71828,y[1]->2.68395,y[2]->2.58513,y[3]->2.43338,y[4]->2.24522,y[5]->2.03895,y[6]->1.8316,y[7]->1.63684,y[8]->1.46395,y[9]->1.31794,y[10]->1.2005,y[11]->1.11125,y[12]->1.04892,y[13]->1.01215,y[14]->1.}

ExpandAll[YY[t]]

Numy=YY[t]/.t->2x-1

1. +0.962563 x+0.5 x<sup>2</sup>+0.228804 x<sup>3</sup>+0.0416667 x<sup>4</sup>-0.0235478 x<sup>5</sup>+0.00138893 x<sup>6</sup>+0.00920253 x<sup>7</sup>+0.0000254311 x<sup>8</sup>-0.0034416 x<sup>9</sup>+0.00241329 x<sup>10</sup>-0.00105679 x<sup>11</sup>+0.00031715 x<sup>12</sup>-0.0000583881 x<sup>13</sup>+4.97699\*10<sup>-6</sup> x<sup>14</sup>

## EK C5

Anl[x\_]:=Sin[x]^2

denk[k1]=y[0]+(4/Pi)^4Sum[d[0,j,4] y[j],{j,0,NN}]-9;

denk[k2]=y[NN]+(4/Pi)^4Sum[d[NN,j,4] y[j],{j,0,NN}]+8;

denk[k3]=y[NN]+(4/Pi) Sum[d[NN,j,1] y[j],{j,0,NN}];denk[k4]=(4/Pi) Sum[d[0,j,1]

y[j],{j,0,NN}]+y[0]-1;denk[k5]=y[NN]+(4/Pi)^2 Sum[d[NN,j,2] y[j],{j,0,NN}]-

2;denk[k6]=(4/Pi)^2 Sum[d[0,j,2]

y[j],{j,0,NN}]+y[0]+1;denk[k7]=y[NN]+(4/Pi)^3Sum[d[NN,j,3] y[j],{j,0,NN}];

Do[If[k!=k1 && k!= k2 && k!= k3 && k!= k4 && k!= k5 && k!= k6 && k!=

k7,denk[k]=(4/Pi)^7(Sum[d[k,j,7] y[j],{j,0,NN}]) +128 Sqrt[y[k]]Cos

[Pi/4(t[k]+1)],{k,0,NN}]

bas=Table[1.,{i,1,NN-4}];

bas=Insert[bas,0,k6];

bas=Insert[bas,-1,k5];

bas=Insert[bas,+2,k4];

bas=Insert[bas,0,k2];

bas=Insert[bas,0,-1];

yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]

{y[0]->0.999473,y[1]->0.998445,y[2]->0.983951,y[3]->0.927696,y[4]-

>0.803088,y[5]->0.610651,y[6]->0.389511,y[7]->0.197404,y[8]->0.0732728,y[9]-

>0.0174422,y[10]->0.00321841,y[11]->0.00228032}

YY[t\_]:=Y[t]/.yer

ExpandAll[YY[t]]

0.500058 +0.783452 t+0.00116445 t<sup>2</sup>-0.322236 t<sup>3</sup>-0.00043498 t<sup>4</sup>+0.0396331

t<sup>5</sup>+0.0000985974 t<sup>6</sup>-0.00233696 t<sup>7</sup>-5.9394\*10<sup>-6</sup> t<sup>8</sup>+0.0000859315 t<sup>9</sup>-3.05772\*10<sup>-6</sup> t<sup>10</sup>-

1.0373\*10<sup>-6</sup> t<sup>11</sup>

Numy=YY[t]/.t->4/Pi x-1

ExpandAll[Numy]

$$0.00228032 - 0.00228032 x + 0.99886 x^2 - 0.000380054 x^3 - 0.333428 x^4 + 0.00474032 x^5 + 0.0379606 x^6 + 0.00449543 x^7 - 0.00515091 x^8 + 0.000522874 x^9 + 0.0000935233 x^{10} - 0.0000147882 x^{11}$$

## EK C6

Anl[x\_]:=Sin[x]-Cos[x]

NN=12;k1=0;k2=NN;k3=NN-1;k4=NN-2;k5=NN-3;k6=NN-4;k7=NN-5;k8=NN-6;k9=NN-7;k10=NN-8;k11=NN-9;k12=NN-10;

denk[k1]=(4/Pi)^6Sum[d[NN,j,6] y[j],{j,0,NN}]-1;

denk[k2]=(4/Pi)^6Sum[d[0,j,6] y[j],{j,0,NN}]+1;

denk[k3]=-(4/Pi) Sum[d[0,j,1] y[j],{j,0,NN}]+y[NN]+2;

denk[k4]=-(4/Pi) Sum[d[NN,j,1] y[j],{j,0,NN}]+y[0];denk[k5]=y[NN]+(4/Pi)^2

Sum[d[0,j,2] y[j],{j,0,NN}]+2;denk[k6]=(4/Pi)^2 Sum[d[NN,j,2]

y[j],{j,0,NN}]+y[0]-2;denk[k7]=(4/Pi)^4Sum[d[NN,j,4]

y[j],{j,0,NN}]+1;denk[k8]=(4/Pi)^4Sum[d[0,j,4] y[j],{j,0,NN}]-1;

denk[k9]=(4/Pi)^3Sum[d[NN,j,3] y[j],{j,0,NN}]+1;

denk[k10]=(4/Pi)^3Sum[d[0,j,3] y[j],{j,0,NN}]+1;

denk[k11]=(4/Pi)^5Sum[d[NN,j,5] y[j],{j,0,NN}]-1;

denk[k12]=(4/Pi)^5Sum[d[0,j,5] y[j],{j,0,NN}]-1;

Do[If[k!=k1 && k!= k2 && k!= k3 && k!= k4 && k!=k5 && k!= k6 && k!= k7 && k!= k8 && k!= k9 && k!= k10 && k!= k11&& k!= k12,denk[k]=

(4/Pi)^12(Sum[d[k,j,12] y[j],{j,0,NN}]) -(4/Pi)y[k](Sum[d[k,j,1] y[j],{j,0,NN}])+(4/Pi)^2Sum[d[k,j,2] y[j],{j,0,NN}]-Cos[Pi/2(t[k]+1)],{k,0,NN}]

bas=Table[1.,{i,1,NN-8}];

bas=Insert[bas,1,1];

bas=Insert[bas,-1,k11];

bas=Insert[bas,-1,k10];

bas=Insert[bas,-1,k8];

bas=Insert[bas,2,k7];

bas=Insert[bas,-2,k6];

bas=Insert[bas,0,k5];

bas=Insert[bas,-2,k4];

```
bas=Insert[bas,-1,-1];
```

```
yer=Table[y[i]->sol[[i+1]],{i,0,NN}]
```

```
{y[0]->1.,y[1]->0.972883,y[2]->0.88944,y[3]->0.745643,y[4]->0.541196,y[5]-  
>0.2855,y[6]->-4.88469*10-8,y[7]->-0.2855,y[8]->-0.541196,y[9]->-0.745643,y[10]-  
>-0.88944,y[11]->-0.972883,y[12]->-1.}
```

```
YY[t_]:=Y[t]/.yer
```

```
ExpandAll[YY[t]]
```

```
-4.88469*10-8+1.11072 t+5.12788*10-9 t2-0.114191 t3+6.15255*10-9 t4+0.00352195  
t5-4.92279*10-9 t6-0.0000517273 t7+2.6375*10-9 t8+4.43254*10-7 t9-8.20594*10-10  
t10-2.45486*10-9 t11+1.11896*10-10 t12
```

```
Numy=YY[t]/.t->4/Pi x-1
```

```
ExpandAll[Numy]
```

```
-1.+1. x+0.5 x2-0.166667 x3-0.0416667 x4+0.00833333 x5+0.00138889 x6-  
0.000198496 x7-0.0000246101 x8+2.56634*10-6 x9+3.75861*10-7 x10-5.41405*10-8  
x11+2.03113*10-9 x12
```

## EK D

```
NewtonRaphson[g_,bas_,tol_,adim_]:=
Block[{uz1,unk,jac,hata,i,yer,fx,jacx,y},
uz1=Length[bas];
unk=Table[m[i],{i,0,uz1}];
jac=Table[D[g[[i]],unk[[j]],{i,1,uz1},{j,1,uz1}];
hata=10^10;c[0]=bas;i=1;
Print["J=",jac];
While[hata>=tol && i<= adim,
yer=Table[unk[[j]]->c[i-1][[j]],{j,1,uz1}];
fx=g/.yer;jacx=jac/.yer;
c[i]=N[c[i-1]-Inverse[jacx].fx];
hata=Norm[c[i]-c[i-1]];
Print[StringForm["`. adimda ulasilan kokler=` , norm hata=` ",i,c[i],hata]];
i=i+1];
i=i-1;
If[i>= adim,Print[StringForm["itn=` , ` Maximum iterasyon gecildi",i,adim]]];
Print[StringForm["`. adimda ulasilan kok=` , fonk=` , norm hata=`
",i,c[i],fx=g/.Table[unk[[j]]->c[i][[j]],{j,1,uz1}],hata]];
Return[c[i]]
Ay=Sin[x];Az=Cos[x];
T[n_,x_]:=ChebyshevT[n,x]
NN=12;
t[i_]:=Cos[i Pi/NN]
c[0]=2;c[i_]:=1;Th[0]=Th[NN]=1/2;Th[i_]:=1;
```

```

d[k_,j_,m_]:=Th[j]/NN Sum[Sum[If[EvenQ[n+1+m], n Th[n]/c[1] 1/((m-1)!2^(m-
3))Product[n^2-(1+i)^2,{i,2-m,m-2,2}] T[n,t[j]] T[1,t[k]],0.],{1,0,n-m}],{n,0,NN}]

denk[NN]=y[NN];

denk[NN-1]=2Sum[d[NN,j,1] y[j],{j,0,NN}]-1;

denk[NN-2]=4Sum[d[NN,j,2] y[j],{j,0,NN}];

denk[NN-3]=8Sum[d[NN,j,3] y[j],{j,0,NN}]+1;

Do[denk[k]=16Sum[d[k,j,4] y[j],{j,0,NN}]- (z[k])^2-
Sin[(t[k]+1)/2]+(Cos[(t[k]+1)/2])^2,{k,0,NN-4}];

denk[2 NN+1]=z[NN]-1;

denk[2 NN]=2Sum[d[NN,j,1] z[j],{j,0,NN}];

denk[2 NN-1]=4Sum[d[NN,j,2] z[j],{j,0,NN}]+1;

denk[2 NN-2]=8Sum[d[NN,j,3] z[j],{j,0,NN}];

Do[denk[NN+1+k]=16 Sum[d[k,j,4] z[j],{j,0,NN}]-y[k]Sum[d[k,j,1] y[j],{j,0,NN}]-
Cos[(t[k]+1)/2](1-Sin[(t[k]+1)/2]),{k,0,NN-4}];

bas=Table[1.,{i,1,2NN-6}];

bas=Insert[bas,-1/8,NN-2];

bas=Insert[bas,0,NN-1];

bas=Insert[bas,1/2,NN];

bas=Insert[bas,0,NN+1];

bas=Insert[bas,0,2NN-1];

bas=Insert[bas,-1/4,2NN];

bas=Insert[bas,0,2NN+1];

bas=Insert[bas,1,2NN+2];

bas

{1.,1.,1.,1.,1.,1.,1.,1.,1.,1.,-(1/8),0,1/2,0,1.,1.,1.,1.,1.,1.,1.,1.,1.,0,-(1/4),0,1}

i=0;

While[i<= 2 NN+1,m[i]=If[i<=NN,y[i],z[i-(NN+1)]];

```



```

i=i+1]

denklemler=Table[denk[i],{i,0,2 NN+1}]

sol=NewtonRaphson[denklemler,bas,2 10^(-3),100]

yer=Table[m[i]->sol[[i+1]],{i,0,2NN+1}]

{y[0]->0.841469,y[1]->0.832142,y[2]->0.803416,y[3]->0.75362,y[4]-
>0.681639,y[5]->0.588668,y[6]->0.479426,y[7]->0.362166,y[8]->0.247404,y[9]-
>0.145924,y[10]->0.0669372,y[11]->0.0170363,y[12]->0.,z[0]->0.536511,z[1]-
>0.55107,z[2]->0.592703,z[3]->0.655548,z[4]->0.730752,z[5]->0.807979,z[6]-
>0.877455,z[7]->0.932085,z[8]->0.968908,z[9]->0.989296,z[10]->0.997757,z[11]-
>0.999855,z[12]->1.}

ya[n_]:=2/NN Sum[Th[j] y[j] T[n,t[j]],{j,0,NN}]
za[n_]:=2/NN Sum[Th[j] z[j] T[n,t[j]],{j,0,NN}]
Y[t_]:=Sum[Th[n] ya[n] T[n,t],{n,0,NN}]
Z[t_]:=Sum[Th[n] za[n] T[n,t],{n,0,NN}]
YY[t_]:=Y[t]/.yer
ZZ[t_]:=Z[t]/.yer

YY[t]
0.449926 +0.42522 t-0.0293452 (-1+2 t^2)-0.00450007 (-3 t+4 t^3)+0.000153989 (1-8
t^2+8 t^4)+0.0000140914 (5 t-20 t^3+16 t^5)-3.32358*10^-7 (-1+18 t^2-48 t^4+32 t^6)-
2.24131*10^-8 (-7 t+56 t^3-112 t^5+64 t^7)+3.62689*10^-10 (1-32 t^2+160 t^4-256 t^6+128
t^8)+4.75998*10^-11 (9 t-120 t^3+432 t^5-576 t^7+256 t^9)+3.66659*10^-12 (-1+50 t^2-400
t^4+1120 t^6-1280 t^8+512 t^10)-1.31672*10^-13 (-11 t+220 t^3-1232 t^5+2816 t^7-2816
t^9+1024 t^11)-9.48778*10^-15 (1-72 t^2+840 t^4-3584 t^6+6912 t^8-6144 t^10+2048 t^12)

ZZ[t]
0.822639 -0.23387 t-0.0545998 (-1+2 t^2)+0.00213752 (-3 t+4 t^3)+0.000216993 (1-8
t^2+8 t^4)-0.0000119393 (5 t-20 t^3+16 t^5)-3.92656*10^-8 (-1+18 t^2-48 t^4+32
t^6)+3.68795*10^-8 (-7 t+56 t^3-112 t^5+64 t^7)-1.81665*10^-9 (1-32 t^2+160 t^4-256 t^6+128
t^8)-9.99407*10^-11 (9 t-120 t^3+432 t^5-576 t^7+256 t^9)+6.8578*10^-12 (-1+50 t^2-400
t^4+1120 t^6-1280 t^8+512 t^10)+9.87173*10^-14 (-11 t+220 t^3-1232 t^5+2816 t^7-2816
t^9+1024 t^11)+7.77156*10^-16 (1-72 t^2+840 t^4-3584 t^6+6912 t^8-6144 t^10+2048 t^12)

```

Numy=YY[t]/.t->2 x-1

0.449926 +0.42522 (-1+2 x)-0.0293452 (-1+2 (-1+2 x)<sup>2</sup>)-0.00450007 (-3 (-1+2 x)+4 (-1+2 x)<sup>3</sup>)+0.000153989 (1-8 (-1+2 x)<sup>2</sup>+8 (-1+2 x)<sup>4</sup>)+0.0000140914 (5 (-1+2 x)-20 (-1+2 x)<sup>3</sup>+16 (-1+2 x)<sup>5</sup>)-3.32358\*10<sup>-7</sup> (-1+18 (-1+2 x)<sup>2</sup>-48 (-1+2 x)<sup>4</sup>+32 (-1+2 x)<sup>6</sup>)-2.24131\*10<sup>-8</sup> (-7 (-1+2 x)+56 (-1+2 x)<sup>3</sup>-112 (-1+2 x)<sup>5</sup>+64 (-1+2 x)<sup>7</sup>)+3.62689\*10<sup>-10</sup> (1-32 (-1+2 x)<sup>2</sup>+160 (-1+2 x)<sup>4</sup>-256 (-1+2 x)<sup>6</sup>+128 (-1+2 x)<sup>8</sup>)+4.75998\*10<sup>-11</sup> (9 (-1+2 x)-120 (-1+2 x)<sup>3</sup>+432 (-1+2 x)<sup>5</sup>-576 (-1+2 x)<sup>7</sup>+256 (-1+2 x)<sup>9</sup>)+3.66659\*10<sup>-12</sup> (-1+50 (-1+2 x)<sup>2</sup>-400 (-1+2 x)<sup>4</sup>+1120 (-1+2 x)<sup>6</sup>-1280 (-1+2 x)<sup>8</sup>+512 (-1+2 x)<sup>10</sup>)-1.31672\*10<sup>-13</sup> (-11 (-1+2 x)+220 (-1+2 x)<sup>3</sup>-1232 (-1+2 x)<sup>5</sup>+2816 (-1+2 x)<sup>7</sup>-2816 (-1+2 x)<sup>9</sup>+1024 (-1+2 x)<sup>11</sup>)-9.48778\*10<sup>-15</sup> (1-72 (-1+2 x)<sup>2</sup>+840 (-1+2 x)<sup>4</sup>-3584 (-1+2 x)<sup>6</sup>+6912 (-1+2 x)<sup>8</sup>-6144 (-1+2 x)<sup>10</sup>+2048 (-1+2 x)<sup>12</sup>)

Numz=ZZ[t]/.t->2 x-1

0.822639 -0.23387 (-1+2 x)-0.0545998 (-1+2 (-1+2 x)<sup>2</sup>)+0.00213752 (-3 (-1+2 x)+4 (-1+2 x)<sup>3</sup>)+0.000216993 (1-8 (-1+2 x)<sup>2</sup>+8 (-1+2 x)<sup>4</sup>)-0.0000119393 (5 (-1+2 x)-20 (-1+2 x)<sup>3</sup>+16 (-1+2 x)<sup>5</sup>)-3.92656\*10<sup>-8</sup> (-1+18 (-1+2 x)<sup>2</sup>-48 (-1+2 x)<sup>4</sup>+32 (-1+2 x)<sup>6</sup>)+3.68795\*10<sup>-8</sup> (-7 (-1+2 x)+56 (-1+2 x)<sup>3</sup>-112 (-1+2 x)<sup>5</sup>+64 (-1+2 x)<sup>7</sup>)-1.81665\*10<sup>-9</sup> (1-32 (-1+2 x)<sup>2</sup>+160 (-1+2 x)<sup>4</sup>-256 (-1+2 x)<sup>6</sup>+128 (-1+2 x)<sup>8</sup>)-9.99407\*10<sup>-11</sup> (9 (-1+2 x)-120 (-1+2 x)<sup>3</sup>+432 (-1+2 x)<sup>5</sup>-576 (-1+2 x)<sup>7</sup>+256 (-1+2 x)<sup>9</sup>)+6.8578\*10<sup>-12</sup> (-1+50 (-1+2 x)<sup>2</sup>-400 (-1+2 x)<sup>4</sup>+1120 (-1+2 x)<sup>6</sup>-1280 (-1+2 x)<sup>8</sup>+512 (-1+2 x)<sup>10</sup>)+9.87173\*10<sup>-14</sup> (-11 (-1+2 x)+220 (-1+2 x)<sup>3</sup>-1232 (-1+2 x)<sup>5</sup>+2816 (-1+2 x)<sup>7</sup>-2816 (-1+2 x)<sup>9</sup>+1024 (-1+2 x)<sup>11</sup>)+7.77156\*10<sup>-16</sup> (1-72 (-1+2 x)<sup>2</sup>+840 (-1+2 x)<sup>4</sup>-3584 (-1+2 x)<sup>6</sup>+6912 (-1+2 x)<sup>8</sup>-6144 (-1+2 x)<sup>10</sup>+2048 (-1+2 x)<sup>12</sup>)

## ÖZGEÇMİŞ



**Ad-Soyad** : Soner AYDINLIK  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 07.06.1991, İSTANBUL  
**E-posta** : aydinliks@itu.edu.tr

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Yüksek Lisans** : 2015, İTÜ, Matematik Mühendisliği, Matematik Mühendisliği
- **Lisans** : 2014, İTÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği
- **Lisans** : 2014, Açıköğretim İşletme Fakültesi, İşletme Bölümü

### MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2015- Işık Üniversitesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışıyor.
- 2015 Özyeğin Üniversitesi Part-Time Öğretim Elemanı olarak bir dönem çalıştı.
- 2012-2013 İstanbul Teknik Üniversitesi Öğrenci Asistanlığı yaptı.
- 2011-2014 Uğur Dershanesi Stajyer Matematik Öğretmeni olarak çalıştı.