

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ TABAKALI ELASTİK BİR ORTAMDA NONLİNEER SH  
DALGALARININ HARMONİK REZONANS İNCELEMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Neşe ÖZDEMİR**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**MAYIS 2015**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ TABAKALI ELASTİK BİR ORTAMDA NONLİNEER SH  
DALGALARININ HARMONİK REZONANS İNCELEMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Neşe ÖZDEMİR  
509121053**

**Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Matematik Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Semra AHMETOLAN**

**MAYIS 2015**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509121053 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Neşe ÖZDEMİR**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**İki Tabakalı Elastik Bir Ortamda Nonlineer SH Dalgalarının Harmonik Rezonans İncelemesi**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Doç Dr. Semra AHMETOLAN**      .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**              **Prof. Dr. Mevlüt TEYMUR**      .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Ayşe Hümeysra BİLGE**      .....  
Kadir Has Üniversitesi

**Teslim Tarihi :**              **4 Mayıs 2015**  
**Savunma Tarihi :**          **25 Mayıs 2015**



## ÖNSÖZ

Tanıştığım günden beri her konuda bana yol gösteren ve destek olan, yüksek lisans tezimi hazırlamamda da hiçbir zaman yardımını esirgemeyen hocam Doç. Dr. Semra Ahmetolan'a çok teşekkür ederim.

Beni her konuda destekleyen ve arkamda duran anneme, babama ve kardeşime teşekkür ederim.

Manevi desteklerini hep hissettiğim arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Mayıs 2015

Neşe Özdemir  
Matematikçi





## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
İKİ TABAKALI ELASTİK BİR ORTAMDA NONLİNEER SH DALGALARININ HARMONİK REZONANS İNCELEMESİ.....	xi
ÖZET.....	xi
1. GİRİŞ .....	1
2. İKİ TABAKALI BİR ELASTİK ORTAMDA SH-DALGALARI .....	5
2.1 Giriş.....	5
2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler .....	5
2.3 Lineer SH Dalgaları ve Dispersiyon Bağıntısı .....	8
2.4 Temel Dalga ile M. Harmonik Rezonans Etkileşimi .....	10
2.4.1 Üçüncü harmonik rezonans durumu .....	11
2.4.2 Beşinci harmonik rezonans durumu.....	12
3. İKİ TABAKALI ELASTİK BİR ORTAMDA SH DALGALARININ M.HARMONİK REZONANSI.....	17
3.1 Giriş.....	17
3.2 SH Dalgalarının Harmonik Rezonansı .....	17
3.2.1 Temel dalga ile beşinci harmoniğinin etkileşimi .....	28
4. SONUÇ.....	39
KAYNAKLAR .....	41
EKLER.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	51



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

- Şekil 2. 1:**  $h_1$  kalınlıklı  $P_1$  tabakası ve  $h_2$  kalınlıklı  $P_2$  tabakasından oluşan sürekli ortam. .... 6
- Şekil 2. 2:** Beşinci harmonik rezonansın ortaya çıktığı (K,C) eğrileri. Malzeme modeli olarak  $\rho_2 / \rho_1 = 1,28007$ ,  $\gamma = \mu_2 / \mu_1 = 2,159$  olarak seçilmiştir. .... 14
- Şekil 2. 3:** Beşinci harmonik rezonansın ortaya çıktığı (K,C) eğrileri. Malzeme modeli olarak  $\rho_2 / \rho_1 = 1.0$ ,  $\gamma = \mu_2 / \mu_1 = 3.0$  seçilmiştir. .... 15



# İKİ TABAKALI ELASTİK BİR ORTAMDA NONLİNEER SH DALGALARININ HARMONİK REZONANS İNCELEMESİ

## ÖZET

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklara sahip farklı hiperelastik malzemelerden oluşan iki tabakalı elastik bir ortam içerisinde yayılan nonlinear SH dalgalarının harmonik rezonans etkileşimi problemi ele alınmıştır. Serbest yüzeylerde gerilmelerin olmadığı, tabakalar arası arayüzeyde ise yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu kabul edilmiştir. Dalgaların harmonik rezonans etkileşimi problemi bir asimptotik pertürbasyon metodu kullanılarak incelenmiştir. Temel dalga hızı ile onun m.ci harmoniği bir kritik dalga sayısı,  $k_c$ , 'de çakışırsa m. harmonik rezonans etkileşimi ortaya çıkar. Bu durumda temel dalga ile onun m.ci harmonik bileşeni arasında enerji transferi meydana gelir. Bu yüzden harmonik rezonansın var olduğu durumda, uniform asimptotik açılımda, ilk mertebe problemde etkileşime girecek olan harmonik terim dahil edilerek incelemeye devam edilmesi gerekir. Bu çalışmada  $m=5$  olması durumu yani temel dalga ile onun 5. harmoniğinin etkileşimi problemi incelenmiştir. Bu incelemede, uygun şekilde yürütülen asimptotik analiz neticesinde temel dalga ve onun 5.ci harmoniğinin etkileşimine ait birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarının değişimini asimptotik olarak karakterize eden kuple nonlinear Schrödinger (KNLS) denklemi elde edilmiştir.

Çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır:

Giriş bölümünde, elastik dalgalarının yayılmasına yönelik gelişimin tarihi kısaca verilmiştir. İkinci kısımda ise ilk olarak lineer farklı malzemelerden oluşan iki tabakalı elastik bir ortamda lineer SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısı türetilmiştir. SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısından temel dalga hızının 3. ve 5. harmoniklerinin hangi dalga sayılarında ortaya çıktığı incelenmiştir. Bilindiği gibi  $c_1$  ve  $c_2$  sırasıyla üst ve alt tabakalara ait ortamda yayılan lineer dalgaların yayılma hızını,  $c$  ise SH dalgalarının faz hızını göstermek üzere  $c_1 < c_2$  kabulü altında, iki tabakalı ortamda bu tip dalgaların yayılabilmesi için  $c_1 < c < c_2$  ya da  $c_1 < c_2 < c$  eşitsizliklerinden birinin gerçekleşmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, faz hızları arasında ilk eşitsizliğin gerçekleştiği kabulü altında inceleme yürütülmüştür. Benzer çalışma ikinci eşitsizliğin geçerli olduğu durum için de yapılabilir.

Üçüncü kısımda, ilk eşitsizliğin geçerli olduğu durumda, farklı nonlinear malzemelerden oluşan düzgün kalınlıklı iki tabakadan oluşan elastik bir ortamda temel dalga ile onun m. harmoniğinin etkileşimi problemi ele alınmış ve bu problem bir asimptotik pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu yardımıyla incelenmiştir. Uygun bir asimptotik açılım seçilerek, temel dalga ile onun 5. harmoniğinin etkileşimine ait birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarını asimptotik olarak karakterize eden nonlinear denklem sistemi elde edilmiştir. Özel halde bu denklem sistemi kuple nonlinear Schrödinger (KNLS) denklem sistemine indirgenebilmektedir.

Son yıllarda, KNLS denklem sistemi üzerine, denklemlerin solitary dalga ve periyodik çözümleri ve bunlara ilişkin lineer kararlılık analizinin incelendiği birçok çalışma bulmak mümkündür. Solitary zarf çözümlerinin bulunmasında, KNLS sistemini oluşturan denklemlerin lineer ve nonlinear katsayılarının işaretleri büyük önem taşımaktadır.

# HARMONIC RESONANCE OF NONLINEAR SH WAVES ON A TWO LAYERED ELASTIC MEDIUM

## SUMMARY

In this work, the nonlinear resonance interaction between the fundamental SH (shear horizontal) wave and its fifth harmonic component that propagate in a two layered elastic plate of uniform thickness consisting of different elastic materials is considered. The plate of uniform thickness which is composed of two layers occupying the regions,

$$P_1 = \{(X, Y, Z) \mid 0 \leq Y \leq h_1, -\infty < (X, Z) < \infty\} \quad (1a)$$

and

$$P_2 = \{(X, Y, Z) \mid -h_2 \leq Y \leq 0, -\infty < (X, Z) < \infty\} \quad (1b)$$

in the reference frame  $(X, Y, Z)$ . It is assumed that the free boundaries  $Y = h_1$  and  $Y = -h_2$  are free of traction. It is supposed that SH waves propagate along the positive  $X$  axis and the displacement of a particle is in the  $Z$  direction. Then, the wave motion can be defined as

$$x=X, y=Y, z=Z+u(X, Y, t) \quad \text{in} \quad P_1 \quad (2a)$$

and

$$x=X, y=Y, z=Z+v(X, Y, t) \quad \text{in} \quad P_2 \quad (2b)$$

$u$  and  $v$  are the displacement functions of  $X, Y$  and  $t$  in the upper and lower layer, respectively. The constituent materials are assumed to be incompressible, homogeneous, isotropic and hyperelastic. The strain energy functions of the materials are of the form  $\Sigma = \Sigma(I)$  where  $I$  is the first invariant of the Green's deformation tensors  $C_{KL} = x_{k,K} x_{k,L}$ . These materials are called generalized neo-Hookean. Here we assume that the strain energy functions are continuously differentiable functions of the strain invariant  $I$ . The wave motion defined in **(2.a,b)** can exist in the layered plate made of such materials in the absence of body forces acting in the  $XY$ - plane. In this work, we deal with the small but finite amplitude wave motion, therefore we will proceed with the approximate equations rather than exact ones. Because of this reasons, the following approximate governing equations and boundary conditions involving terms not higher than the third degree in the deformation gradients can be written as follows.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right\} = n_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u}{\partial X} Q(u) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \right) \right\} \quad \text{in } P_1 \quad (3.a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right\} = n_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial v}{\partial X} Q(v) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) \right) \right\} \quad \text{in } P_2 \quad (3.b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{on } Y = h_1 \quad (4.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{on } Y = -h_2 \quad (4.b)$$

$$u = v$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = \gamma \beta_2 \frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \quad \text{on } Y = 0 \quad (4.c,d)$$

where

$$Q(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2. \quad (5)$$

In the equations (3a,b),  $c_i^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i}$ , ( $i=1,2$ ) are the propagation velocity of linear waves in the layers where  $\mu_i$  is the linear shear modulus of the layer, and  $\rho_i$  are the density of the layers.  $n_i = \frac{2}{\rho} \frac{d^2 \Sigma_i(3)}{dI^2}$  are nonlinear material constants of the constituent materials. In the layers, when  $n_i > 0$  the relevant medium is hardening in shear, if  $n_i < 0$  then it is softening. The constants  $\gamma, \beta_i$  are defined as  $\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \beta_i = \frac{n_i}{c_i^2}$ .

In the present work our aim is to investigate the interaction of the fundamental wave and its fifth harmonic at a critical wave number  $k_c$  by employing a perturbation method. It is known that when the phase velocity of the fundamental wave coincides with that of its fifth harmonic at  $k_c$ , then the asymptotic expansion ceases to be uniformly valid. When the harmonic resonance occurs, a uniform asymptotic expansion to the problem may be obtained by including the interacting harmonic term in the first order perturbation problem. To investigate the fifth harmonic resonance interaction, we employ the method of multiple scale by introducing new variables.

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t \quad \text{and} \quad y = Y \quad (i=0,1,2) \quad (6)$$

where  $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$  are slow variables to describe slow variations of the amplitudes whereas  $\{x_0, y, t_0\}$  characterize the fast variables, and  $\varepsilon > 0$  is a small parameter which measures the degree of nonlinearity.

Now  $u$  and  $v$  are considered to be a function of these new variables and they are expanded in power of  $\varepsilon$  to the asymptotic series;



$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2), \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad . \quad (7)$$

and we can arrange a transformation between old and new variables as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad . \end{aligned} \quad (8)$$

Then writing the equations of motion in **(3a,b)** and boundary conditions in **(4)** with considering the terms in **(8)** by applying **(6)** and using asymptotic expansion in **(7)** with collecting the terms of some powers in  $\varepsilon$ , we find a hierarchy of problems which can be determined for  $u_n$  and  $v_n$ . First three perturbation problems can be given as follows:

$$O(\varepsilon): \quad L_0^{(1)} u_1 = 0 \quad \text{in } P_1 \quad \text{and} \quad L_0^{(2)} v_1 = 0 \quad \text{in } P_2 \quad (9a,b)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = h_1 \quad , \quad (10a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = -h_2, \quad (10b)$$

$$u_1 = v_1 \quad (10c)$$

and

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = 0 \quad (10d)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad L_0^{(1)} u_2 = L_1^{(1)} u_1 \quad \text{in } P_1 \quad \text{and} \quad L_0^{(2)} v_2 = L_1^{(2)} v_1 \quad \text{in } P_2 \quad , \quad (11a,b)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = h_1 \quad , \quad (12a)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = -h_2 \quad , \quad (12b)$$

$$u_2 = v_2 \quad \text{and} \quad (12c)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = 0 \quad . \quad (12d)$$

$$O(\varepsilon^3): \quad L_0^{(1)}u_3 = L_1^{(1)}u_2 + L_2^{(1)}u_1 + n_1N_0(u_1) \quad \text{in } P_1 \quad (13a)$$

$$L_0^{(2)}v_3 = L_1^{(2)}v_2 + L_2^{(2)}v_1 + n_2N_0(v_1) \quad \text{in } P_2 \quad (13b)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = h_1 \quad (14a)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = -h_2 \quad (14b)$$

$$u_3 = v_3 \quad \text{and} \quad (14c)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_3}{\partial y} = \gamma \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} Q_0(v_1) - \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} Q_0(u_1) \quad \text{on } y = 0 \quad (14d)$$

where the linear operators  $L_0^{(\nu)}$ ,  $L_1^{(\nu)}$  and  $L_2^{(\nu)}$  and the nonlinear operators  $N_0$  and  $Q_0$  are given as follows:

$$L_0^{(\nu)}(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_\nu^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad L_1^{(\nu)}(\psi) = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} + 2c_\nu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1}$$

$$L_2^{(\nu)}(\psi) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2} + c_\nu^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) \quad (15)$$

$$N_0(\psi) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_0} Q_0(\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} Q_0(\psi) \right) \right], \quad Q_0(\psi) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2$$

Note that, in this type of asymptotic analysis these perturbation problems are linear at each step and the first order problem is simply the classical linear wave problem in the layered media under consideration.

Here we assume that between the linear shear wave velocities of the layers, the inequality  $c_1 < c_2$  is valid. For the existence of a SH wave, the phase velocity  $c$  of the wave must satisfy either of  $c_1 < c < c_2$  and  $c_1 < c_2 < c$ . We will only investigate the problem under first condition.

The solutions of the first order problem are given by

$$u_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ A_1^{(l)} e^{ik_1 p_1 y} + B_1^{(l)} e^{-ik_1 p_1 y} \right\} e^{il\phi} + c.c., \quad v_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ C_1^{(l)} e^{-lkv_2 y} + D_1^{(l)} e^{lkv_2 y} \right\} e^{il\phi} + c.c. \quad (16)$$

where “c.c.” denotes the complex conjugate of the preceding terms and  $p_1 = (c^2 / c_1^2 - 1)^{1/2}$ ,  $v_2 = (1 - c^2 / c_2^2)^{1/2}$ ,  $\phi = kx_0 - wt_0$ .

The coefficient  $A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}$  are the first order amplitude functions depending on the slow variables  $(x_1, x_2, t_1, t_2)$ . The use of solutions in (16) in the boundary conditions of the first order problem yields the following homogeneous algebraic system of equations

$$W_l U_1^{(l)} = 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (17)$$

where

$$W_l = \begin{pmatrix} ilk p_1 e^{ilk p_1 h_1} & -ilk p_1 e^{-ilk p_1 h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -lk v_2 e^{lk v_2 h_2} & lk v_2 e^{-lk v_2 h_2} \\ ilk p_1 & -ilk p_1 & \gamma lk v_2 & -\gamma lk v_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

and  $U_1^{(l)}$  are the first order amplitude vectors defined as  $U_1^{(l)} = [A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}]^T$ .

Here  $W_l$  is called the “dispersion matrix”. It is clear that for a nontrivial solution, the determinant of the dispersion matrix must vanish, i.e.,  $\det W_l = 0$ .

Since we have examined the interaction of the fundamental wave and its fifth harmonic component, both the pairs  $(k, w)$  and  $(5k, 5w)$  simultaneously satisfy the linear dispersion relation,  $\det W_1 = 0$  and  $\det W_5 = 0$  and  $\det W_l \neq 0$  for  $l \neq 1, 5$  with these assumptions, the solutions of the first order problem are found as

$$\begin{aligned} u_1 &= (A_1^{(1)}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{ik_1 p_1 y} R_1^{(1)} + e^{-ik_1 p_1 y} R_2^{(1)})e^{i(k_1 x_0 - w_1 t_0)} \\ &\quad + (A_1^{(5)}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{ik_5 p_1 y} R_1^{(5)} + e^{-ik_5 p_1 y} R_2^{(5)})e^{i(k_5 x_0 - w_5 t_0)} + c.c. \\ v_1 &= (A_1^{(1)}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{-k_1 v_2 y} R_3^{(1)} + e^{k_1 v_2 y} R_4^{(1)})e^{i(k_1 x_0 - w_1 t_0)} \\ &\quad + (A_1^{(5)}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{-k_5 v_2 y} R_3^{(5)} + e^{k_5 v_2 y} R_4^{(5)})e^{i(k_5 x_0 - w_5 t_0)} + c.c. \end{aligned} \quad (19)$$

where  $k_5 = 5k$  and  $w_5 = 5w$ ,  $R_1^{(j)}$ ,  $R_2^{(j)}$ ,  $R_3^{(j)}$  and  $R_4^{(j)}$  ( $j=1, 5$ ) are constants. c.c. is the symbol for complex conjugate of preceding terms and  $A_1^{(j)}$  is complex function of the slow variables  $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$  which represents the first order slowly varying amplitudes of the wave interaction. In (19) and henceforth a subscript value  $j=1$  indicates the fundamental and  $j=5$  its fifth harmonic.

To complete the first order solutions of the nonlinear problem,  $A_1^{(1)}$  and  $A_1^{(5)}$  have to be determined. This can be achieved by examining the higher order perturbation problems. If the first order solutions are used in the second order problem and if the resulting non homogeneous linear problem is solved, compatibility conditions related with the fundamental wave and its fifth harmonic yield

$$A_1^{(j)} = A_1^{(j)}(x_1 - V_g^{(j)} t_1, x_2, t_2), \quad j = 1, 5 \quad (20)$$

where  $V_g^{(j)} = dw_j / dk_j$  ( $j=1, 5$ ) are group velocities of the waves. These  $A_1^{(1)}$  and  $A_1^{(5)}$  remain constant in a frame of reference moving with the group velocity  $V_g^{(1)}$  and  $V_g^{(5)}$  respectively.

To reveal the dependence of  $A_1^{(j)}$  ( $j=1,5$ ) on  $(x_2, t_2)$  the third order problem has been examined. A compatibility conditions in the third order problem yield the following coupled equations for the amplitudes of the fundamental wave and its fifth harmonic;

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \tau} + \Gamma^{(1)} \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2} + \Delta^{(11)} |A^{(1)}|^2 A^{(1)} + \Delta^{(51)} |A^{(5)}|^2 A^{(1)} &= 0 \\ i \frac{\partial A^{(5)}}{\partial \tau} + i\Lambda \frac{\partial A^{(5)}}{\partial \xi} + \Gamma^{(5)} \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2} + \Delta^{(55)} |A^{(5)}|^2 A^{(5)} + \Delta^{(15)} |A^{(1)}|^2 A^{(5)} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Here , the nondimensional variables and constants are

$$\begin{aligned} \tau = w_1 t_2, \quad \xi = k_1 (x_1 - V_g^{(1)} t_1), \quad A^{(\alpha)} = k_1 A_1^{(\alpha)}, \\ \Gamma^{(\alpha)} = k_1^2 \frac{\bar{\Gamma}^{(\alpha)}}{w_1}, \quad \Delta^{(\alpha\beta)} = \frac{\bar{\Delta}^{(\alpha\beta)}}{w_1 k_1^2}, \quad \Lambda = \frac{k_1}{\epsilon w_1} (V_g^{(5)} - V_g^{(1)}). \end{aligned} \quad (22)$$

The coefficient  $\Gamma^{(1)}$  and  $\Gamma^{(5)}$  are the linear dispersion coefficients,  $\Delta^{(11)}$  and  $\Delta^{(55)}$  are the nonlinear coefficients which describe the self modulation of wave packets,  $\Delta^{(15)}$  and  $\Delta^{(51)}$  are the nonlinear coupling coefficients of the interaction of the fundamental wave and its fifth harmonic. By the depending variable transformation, or the assumption  $\Lambda = 0$ , then (21) can be reduced the following system:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \tau} + \Gamma^{(1)} \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2} + \Delta^{(11)} |A^{(1)}|^2 A^{(1)} + \Delta^{(51)} |A^{(5)}|^2 A^{(1)} &= 0 \\ i \frac{\partial A^{(5)}}{\partial \tau} + \Gamma^{(5)} \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2} + \Delta^{(55)} |A^{(5)}|^2 A^{(5)} + \Delta^{(15)} |A^{(1)}|^2 A^{(5)} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

which are called CNLS equations. Noted that if  $A^{(5)}=0$ , the CNLS in (23) reduced to a NLS equation, which characterizes the self modulation of SH waves in a two layered plate, asymptotically. CNLS equations have been obtained in the similar wave interaction problems of various branches of physics and engineering. Thus, they have great interest to find exact solutions for special values of coefficients of equations.

## 1. GİRİŞ

Elastik dalgalar, sismoloji, malzeme yüzeylerinin tahribatsız muayeneleri, elektronik sinyal işleme teknolojisi gibi değişik alanlarda kullanılmaktadır. Bu önemli uygulamalarından dolayı elastik dalgaların yayılımı birçok incelemenin konusu olmuştur [1, 2, 3, 4, 5].

Boyuna ve enine dalgalar, homojen izotrop elastik malzemedan oluşan sonsuz ortamda dispersif değildirler. Öte yandan, homojen elastik izotrop malzemedan oluşan çubuk, plaka ve farklı malzemelerden meydana gelen tabakalı yarım uzay gibi, çoğunlukla dalga kılavuzu olarak adlandırılan ortamlarda yayılan dalgalar, sınır yüzeylerinde oluşan yansımaların da etkisiyle dispersif olurlar, yani faz hızları dalga sayısına bağlı olarak değişir.

Son yıllarda, dispersif ortamlardaki nonlinear dalga yayılımı ve etkileşimi problemleri üzerine bir çok çalışma yapılmaktadır. Bu durum farklı dalga modları arasındaki enerji transferinin oluşmasından kaynaklanmaktadır. Böyle etkileşimler, farklı dalga modları arasındaki dalga sayıları ve açısal frekansları rezonans şartını sağlaması durumunda olur. Bu açıdan fizikte ve mühendislikte uygulama alanına sahiptir. Nayfeh, [7]' de yaptığı çalışmada, kılcal (capillary) ve yerçekimi (gravity) dalgalarının temel dalga ile onun ikinci harmoniğinin rezonans etkileşimini değişik ölçekler metoduyla incelemiş ve genlik fonksiyonlarının uzay zaman değişimini asimptotik olarak karakterize eden bir denklem sistemi türetmiştir. Nayfeh, [8]' de benzer çalışmayı üçüncü harmonik rezonans için yürütmüş ve ikinci harmonik rezonans da olduğu gibi kesin bir çözüm bulamamıştır. Teymur [9]' da SH dalgalarının yarı sonsuz uzay modeli için beşinci harmonik rezonans etkileşimi problemini incelemiştir. Yaptığı inceleme sonucunda, dalgalara ait birinci mertebeye yavaş değişen genlik fonksiyonlarının özel halde KNLS denkleminde indirgenebileceğini göstermiştir.

[10]' da Kalyanasundaram tarafından kuazi-monokromatik dalgaların yayılımı, asimptotik bir yöntem olan değişik ölçekler metodu kullanılarak incelenmiş ve

kompleks genlik fonksiyonlarının yavaş değişimini karakterize eden bir yarı lineer denklem elde edilmiştir. Ayrıca, bu çalışmada Love dalgalarının önemli bir özelliği olan dispersiyonun etkisi tam olarak görülmemiştir. [11]' de ise Batallie ve Lund tarafından hem nonlineerliğin hem de dispersiyonun etkisini birlikte modelleyen bir denklem elde edilmiş ve dalga modülasyonunun genlik fonksiyonları için soliton tipi çözümleri olduğu sonucuna varılmıştır. Daha sonradan, Teymur tarafından, düzgün kalınlıklı, farklı malzeme özelliklerine sahip homojen, izotrop, sıkıştırılabilir ve hiperelastik malzemeden yapılmış bir tabaka ile kaplı yarı sonsuz uzayda SH dalgalarının nonlineer modülasyonu değişik ölçekler metodu ile incelenmiştir [11]. İnceleme sonucunda, dalgaların nonlineer self modülasyonunun asimptotik olarak Nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. [12]' ye paralel çalışmalar, [9,13,14,15,16]' da yapılmıştır. [9,14,16]' da aynı yönde ilerleyen iki dalğanın nonlineer etkileşimleri incelenmiştir. [17]' de ise homojen, sıkıştırılmaz, izotrop elastik malzemelerden oluşan düzgün kalınlıklı iki tabaka ile kaplı elastik bir ortamda SH dalgalarının self modülasyonu NLS denklemi ile karakterize edilmiştir.

[20]' de Teymur ve Ahmetolan, homojen, izotrop ve sıkıştırılmaz düzgün kalınlıklı bir tabakadan oluşan ortamda nonlineer SH dalgalarının yayılımını incelemiştirler. Zayıf nonlineerlik ve dispersiyon dengelenerek, nonlineer dalgaların modülasyonunun NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. [12]' de Teymur tarafından yapılan çalışmadaki yarı sonsuz uzay modeli için aynı yönde ilerleyen iki SH dalgasının etkileşimleri problemi [16,18]' de ele alınmıştır. Bu çalışmalarda, dalgaların etkileşimi üzerindeki nonlineerlik etkisi incelenmiş ve grup hızı aynı olan dalgaların nonlineer etkileşimlerini karakterize eden KNLS denklemi elde edilmiştir. [21]' de ise aynı yönde ilerleyen iki SH dalgasının etkileşim problemi ele alınmıştır. İnceleme neticesinde, aynı yönde ilerleyen ve birbiri ile etkileşen dalgalara ait yavaş değişen genlik fonksiyonlarının uzay zaman değişimini asimptotik olarak karakterize eden kuple bir denklem sistemi türetilmiştir ve özel halde kuple nonlineer Schrödinger (KNLS) denkleme indirgelediği gösterilmiştir. 2014 senesinde Ahmetolan ve Demirci, iki tabakalı elastik ortamda aynı yönde ilerleyen iki SH dalgasının etkileşimleri problemini ele almışlardır [22]. Bu çalışmada, etkileşen dalgaların genlik fonksiyonlarının KNLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Bu çalışmada ise, daha önceden [17, 23]' de analiz edilen homojen, sıkıştırılmaz, izotrop elastik malzemelerden oluşan düzgün kalınlıklı iki tabaka ile kaplı elastik bir ortamdaki model için temel mod ile onun 5.ci harmonik rezonans etkileşimi problemi ele alınmaktadır. Dalgaların rezonans etkileşimi problemi bir asimptotik pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu uygulanarak çözülecektir. Yapılan asimptotik inceleme neticesinde, temel dalga ( $l=1$ ) ile onun beşinci harmomiğinin etkileşimine ait birinci merteye yavaş değişen genlik fonksiyonlarının asimptotik olarak karakterize eden KNLS denklemine indirgenebileceği gösterilmektedir.





## 2. İKİ TABAKALI BİR ELASTİK ORTAMDA SH-DALGALARI

### 2.1 Giriş

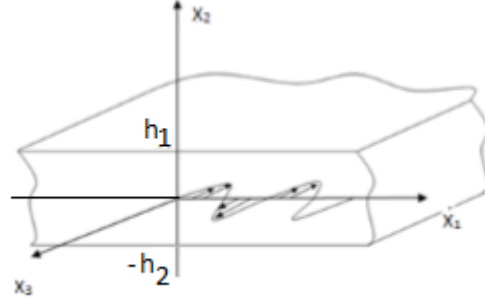
Bu bölümde ilk olarak farklı ve sıkışmaz nonlinear neo-Hookean elastik malzemelerden yapılmış düzgün (uniform) kalınlıklı iki tabakadan oluşan bir ortamda SH dalgalarının yayılmasını karakterize eden hareket denklemleri ve sınır koşulları verilmektedir. Daha sonra da bu denklemler ve sınır koşulları lineerleştirilerek SH tipi lineer dalgaların yayılmasını karakterize eden sınır değer problemi incelenecektir. Ayrıca dispersiyon bağıntısı türetilecek ve dispersiyon bağıntısından faydalanılarak harmonik rezonans etkileşiminin hangi koşullarda varolacağı tartışılacaktır. Bilindiği gibi  $c_1$  ve  $c_2$  sırasıyla üst ve alt tabakalara ait ortamda yayılan lineer dalgaların yayılma hızını,  $c$  ise SH dalgalarının faz hızını göstermek üzere  $c_1 < c_2$  kabulü altında, iki tabakalı ortamda bu tip dalgaların yayılabilmesi için  $c_1 < c < c_2$  ya da  $c_1 < c_2 < c$  eşitsizliklerinden birinin gerçekleşmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, faz hızları arasındaki ilk eşitsizliğin gerçekleştiği kabulü altında inceleme yürütülecektir.

### 2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler

Üç boyutlu uzayda bir noktanın, aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sırası ile  $(x_1, x_2, x_3)$  ve  $(X_1, X_2, X_3)$  sıralı üçlü sayıları ile verilsin. Başlangıç konumunda,

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(X_1, X_2, X_3) \mid 0 \leq X_2 \leq h_1, -\infty < (X_1, X_3) < \infty\} \\ P_2 &= \{(X_1, X_2, X_3) \mid -h_2 \leq X_2 \leq 0, -\infty < (X_1, X_3) < \infty\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

bölgesini dolduran ve farklı elastik malzemelerden oluşan uniform kalınlıklı iki tabakadan oluşan bir sürekli ortam gözönüne alalım. (bknz Şekil 2.1 )



**Şekil 2. 1:**  $h_1$  kalınlıklı  $P_1$  tabakası ve  $h_2$  kalınlıklı  $P_2$  tabakasından oluşan sürekli ortam.

$X_2 = 0$  ara yüzeyi boyunca yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğunu ve  $X_2 = h_1$  ve  $X_2 = -h_2$  serbest yüzeylerinde gerilmelerin sıfır olduğunu varsayalım.

Böyle bir ortamda  $X_1$  eksenini boyunca yayılan ve

$$x_k = X_k \delta_{kK} + u_3^{(\nu)}(X_\Delta, t) \delta_{k3} \quad (2.2)$$

yani,

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 + u_3^{(\nu)}(X_1, X_2, t) \quad \nu=1,2 \quad (2.3)$$

denklemleri ile tanımlanan SH dalgalarını gözönüne alalım. Burada  $u_3^{(1)}$  ve  $u_3^{(2)}$ , sırasıyla  $P_1$  ve  $P_2$  tabakalarındaki noktaların  $X_3$  yönündeki yer değiştirmelerini göstermektedir. Alan büyüklükleri üzerindeki 1 üst indisi büyüklüğün  $P_1$  tabakasına, 2 üst indisi ise  $P_2$  tabakasına ait olduğunu gösterecektir. Ayrıca  $(X_1, X_2, X_3)$  yerine  $(X, Y, Z)$ ,  $u_3^{(1)} = u$  ve  $u_3^{(2)} = v$  yazalım. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalgaların yayılması problemi inceleneceği için, deformasyon gradyentinde üçüncü dereceden büyük olan terimler alınmayarak elde edilen yaklaşık hareket denklemleri ve sınır koşullarından oluşan sınır değer problemi aşağıdaki formda yazılabilir:

$$P_1 \text{ 'de} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right\} = n_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u}{\partial X} Q(u) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \right) \right\}, \quad (2.4)$$

$$P_2 \text{ 'de} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right\} = n_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial v}{\partial X} Q(v) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) \right) \right\}, \quad (2.5)$$

$$Y = h_1' de \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 , \quad (2.6.a)$$

$$Y = -h_2' de \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (2.6.b)$$

$$Y = 0' da \quad u = v , \quad (2.7.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = \gamma \beta_2 \frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) . \quad (2.7.b)$$

Burada,

$$Q(\psi) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2 \quad (2.8)$$

dır ve  $c_1$  üst tabakada,  $c_2$  ise alt tabakadaki lineer dalgaların yayılma hızını göstermektedir. (2.4) - (2.7) sınırdeğer problemi için nonlinear SH dalgalarının self modülasyonunun incelenmesi ve malzeme nonlinearitesinin yayılma olayına katkısı [17, 25]' de incelenmiştir.  $c_v^2 = \frac{\mu_v}{\rho_v}$ ,  $v=1,2$  şeklinde tanımlanmaktadır [15].  $\mu_v = 2d\Sigma_v(3)/dI$  olmak üzere,  $\mu_1$  ve  $\mu_2$  sırasıyla üst ve alt tabakadaki kayma modülünü,  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  ortamı oluşturan malzemelerin yoğunluklarını göstermektedir.  $n_1$  ve  $n_2$  sabitleri ise sırasıyla üst ve alt tabakaları oluşturan malzemelerin nonlinear özellikleri ile ilgili sabitlerdir ve  $n_v = (2/\rho_v)d^2\Sigma_v/dI^2$  şeklinde tanımlanmaktadır [15]. Burada  $\Sigma_v$ , ortamı oluşturan elastik malzemelerin iç enerji fonksiyonudur ve  $\Sigma_v = \Sigma_v(I)$  yapısındadır.  $I$ , Green deformasyon tensorü  $C_{KL} = x_{k,K}x_{k,K}$  'nin birinci invariantını göstermektedir. Bu özelliğe sahip elastik malzemeler, yani iç enerji fonksiyonu sadece Green deformasyon tensörünün birinci invariantının bir fonksiyonu olarak yazılabiliyor ise bu tip malzemelere neo-Hookean malzeme adı verilmektedir. Biz de bu çalışmada ortamı oluşturan malzemelerin neo Hookean malzemedan oluştuğunu kabul ediyoruz. Ayrıca  $n_v > 0$  ise malzeme kaymada sertleşen,  $n_v < 0$  ise kaymada yumuşayan özelliğe sahiptir [15].  $\gamma$  lineer,  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  nonlinear elastik sabitleri ise

$$\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \beta_v = \frac{n_v}{c_v^2} \quad v = 1, 2.$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

### 2.3 Lineer SH Dalgaları ve Dispersiyon Bağıntısı

Bu bölümde lineer SH dalgalarının iki tabakalı elastik bir ortamda yayılımı problemi ele alınacaktır. Böyle bir ortamda yayılan SH dalgaları dispersiftirler, yani dalgaların yayılma hızı (açısal frekansı) dalga sayısına bağlı olarak değişmektedir. Bu değişimi veren dispersiyon bağıntısı elde edilecek ve seçilen malzeme özellikleri için hangi dalga sayılarında harmonik rezonans etkileşiminin meydana geldiği incelenecektir.

Lineer dalgaları betimleyen sınır değer problemi (2.4), (2.5) ve (2.7b)' de  $n_1=0$  ve  $n_2=0$ ; dolayısıyla  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  alınarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$P_1 \text{ 'de} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (2.9)$$

$$P_2 \text{ 'de} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (2.10)$$

$$Y = h_1 \text{ 'de} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (2.11.a)$$

$$Y = -h_2 \text{ 'de} \quad \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (2.11.b)$$

$$Y = 0 \text{ 'da} \quad u = v \quad (2.12.a)$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = \gamma \beta_2 \frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \quad (2.12.b)$$

Pozitif X eksenini yönünde yayılan harmonik dalgalar için (2.9) ve (2.10) denklemlerinin çözümlerini

$$u(X, Y, t) = U(Y) e^{i(kX - \omega t)} + k.e. \quad (2.13)$$

ve

$$v(X, Y, t) = V(Y)e^{i(kX - wt)} + k.e. \quad (2.14)$$

formunda arayabiliriz. Burada  $k$  dalga sayısını,  $w$  açısal frekansı göstermektedir ve “k.e.” ise önceki terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. (2.13) ve (2.14) çözüm formları sırasıyla (2.9) ve (2.10) denklemlerinde kullanılırsa  $U(Y)$  ve  $V(Y)$  fonksiyonları için aşağıdaki ikinci mertebeden lineer adi türevli diferansiyel denklemler elde edilir:

$$U'' + k^2 \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) U = 0 \quad (2.15)$$

ve

$$V'' + k^2 \left( 1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) V = 0. \quad (2.16)$$

Bilindiği gibi  $c_1$  ve  $c_2$  sırasıyla üst ve alt tabakalara ait ortamda yayılan lineer dalgaların yayılma hızını,  $c$  ise SH dalgalarının faz hızını göstermek üzere  $c_1 < c_2$  kabulü altında, iki tabakalı ortamda bu tip dalgaların yayılabilmesi için

$$c_1 < c < c_2 \quad \text{ya da} \quad c_1 < c_2 < c \quad (2.17a,b)$$

eşitsizliklerinden birinin gerçekleşmesi gerekmektedir [17,23]. Bu çalışmada, faz hızları arasında ilk eşitsizliğin gerçekleştiği kabulü altında inceleme yürütülecektir. Benzer çalışma ikinci eşitsizliğin geçerli olduğu durum için de yapılabilir.

(2.17a) koşulu altında (2.15) ve (2.16) denklemlerinin çözümleri

$$U(Y) = Ae^{ikp_1 Y} + Be^{-ikp_1 Y} \quad (2.18)$$

$$V(Y) = Ce^{-kv_2 Y} + De^{kv_2 Y} \quad (2.19)$$

olarak elde edilir. Burada,  $p_1^2 = \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right)$  ve  $v_2^2 = \left( 1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)$  dir.  $U(Y)$  ve  $V(y)$

çözümleri (2.11) ve (2.12) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$\mathbf{U} = [A, B, C, D]^T$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} ikp_1 e^{ikp_1 h_1} & -ikp_1 e^{-ikp_1 h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -kv_2 e^{kv_2 h_2} & kv_2 e^{-kv_2 h_2} \\ ikp_1 & -ikp_1 & \gamma kv_2 & -\gamma kv_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

olmak üzere,

$$\mathbf{WU} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

homojen cebrik denklem sistemi elde edilir. Burada  $\mathbf{W}$  “dispersiyon matrisi” olarak adlandırılmaktadır. (2.21) cebirsel denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir:

$$\det \mathbf{W} = 0. \quad (2.22)$$

(2.22) denklemi bize farklı lineer malzemelerden oluşan iki tabakalı bir ortamda yayılan SH-dalgalarına ait dispersiyon bağıntısını verir:

$$p_1 \tan(kh_1 p_1) - \gamma v_2 \tanh(kh_2 v_2) = 0 \quad (2.23)$$

(2.23) denklemi değişkenleri  $(k, c)$  ya da  $(k, w)$  olan bir denklemdir. Bu denklem değişik malzeme modelleri için [17,23]’ de incelenmiştir. Bir sonraki bölümde temel dalga ile onun m.ci harmoniğinin ortaya çıktığı dalga sayısı civarında SH dalgalarının yayılımı ve harmonik rezonans etkileşimi problem ele alınacaktır. Bu yüzden burada (2.23) denkleminde yararlanarak temel dalga ile onun m.ci harmoniğinin etkileşiminin hangi dalga sayılarında ortaya çıktığını inceleyelim.

#### 2.4 Temel Dalga ile M. Harmonik Rezonans Etkileşimi

Bilindiği üzere, hem bir kritik dalga sayısı ve ona karşı gelen açılal frekansı  $(k_c, w_c)$  hem de  $(mk_c, mw_c)$ ,  $m \in \{3, 5, 7, 9, \dots\}$  çiftleri aynı anda dispersiyon bağıntısını sağlarsa temel modla onun m. harmoniği arasında harmonik rezonans etkileşimi olacağı görülebilir. Harmonik rezonansa, etkileşen dalgaların faz hızları aynı

olduğundan, lineer dispersiyon bağıntısı yardımıyla harmonik rezonans incelemesini yürütebiliriz.

Öncelikle m.ci harmonik rezonansın oluşması için gerekli olan  $k_m = mk_c$  eşitliğini ve (2.23) denkleminin sağ yanında yer alan periyodik fonksiyonu gözönüne alalım. Tanjant fonksiyonunun periyodunun  $\pi$  olduğu kullanılırsa:

$$\tan k_c h_1 p_1 = \tan mk_c h_1 p_1 = \tan(k_c h_1 p_1 + n\pi) \quad (2.24)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan  $m = 3, 5, 7, \dots$  olması durumu için  $m = 2s + 1$

( $s = 1, 2, \dots$ ) yazılırsa

$$\tan[(2s + 1)k_c h_1 p_1] = \tan(k_c h_1 p_1 + n\pi) \quad (2.25)$$

ve  $2sk_c h_1 p_1 = n\pi$  olduğu kullanılırsa,

$$k_c h_1 p_1 = \frac{n\pi}{2s}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

olur. Burada dikkat edilirse,

- $s = 1$  ise  $m = 3$  olur ve üçüncü harmonik rezonans ortaya çıkar.
- $s = 2$  ise  $m = 5$  olur ve beşinci harmonik rezonans ortaya çıkar.

Yukarıda verilen iki durumu ayrı ayrı ele alarak hangi dalga sayısı ve faz hızında harmonik rezonansın ortaya çıktığını inceleyelim.

#### 2.4.1 Üçüncü harmonik rezonans durumu

(2.26) eşitliğinde  $s = 1$  ( $m = 3$ ) alınır

$$k_c h_1 p_1 = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

olur. (2.27) eşitliği (2.23) dispersiyon bağıntısında kullanılırsa

$$\tan \frac{n\pi}{2} = \gamma \frac{v_2}{p_1} \tanh(k_c h_2 v_2) \quad (2.28)$$

elde edilir.

Şimdi, aşağıda boyutsuz değişken ve sabitleri

$$K = k_c h_1, \quad C = \frac{c}{c_1}, \quad M = \frac{c_1}{c_2}, \quad H = \frac{h_2}{h_1} \quad (2.29)$$

tanımlayalım. Burada,  $C$  dalgaların boyutsuz faz hızını ve  $K$  da boyutsuz dalga sayısını göstermektedir. (2.29) boyutsuz büyüklükleri kullanılarak kolayca

$$p_1 = \sqrt{C^2 - 1}, \quad v_2 = \sqrt{1 - C^2 M^2} \quad (2.30)$$

olduğu görülür. Bu boyutsuz büyüklükler dispersiyon bağıntısında yazılırsa

$$\tan\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\gamma \sqrt{1 - M^2 C^2}}{\sqrt{C^2 - 1}} \tanh(KH \sqrt{1 - M^2 C^2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

elde edilir. Bu halde (2.31) dispersiyon bağıntısını inceleyelim:

- $n = 1, 3, 5, \dots (2r + 1)$  için  $\tan(2r + 1) \frac{n\pi}{2} \rightarrow \infty$  olduğu bilinmektedir. Bu durumda  $\tanh$  fonksiyonu sınırlı olduğu için  $C^2 - 1 \rightarrow 0$ ,  $C \rightarrow 1$ , yani  $c \rightarrow c_1$  olur. Bu da temel dalga ile onun üçüncü harmoniğinin etkileşiminin  $c = c_1$ 'de ortaya çıktığını gösterir.
- $n = 2, 4, 6, \dots (2r)$  için  $\tan(2r \frac{n\pi}{2}) = 0$  olur. Bu durumda da ( $\gamma \neq 0$ )  $\sqrt{1 - M^2 C^2} = 0$  veya  $\tanh(KH \sqrt{1 - M^2 C^2}) = 0$  olur. Her iki halde de  $C^2 = \frac{1}{M^2}$ ,  $C = \frac{1}{M}$ , yani  $c = c_2$  bulunur. Yani  $n = 2, 4, 6, \dots (2r)$  için temel dalga ile onun üçüncü harmoniğinin etkileşimi  $c = c_2$  olduğunda oluşmaktadır.

#### 2.4.2 Beşinci harmonik rezonans durumu

(2.26) eşitliğinde  $s = 2$  ( $m = 5$ ) alınır,

$$k_c h_1 p_1 = \frac{n\pi}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.32)$$

olur. Bu durumda dispersiyon bağıntısı



$$\tan \frac{n\pi}{4} = \frac{\gamma v_2}{p_1} \tanh(k_c h_2 v_2) \quad (2.33)$$

olur. (2.29)'da tanımlanan boyutsuz değişkenler kullanılırsa

$$\tan \frac{n\pi}{4} = \frac{\gamma \sqrt{1-C^2 M^2}}{\sqrt{C^2-1}} \tanh(KH \sqrt{1-C^2 M^2}) \quad (2.34)$$

elde edilir. Şimdi (2.34)'de verilen dispersiyon bağıntısını inceleyelim:

- $n = 2, 4, 6, \dots (2r)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) için  $\tan(2r \frac{n\pi}{4}) \rightarrow \infty$  olur ve  $\tanh$  fonksiyonunun sınırlı olduğu gözönüne alınırsa  $C^2 - 1 \rightarrow 0$ ,  $C = \frac{c}{c_1} \rightarrow 1$ , buradan  $c = c_1$  elde edilir. Yani, bu halde temel dalga ile onun beşinci harmoniğinin etkileşimi  $n = 2, 4, 6, \dots (2r)$  için  $c \rightarrow c_1$  olduğunda ortaya çıkmaktadır.
- $n = 4, 8, \dots (4r)$ , ( $r = 1, 2, \dots$ ) için  $\tan(\frac{n\pi}{4}) = \tan(r\pi) = 0$  olur. Bu durumda (2.34)'de verilen dispersiyon bağıntısından,  $1 - C^2 M^2 = 0$ ,  $C = \frac{1}{M}$ , yani  $c = c_2$  elde edilir ve beşinci harmonik rezonans  $c = c_2$  olduğunda ortaya çıkmaktadır.
- $n = 1, 5, 9, \dots (1+4r)$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) için  $\tan \frac{n\pi}{4} = 1$  olur. Bu durumda (2.34) dispersiyon bağıntısı

$$\frac{\sqrt{C^2-1}}{\gamma \sqrt{1-M^2 C^2}} = \tanh(KH \sqrt{1-M^2 C^2}) \quad (2.35)$$

halini alır. Yani temel dalga ile onun beşinci harmoniğinin arasındaki etkileşim  $c = c_1$ ,  $c = c_2$  ve (2.35)'de verilen denklemi sağlayan  $(k, c)$  çiftlerinde ortaya çıkmaktadır.

Şimdi (2.35) denklemini de inceleyelim.  $K \rightarrow 0$  için (sabit  $h_1$  ve  $K \rightarrow 0$  için) yani çok çok küçük dalga sayılarında, (2.35) denkleminde  $C \rightarrow 1$  ( $c \rightarrow c_1$ ) olduğu

kolayca görülür. Diğer taraftan çok büyük dalga sayılarında,  $K \rightarrow \infty$  iken, (2.35)

denkleminde  $\frac{\sqrt{C^2-1}}{\gamma\sqrt{1-M^2C^2}} \rightarrow 1$  yani,

$$C \rightarrow \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\sqrt{1+M^2\gamma^2}} \quad (2.36)$$

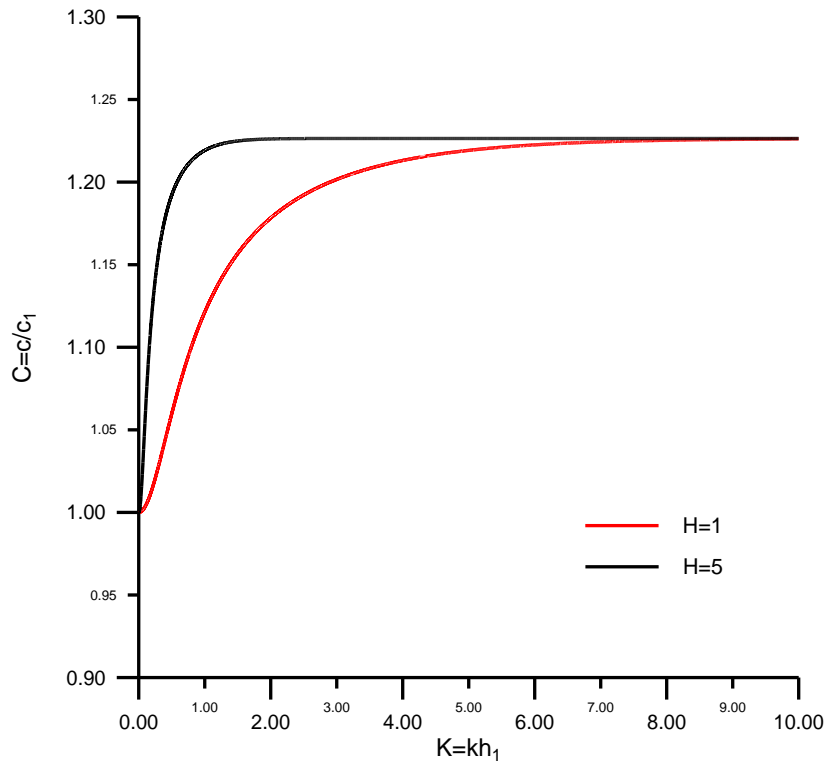
olacağı kolaylıkla görülür.

(2.29)'da verilen boyutsuz değişkenler kullanılarak beşinci harmonik rezonans etkileşiminin ortaya çıktığı  $(k, c)$  değerlerini (2.35) denkleminde hesaplayalım.

Bunun için iki farklı malzeme modeli gözönüne alınmıştır:

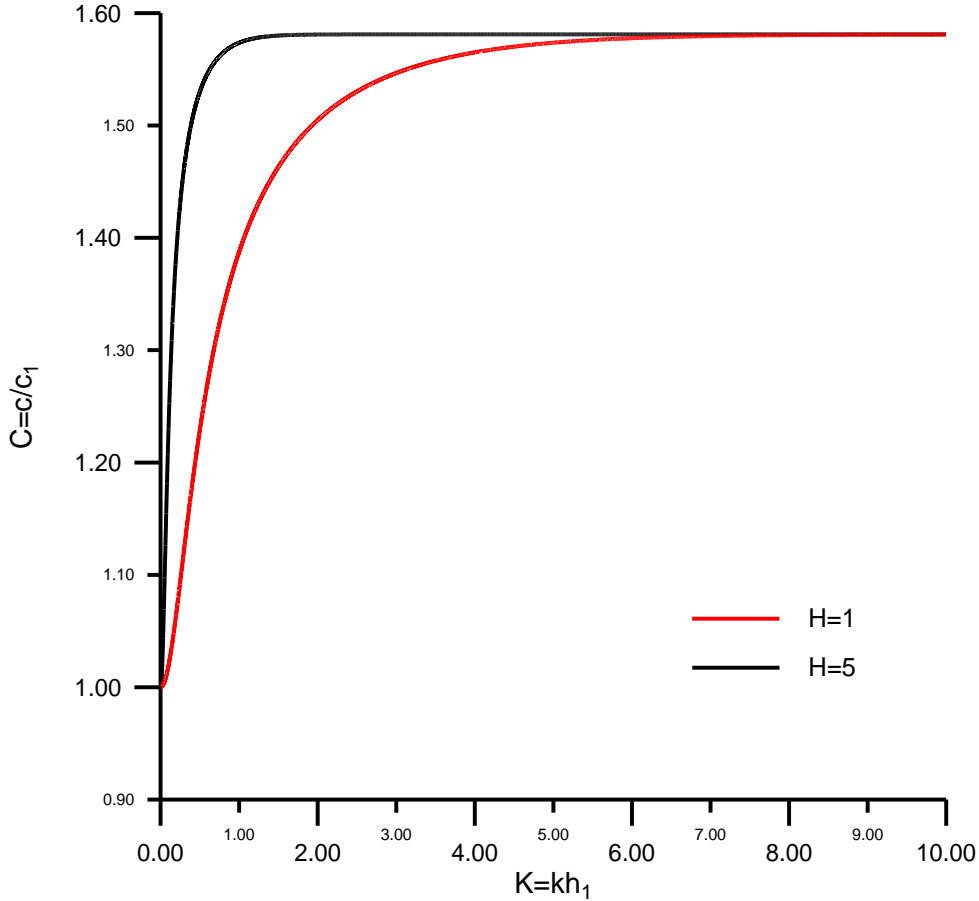
İlk olarak, malzeme modeli olarak  $\rho_2 / \rho_1 = 1,28007$ ,  $\gamma = \mu_2 / \mu_1 = 2,159$  seçilmiştir. Ortamı oluşturan kalınlık oranları ise sırasıyla  $H = h_2 / h_1 = 1$  ve 5 olarak seçilmiştir. Bu durumda beşinci harmonik rezonans etkileşiminin ortaya çıktığı  $(K, C)$ 'leri gösteren eğriler  $H=1$  ve  $H=5$  için (2.35) denkleminde yararlanılarak

Şekil 2.2' de çizdirilmiştir.



Şekil 2. 2: Beşinci harmonik rezonansın ortaya çıktığı  $(K, C)$  eğrileri. Malzeme modeli olarak  $\rho_2 / \rho_1 = 1,28007$ ,  $\gamma = \mu_2 / \mu_1 = 2,159$  olarak seçilmiştir.

Dikkat edilirse, seçilen malzeme modeli için,  $K$  büyük değerler aldıkça, yani  $k$  dalga sayısı arttıkça, tabaka kalınlıklarından bağımsız olarak  $C$ , 1.2264 değerine yaklaşmaktadır. Bu değer de (2.36) ile verilen değerdir. Diğer taraftan  $K$ 'nin çok küçük değerleri için ise  $C \rightarrow 1$ , yani  $c \rightarrow c_1$  olduğu görülür. Ayrıca tabakaların kalınlık oranlarının, 5. harmonik rezonans etkileşiminin ortaya çıktığı ( $K$ ,  $C$ ) eğrilerini etkilediği de görülmektedir.



**Şekil 2. 3:** Beşinci harmonik rezonansın ortaya çıktığı ( $K,C$ ) eğrileri. Malzeme modeli olarak  $\rho_2 / \rho_1 = 1.0$ ,  $\gamma = \mu_2 / \mu_1 = 3.0$  seçilmiştir.

İkinci olarak,  $\rho_2 / \rho_1 = 1.0$ ,  $\gamma = \mu_2 / \mu_1 = 3.0$  malzeme modeli seçilerek ve tabakalar arası kalınlık oranları  $H=1$  ve  $H=5$  alınarak beşinci harmonik rezonansın ortaya çıktığı ( $K$ ,  $C$ ) eğrileri Şekil 2.3' de verilmektedir. Dikkat edilirse, bu seçilen malzeme modeli için de Şekil 2.2 için yapılan gözlemler geçerlidir.  $K$ 'nin büyük değerlerinde  $C \rightarrow 1.5811$  olmaktadır.



### 3. İKİ TABAKALI ELASTİK BİR ORTAMDA SH DALGALARININ M.HARMONİK REZONANSI

#### 3.1 Giriş

Nonlinear elastik malzemelerden oluşan düzgün kalınlıklı iki tabakalı elastik bir ortamda, SH dalgalarının yayılmasını karakterize eden hareket denklemi ve sınır koşulları Bölüm 2.2' de gösterilmiştir. Bölüm 2.3' de ise lineer SH dalgalarının yayılması incelenerek SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısı elde edilmiş ve Bölüm 2.4' de temel dalga ile onun üçüncü ve beşinci harmoniğinin rezonans etkileşiminin hangi dalga sayılarında ortaya çıktığı incelenmiştir. Burada,  $c_1 < c_2$  kabulü altında,  $c$  SH dalgalarının faz hızını,  $c_1$  ve  $c_2$  ise sırasıyla üst tabakada ve alt tabakadaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarını göstermek üzere,  $c_1 < c < c_2$  ve  $c_1 < c_2 < c$  olması halinde SH dalgaları varolmaktadır. Her iki durum da ayrı ayrı ele incelenebilir. Bu çalışmada ilk eşitsizliğin gerçekleştiği kabulü altında inceleme yürütülecektir.

Bu bölümde, farklı elastik malzeme özelliklerine sahip iki tabakadan oluşan böyle bir ortamda Bölüm 2.4' de incelenen harmonik rezonansın ortaya çıktığı dalga sayısı civarında nonlinear SH dalgalarının harmonik rezonans etkileşimi ele alınmaktadır. Bu problem, Bölüm 3.2' de asimptotik bir pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler yöntemi kullanılarak incelenecektir.

#### 3.2 SH Dalgalarının Harmonik Rezonansı

İki tabakalı elastik bir ortamda pozitif  $X$  eksenini boyunca yayılan ve  $Z$  eksenini boyunca yer değiştiren küçük ama sonlu genlikli SH dalgalarının harmonik rezonans problemi, asimptotik bir pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu ile incelenecektir.

Bu amaçla,  $\varepsilon > 0$  nonlinearliğin mertebesini gösteren küçük bir parametre olmak üzere,  $X, Y, t$  bağımsız değişkenleri yerine aşağıdaki yeni değişkenler tanımlanır:

$$x_i = \varepsilon^i X, \quad t_i = \varepsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0, 1, 2. \quad (3.1)$$

Burada  $(x_0, y, t_0)$  değişkenleri problemdeki hızlı değişimleri ve  $(x_1, x_2, t_1, t_2)$  değişkenleri ise yavaş değişimleri karakterize eden değişkenlerdir.

Tabakalara ait yer değiştirme fonksiyonlarının,  $u$  ve  $v$ ,  $\varepsilon$  cinsinden uniform geçerli açılıma sahip oldukları varsayılmaktadır [6];

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.2)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) .$$

Eski ve yeni değişkenlere göre türev operatörleri arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y} .$$

İlk olarak, (2.4), (2.5)'de verilen hareket denklemleri ve (2.6)-(2.7) ile verilen sınır koşulları (3.1)' de verilen bu yeni değişkenler cinsinden yazılır ve (3.3) türev dönüşümleri kullanılırsa ve daha sonrasında da (3.2)' de verilen asimptotik açılımlar kullanılırsa,  $\varepsilon$ 'nun aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek  $u_n$ ' lerin ve  $v_n$ ' lerin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarjisi elde edilir. Buna göre, ilk üç pertürbasyon problem aşağıdaki gibidir:

Birinci Mertebe Problem:

$$O(\varepsilon): \quad P_1' de \quad L_0^{(1)} u_1 = 0, \quad (3.4a)$$

$$P_2' de \quad L_0^{(2)} v_1 = 0, \quad (3.4b)$$

$$y = h_1' de \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad (3.5a)$$

ve

$$y = -h_2' de \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad , \quad (3.5b)$$

$$y = 0' da \quad u_1 = v_1 \quad (3.6a)$$

ve

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_1}{dy} = 0 \quad (3.6b)$$

İkinci Mertebe Problem:

$$O(\varepsilon^2): \quad P_1' de \quad L_0^{(1)} u_2 = L_1^{(1)} u_1 \quad , \quad (3.7a)$$

$$P_2' de \quad L_0^{(2)} v_2 = L_1^{(2)} v_1 \quad , \quad (3.7b)$$

$$y = h_1' de \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \quad , \quad (3.8a)$$

$$y = -h_2' de \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad , \quad (3.8b)$$

$$y = 0' da \quad u_2 = v_2 \quad (3.9a)$$

ve

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_2}{dy} = 0 \quad . \quad (3.9b)$$

Üçüncü Mertebe Problem:

$$O(\varepsilon^3): \quad P_1' de \quad L_0^{(1)} u_3 = L_1^{(1)} u_2 + L_2^{(1)} u_1 + n_1 N_0(u_1) \quad (3.10a)$$

$$P_2' de \quad L_0^{(2)} v_3 = L_1^{(2)} v_2 + L_2^{(2)} v_1 + n_2 N_0(v_1) \quad (3.10b)$$

$$y = h_1' de \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \quad (3.11a)$$

$$y = -h_2' de \quad \frac{\partial v_3}{\partial y} = 0 \quad (3.11b)$$

$$y = 0' da \quad u_3 = v_3 \quad \text{ve} \quad (3.12a)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial v_3}{\partial y} = \gamma \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} Q_0(v_1) - \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} Q_0(u_1) \quad (3.12b)$$

Burada, lineer diferansiyel operatörler,  $L_0^{(v)}, L_1^{(v)}, L_2^{(v)}$  ve nonlineer diferansiyel operatörler  $N_0$  ve  $Q_0$  aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$L_0^{(v)}(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_v^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (3.13a)$$

$$L_1^{(v)}(\psi) = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} + 2c_v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1} \quad (3.13b)$$

$$L_2^{(v)}(\psi) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2} + c_v^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) \quad (3.13c)$$

$$N_0(\psi) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_0} Q_0(\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} Q_0(\psi) \right) \right] \quad (3.14a)$$

$$Q_0(\psi) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \quad (3.14b)$$

Bu tip asimptotik analizde her bir merteye pertürbasyon problemi lineer olmaktadır. Ayrıca, (3.4)-(3.6) ile verilen birinci merteye problem Bölüm 2.2' de verilen (2.19)-(2.12) ile verilen klasik lineer problemi ile eş yapıdadır. Sadece (2.9) ve (2.10)'daki yer değiştirme fonksiyonları  $(X, Y, t)$  değişkenlerine bağlı iken (3.4a,b)' de verilen  $\varepsilon$  mertebesindeki problemde yer değiştirme fonksiyonları  $(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2)$  değişkenlerine bağlıdır.

Bu çalışmada dalgaların faz hızı için  $c_1 < c < c_2$  eşitsizliğinin sağlandığı kabulü altında incelemeyi yürüteceğiz. Bu halde birinci merteye problemin çözümlerini Bölüm 2.3' teki gibi değişkenlerin ayrılması metodu ile aşağıdaki formda alabiliriz:

$$u_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ A_1^{(l)} e^{ilk_1 p_1 y} + B_1^{(l)} e^{-ilk_1 p_1 y} \right\} e^{il\phi} + k.e. \quad (3.15a)$$

$$v_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ C_1^{(l)} e^{-lkv_2 y} + D_1^{(l)} e^{lkv_2 y} \right\} e^{il\phi} + k.e. \quad (3.15b)$$

Burada,

$$p_1 = \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad v_2 = \left( 1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^{1/2}, \quad \phi = kx_0 - wt_0 \quad (3.16)$$



ve  $A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}$  birinci mertebeye  $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$  yavaş değişkenlerine bağlı dalga genliği fonksiyonlarıdır.  $k$  dalga sayısı,  $w$  açısal frekans olup, " $k.e.$ " ise önceki terimlerin kompleks eşleniğini ifade etmektedir. **(3.15a,b)**' de verilen çözümler **(3.5)**-**(3.6)** sınır koşullarında kullanıldığında

$$W_l U_1^{(l)} = 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

homojen cebrik denklem sistemi elde edilir. Burada,  $W_l$  dispersiyon matrisi

$$W_l = \begin{pmatrix} ilk p_1 e^{ilk p_1 h_1} & -ilk p_1 e^{-ilk p_1 h_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -lk v_2 e^{lk v_2 h_2} & lk v_2 e^{-lk v_2 h_2} \\ ilk p_1 & -ilk p_1 & \gamma lk v_2 & -\gamma lk v_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

ve  $U_1^{(l)}$  birinci mertebeye genlik vektörleri ise

$$U_1^{(l)} = [A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)}]^T \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Dikkat edilirse,  $l = 1$  için **(3.18)** ile verilen  $W_l$  matrisi **(2.20)** ile verilen  $W$  matrisi ile özdeştir. Dolayısıyla,  $l = 1$  için

$$\det W_l = 0 \quad (3.20)$$

olur ve dispersiyon bağıntısı **(2.22)** ile verilen klasik dispersiyon bağıntısıyla aynı yapıda elde edilir:

$$p_1 \tan(k h_1 p_1) - \gamma v_2 \tanh(k v_2 h_2) = 0 \quad (3.21)$$

Bu çalışmada temel dalga ile onun  $m$ . harmoniğinin etkileşimi problemi incelenecektir. Bu yüzden  $m$ . harmonik rezonans durumunun ortaya çıktığı bir kritik dalga sayısı  $k_c$  ve ona karşı gelen açısal frekansı  $w_c$  olmak üzere,  $(k_c, w_c)$  ve  $(m k_c, m w_c)$  çiftleri aynı anda **(2.23)** veya **(3.21)**' de verilen lineer dispersiyon bağıntısını sağlar. **(2.20)** ve **(3.18)** eş yapıda olduğundan, **(3.18)** yardımıyla  $\det W_m = 0$  olacağı görülebilir.

Yani,

$$l = 1 \quad \text{için} \quad \det W_l = 0 \quad \text{ve} \quad l = m \quad \text{için} \quad \det W_m = 0$$

$$l \neq 1, m \quad \text{için} \quad \det W_l \neq 0 \quad .$$

olur. Dolayısıyla birinci merteye çözüm,

$$U_1^{(l)} = A_1^{(l)}(x_1, x_1, t_1, t_2)R^{(l)} \quad , \quad U_1^{(m)} = A_1^{(m)}(x_1, x_1, t_1, t_2)R^{(m)} \quad ,$$

$$U_1^{(l)} \neq 0, \quad l \neq 1, m \quad . \quad (3.22)$$

bulunur. Burada  $A_1^{(1)}$  ve  $A_1^{(m)}$  sırasıyla temel mod ( $l=1$ ) ve onun  $m$ . harmoniğinin yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonlarıdır.  $R_1^{(1)}$  ve  $R_1^{(m)}$  ise

$$W_1 R^{(1)} = 0 \quad , \quad W_m R^{(m)} = 0 \quad (3.23)$$

şartlarını sağlayan sütun vektörleridir.

Temel dalganın dalga sayısına  $k_1 = k$  ve onun  $m$ . harmoniğinin dalga sayısı  $k_m = mk$  dersek (3.23)' de verilen homojen denklemlerinin bir çözümü olarak  $R_1^{(1)}$  ve  $R_1^{(m)}$  aşağıdaki gibi alınabilirler:

$$(R^{(1)}) = (S_1 e^{-ik_1 p_1 h_1 - k_1 v_2 h_2}, S_1 e^{ik_1 p_1 h_1 - k_1 v_2 h_2}, e^{-2k_1 v_2 h_2}, 1)^T \quad (3.24)$$

$$(R^{(m)}) = (S_m e^{-ik_m p_1 h_1 - k_m v_2 h_2}, S_m e^{ik_m p_1 h_1 - k_m v_2 h_2}, e^{-2k_m v_2 h_2}, 1)^T$$

Burada,

$$S_1 = \frac{\cosh(k_1 h_2 v_2)}{\cos(k_1 h_1 p_1)}, \quad S_m = \frac{\cosh(k_m h_2 v_2)}{\cos(k_m h_1 p_1)}$$

dir.

Böylece , (3.22) kullanılarak birinci merteye pertürbasyon probleminin çözümleri

$$u_1 = (A_1^{(1)}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{ik_1 p_1 y} R_1^{(1)} + e^{-ik_1 p_1 y} R_2^{(1)})e^{i(k_1 x_0 - w_1 t_0)} + (A_1^{(m)}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{ik_m p_1 y} R_1^{(m)} + e^{-ik_m p_1 y} R_2^{(m)})e^{i(k_m x_0 - w_m t_0)} + k.e. \quad (3.25)$$

$$v_1 = (A_1^{(1)}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{-k_1 v_2 y} R_3^{(1)} + e^{k_1 v_2 y} R_4^{(1)})e^{i(k_1 x_0 - w_1 t_0)} + (A_1^{(m)}(x_1, x_2, t_1, t_2)(e^{-k_m v_2 y} R_3^{(m)} + e^{k_m v_2 y} R_4^{(m)})e^{i(k_m x_0 - w_m t_0)} + k.e. \quad (3.26)$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse, birinci merteye yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonları  $A_1^{(1)}$  ve  $A_1^{(m)}$  , nin açık olarak hesaplanması, birinci merteye problem

çözümü için yeterli olacaktır.  $A_1^{(1)}$  ve  $A_1^{(m)}$  'yi açık olarak hesaplayabilmek için ikinci ve üçüncü mertebeye problemlerin de incelenmesi gerekmektedir. Bunun için, (3.25) ve (3.26)' da verilen birinci mertebeye problemin çözümleri  $u_1$  ve  $v_1$ , ikinci mertebeye pertürbasyon probleminin (3.7a,b)'de verilen hareket denklemlerinde kullanılırsa bu denklemler aşağıdaki formda elde edilirler:

$$L_0^{(1)}u_2 = 2i(R_1^{(1)}e^{ik_1p_1y} + R_2^{(1)}e^{-ik_1p_1y})e^{i\phi_1}M_{11}^{(1,1)} + 2i(R_1^{(m)}e^{ik_m p_1 y} + R_2^{(m)}e^{-ik_m p_1 y})e^{i\phi_m}M_{11}^{(1,m)} + k.e. \quad (3.27a)$$

$$L_0^{(2)}v_2 = 2i(R_3^{(1)}e^{-k_1v_2y} + R_4^{(1)}e^{k_1v_2y})e^{i\phi_1}M_{11}^{(2,1)} + 2i(R_3^{(m)}e^{-k_m v_2 y} + R_4^{(m)}e^{k_m v_2 y})e^{i\phi_m}M_{11}^{(2,m)} + k.e. \quad (3.27b)$$

Burada,  $\alpha = 1, 2$  için

$$M_{11}^{(\alpha,1)} = w_1 \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial t_1} + k_1 c_\alpha^2 \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \phi_1 = k_1 x_0 - w_1 t_0 \quad (3.28)$$

$$M_{11}^{(\alpha,m)} = w_m \frac{\partial A_1^{(m)}}{\partial t_1} + k_m c_\alpha^2 \frac{\partial A_1^{(m)}}{\partial x_1}, \quad \phi_m = k_m x_0 - w_m t_0$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Şimdi de (3.27a,b) hareket denklemleri ve (3.8)-(3.9) ile verilen sınır koşulları ile tanımlanan sınır değer probleminin çözümlerini inşa edelim. Bunun için önce problemin çözümlerini

$$u_2 = \tilde{u}_2 + \bar{u}_2 \quad (3.29a)$$

$$v_2 = \tilde{v}_2 + \bar{v}_2 \quad (3.29b)$$

formunda iki parçaya ayıralım.  $\bar{u}_2$  ve  $\bar{v}_2$  homojen olmayan denklemin özel çözümleri;  $\tilde{u}_2$  ve  $\tilde{v}_2$  ise

$$L_0^{(1)}(\tilde{u}_2) = 0, \quad (3.30a)$$

$$L_0^{(2)}(\tilde{v}_2) = 0, \quad (3.30b)$$

homojen denklemlerini ve aşağıda verilen homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümler olsunlar:

$$y = h_1' de \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \quad , \quad (3.30c)$$

$$y = -h_2' de \quad \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} \quad , \quad (3.30d)$$

$$y = 0' da \quad \tilde{u}_2 - \tilde{v}_2 = -(\bar{u}_2 - \bar{v}_2) \quad , \quad (3.30e)$$

$$ve \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y}\right) \quad . \quad (3.30f)$$

Önce (3.27a,b) denklemlerinin özel çözümlerini belirsiz katsayılar yöntemini kullanarak inşa edeceğiz. (3.27a,b) denklemlerinin sağ yanlarındaki fonksiyonlarının yapılarını dikkate alarak ikinci merteye özel çözümleri

$$\bar{u}_2 = (F_1^{(1)} e^{ik_1 p_1 y} + F_2^{(1)} e^{-ik_1 p_1 y}) y e^{i\phi_1} + (F_1^{(m)} e^{ik_m p_1 y} + F_2^{(m)} e^{-ik_m p_1 y}) y e^{i\phi_m} + k.e. \quad (3.31a)$$

$$\bar{v}_2 = (F_3^{(1)} e^{-k_1 v_2 y} + F_4^{(1)} e^{k_1 v_2 y}) y e^{i\phi_1} + (F_3^{(m)} e^{-k_m v_2 y} + F_4^{(m)} e^{k_m v_2 y}) y e^{i\phi_m} + k.e. \quad (3.31b)$$

formlarında seçilebilirler. Bu çözüm formları (3.27a) ve (3.27b) denklemlerinde yerleştirilir ve belirsiz katsayılar metodunun kuralları uygulanırsa gerekli ara işlemlerden sonra  $F^{(1)}$  ve  $F^{(m)}$  katsayı fonksiyonları aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$F_1^{(1)} = \frac{-R_1^{(1)} M_{11}^{(1,1)}}{p_1 k_1 c_1^2}, \quad F_2^{(1)} = \frac{R_2^{(1)} M_{11}^{(1,1)}}{p_1 k_1 c_1^2},$$

$$F_3^{(1)} = \frac{iR_3^{(1)} M_{11}^{(2,1)}}{v_2 k_1 c_2^2}, \quad F_4^{(1)} = \frac{iR_4^{(1)} M_{11}^{(2,1)}}{v_2 k_1 c_2^2}$$

(3.32)

$$F_1^{(m)} = \frac{-R_1^{(m)} M_{11}^{(1,m)}}{p_1 k_m c_1^2}, \quad F_2^{(m)} = \frac{R_2^{(m)} M_{11}^{(1,m)}}{p_1 k_m c_1^2},$$

$$F_3^{(m)} = \frac{iR_3^{(m)} M_{11}^{(2,m)}}{v_2 k_m c_2^2}, \quad F_4^{(m)} = \frac{iR_4^{(m)} M_{11}^{(2,m)}}{v_2 k_m c_2^2}$$

Diğer taraftan, (3.30a) ve (3.30b) homojen denklemlerinin çözümleri de birinci merteye problemdeki gibi değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak aşağıdaki formlarda elde edilirler:

$$\tilde{u}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ A_2^{(l)} e^{ik_1 p_1 y} + B_2^{(l)} e^{-ik_1 p_1 y} \right\} e^{il\phi} + k.e. \quad (3.33a)$$

$$\tilde{v}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ C_2^{(l)} e^{-lkv_2 y} + D_2^{(l)} e^{lkv_2 y} \right\} e^{il\phi} + k.e. \quad (3.33b)$$

Burada  $A_2^{(l)}, B_2^{(l)}, C_2^{(l)}$  ve  $D_2^{(l)}$ ,  $(x_1, x_2, t_1, t_2)$  yavaş değişkenlerine bağlı ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve (3.30) sınır koşullarında kullanılarak hesaplanırlar.

Birinci mertebe problemin çözümünde yaptığımız gibi  $U_2^{(l)} = (A_2^{(l)} B_2^{(l)} C_2^{(l)} D_2^{(l)})^T$  vektörünü tanımlayalım. (3.33)'de verilen çözümler (3.30) koşullarında kullanılırsa  $U_2^{(l)}$ 'ler için aşağıdaki cebrik denklem sistemi elde edilir:

$$W_l U_2^{(l)} = b_2^{(l)} \quad (3.34)$$

Burada,

$$b_2^{(1)} \neq 0, \quad b_2^{(m)} \neq 0 \quad \text{ve } l \neq 1, m \text{ için } b_2^{(l)} = 0 \quad (3.35)$$

dır.  $l=1$  ve  $l=m$  için  $b_2^{(1)}$  ve  $b_2^{(m)}$  aşağıdaki formda elde edilirler:

$$b_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -F_1^{(1)}(1 + ik_1 p_1 h_1) e^{ik_1 p_1 h_1} - F_2^{(1)}(1 - ik_1 p_1 h_1) e^{-ik_1 p_1 h_1} \\ -F_3^{(1)}(1 + k_1 v_2 h_2) e^{k_1 v_2 h_2} - F_4^{(1)}(1 - k_1 v_2 h_2) e^{-k_1 v_2 h_2} \\ -(F_1^{(1)} + F_2^{(1)}) + \gamma(F_3^{(1)} + F_4^{(1)}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$b_2^{(m)} = \begin{bmatrix} -F_1^{(m)}(1 + ik_m p_1 h_1) e^{ik_m p_1 h_1} - F_2^{(m)}(1 - ik_m p_1 h_1) e^{-ik_m p_1 h_1} \\ -F_3^{(m)}(1 + k_m v_2 h_2) e^{k_m v_2 h_2} - F_4^{(m)}(1 - k_m v_2 h_2) e^{-k_m v_2 h_2} \\ -(F_1^{(m)} + F_2^{(m)}) + \gamma(F_3^{(m)} + F_4^{(m)}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Burada,  $l=1, m$  için  $\det W_1 = 0$  ve  $\det W_m = 0$  ve  $b_2^{(1)} \neq 0$  ve  $b_2^{(m)} \neq 0$ ' dır (3.34) homojen olmayan cebrik denklem sisteminin  $l=1, m$  için çözüme sahip olabilmesi için  $L^{(1)}$  ve  $L^{(m)}$  vektörleri,

$$L^{(1)} W_1 = 0 \quad \text{ve} \quad L^{(m)} W_m = 0 \quad (3.37)$$

denklemleri ile tanımlanan satır vektörler olmak üzere

$$L^{(1)}b_2^{(1)} = 0 \quad \text{ve} \quad L^{(m)}b_2^{(m)} = 0 \quad (3.38)$$

uygunluk koşullarının sağlanması gerekir. (3.37)' nin çözümleri

$$l=1,m \text{ için } L^{(l)} = \left( \frac{-1}{\cos k_l h_1 p_1}, \frac{\gamma}{\cosh k_l h_2 v_2}, 1, -\gamma k_l v_2 \tanh k_l h_2 v_2 \right) \quad (3.39)$$

olarak hesaplanabilir.

Diğer taraftan  $W_l$  ( $l=1,m$ ) matrisinin ve  $R_j^{(l)}$  vektörünün tanımlarını kullanarak gerekli hesaplamalar yapılırsa,  $b_2^{(l)}$  vektörü aşağıdaki formda yazılabilir:

$$b_2^{(l)} = -i \left( \frac{\partial A_1^{(l)}}{\partial t_1} \frac{\partial W_l}{\partial w_l} - \frac{\partial A_1^{(l)}}{\partial x_1} \frac{\partial W_l}{\partial k_l} \right) R^{(l)}, \quad l=1,m \quad (3.40)$$

(3.23)' de verilen bağıntı,  $W_1 R^{(1)} = 0$ ,  $k_1$ 'e ve  $W_m R^{(m)} = 0$  ise  $k_m$ 'e göre türetilirse,

$$\left( \frac{\partial W_l}{\partial k_l} + V_g^{(l)} \frac{\partial W_l}{\partial w_l} \right) R^{(l)} + W_l \left( \frac{\partial R^{(l)}}{\partial k_l} + V_g^{(l)} \frac{\partial R^{(l)}}{\partial w_l} \right) = 0, \quad l=1,m \quad (3.41)$$

denklemleri elde edilir. Burada,

$$l=1,m \text{ için } V_g^{(l)} = \frac{dw_l}{dk_l} \quad (3.42)$$

olarak tanımlanmaktadır.  $V_g^{(1)}$  ve  $V_g^{(m)}$ , sırasıyla temel dalga ve onun  $m$ . harmoniğinin grup hızlarını göstermektedir. (3.41) denklemini soldan  $L^{(l)}$  vektörü ile çarpılıp (3.37) dikkate alınır

$$l=1,m \text{ için } V_g^{(l)} = - \left( L^{(l)} \frac{\partial W_l}{\partial k_l} R^{(l)} \right) / \left( L^{(l)} \frac{\partial W_l}{\partial w_l} R^{(l)} \right) \quad (3.43)$$

olduğu bulunur. (3.36)' da verilen  $b_2^{(l)}$  ( $l=1,m$ ) ve (3.43) kullanılırsa  $L^{(l)}b_2^{(l)} = 0$  uygunluk koşulunda

$$\frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial t_1} + V_g^{(1)} \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial x_1} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial A_1^{(m)}}{\partial t_1} + V_g^{(m)} \frac{\partial A_1^{(m)}}{\partial x_1} = 0 \quad (3.44)$$

olduğu görülür. Bu ise  $A_1^{(1)}$  ve  $A_1^{(m)}$  genlik fonksiyonlarının sırasıyla  $V_g^{(1)}$  grup hızı ve  $V_g^{(m)}$  grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldıklarını gösterir. O halde,

$$A_1^{(1)} = A_1^{(1)}(x_1 - V_g^{(1)}t_1, x_2, t_2) \quad \text{ve} \quad A_1^{(m)} = A_1^{(m)}(x_1 - V_g^{(m)}t_1, x_2, t_2) \quad (3.45)$$

yapısında olacaklardır. Böylece, (3.34) denkleminin çözümü, (3.41) ve (3.43) kullanılarak  $l=1, m$  için

$$U_2^{(l)} = A_2^{(l)} R^{(l)} - i \frac{\partial A_1^{(l)}}{\partial x_1} \left( \frac{\partial R^{(l)}}{\partial k_l} + V_g^{(l)} \frac{\partial R^{(l)}}{\partial \omega_l} \right) \quad (3.46)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $A_2^{(1)}$  ve  $A_2^{(m)}$  fonksiyonlarının temel dalga ve onun  $m$ . harmoniğinin ikinci merteye yavaş değişen genliğini temsil eden fonksiyonlardır.

Bu çalışmada sadece birinci merteye çözüm inşa edileceği için  $A_2^{(1)}$  ve  $A_2^{(m)}$  genlik fonksiyonlarının açık yapılarına ihtiyacımız olmayacaktır.  $l \neq 1, m$  için  $\det W_l \neq 0$  kabul edildiği için  $b_2^{(l)} \equiv 0$  olur ve

$$U_2^{(l)} \equiv 0, \quad l \neq 1, m \quad (3.47)$$

olarak bulunur.

Şimdi, birinci merteye genlik fonksiyonlarını tam olarak belirleyebilmek için üçüncü merteye pertürbasyon probleminin çözümünü inşa edelim. Bunun için elde edilen birinci ve ikinci merteye çözümleri (3.10a,b) denklemlerinde kullanılırsa, gerekli ara işlemlerden sonra hareket denklemleri aşağıdaki formda elde edilirler:

$$\begin{aligned} L_0^{(1)} u_3 = & [(D_1 + D_2 y) e^{ik_1 p_1 y} + (D_3 + D_4 y) e^{-ik_1 p_1 y} + D_5 e^{3ik_1 p_1 y} + D_6 e^{-3ik_1 p_1 y} \\ & + D_7 e^{i(k_1 - 2k_m) p_1 y} + D_8 e^{-i(k_1 + 2k_m) p_1 y} + D_9 e^{i(k_1 + 2k_m) p_1 y} \\ & + D_{10} e^{i(-k_1 + 2k_m) p_1 y}] e^{i\phi_1} + [(D_{11} + D_{12} y) e^{ik_m p_1 y} + (D_{13} + D_{14} y) e^{-ik_m p_1 y} \\ & + D_{15} e^{3ik_m p_1 y} + D_{16} e^{-3ik_m p_1 y} + D_{17} e^{i(k_m - 2k_1) p_1 y} + D_{18} e^{-i(k_m + 2k_1) p_1 y} \\ & + D_{19} e^{i(k_m + 2k_1) p_1 y} + D_{20} e^{i(-k_m + 2k_1) p_1 y}] e^{i\phi_m} + (e^{3i\phi_1}, e^{3i\phi_m}, e^{i(\phi_1 + 2\phi_m)}, \\ & e^{i(\phi_m + 2\phi_1)}, e^{i(\phi_m - 2\phi_1)}, e^{i(2\phi_m - \phi_1)}) \text{'li terimler} + k.e. \end{aligned}$$

(3.48a)

$$\begin{aligned}
L_0^{(2)}v_3 = & [(D_{21} + D_{22}y)e^{-k_1v_2y} + (D_{23} + D_{24}y)e^{k_1v_2y} + D_{25}e^{-3k_1v_2y} \\
& + D_{26}e^{3k_1v_2y} + D_{27}e^{(k_1-2k_m)v_2y} + D_{28}e^{(k_1+2k_m)v_2y} \\
& + D_{29}e^{-(k_1+2k_m)v_2y} + D_{30}e^{-(k_1+2k_m)v_2y}]e^{i\phi_1} + [(D_{31} + D_{32}y)e^{-k_mv_2y} \\
& + (D_{33} + D_{34}y)e^{k_mv_2y} + D_{35}e^{-3k_mv_2y} + D_{36}e^{3k_mv_2y} + D_{37}e^{(k_m-2k_1)v_2y} \\
& + D_{38}e^{(k_m+2k_1)v_2y} + D_{39}e^{-(k_m+2k_1)v_2y} + D_{40}e^{-(k_m+2k_1)v_2y}]e^{i\phi_m} + (e^{3i\phi_1}, e^{3i\phi_m}, e^{i(\phi_1+2\phi_m)}, \\
& e^{i(\phi_m+2\phi_1)}, e^{i(\phi_m-2\phi_1)}, e^{i(2\phi_m-\phi_1)} \text{ 'li terimler) } + k.e.
\end{aligned}
\tag{3.48b}$$

Daha önceden de belirtildiği gibi bu çalışmada biz temel dalga ( $l=1$ ) ile onun  $m$ . harmoniğinin ( $l=m$ ) etkileşimini inceliyoruz. Bölüm 2.4' de  $m=3$  üçüncü harmonik rezonans ve  $m=5$  beşinci harmonik rezonansın ortaya çıktığı  $(k, w)$  değerlerinin bulunması için analiz yürütülmüştü. Özel olarak  $m=3$  olması durumu yani üçüncü harmonik rezonans koşulunun sağlandığı durumda  $(k_m, w_m) = (3k_1, 3w_1)$  olacaktır. Bu durumda (3.48) denkleminin sağ yanındaki, bazı terimlerin

$$e^{i(2\phi_1+\phi_m)} = e^{5i\phi}, \quad e^{i(2\phi_m+\phi_1)} = e^{7i\phi}, \quad e^{i(\phi_m-2\phi_1)} = e^{i\phi}$$

formunda olması gerektiği çıkar.  $e^{i(\phi_3-2\phi_1)} = e^{i\phi}$  ve  $e^{-i(\phi_3-2\phi_1)} = e^{-i\phi}$  olacağı için,  $e^{i(\phi_3-2\phi_1)}$  ve  $e^{-i(\phi_3-2\phi_1)}$  'li terimlerden gelecek olan katkılarında gözönünde bulundurularak  $e^{i\phi}$  ve  $e^{-i\phi}$  terimlerinin katsayılarına eklenmelidir. Şimdi temel dalga ile beşinci harmoniğinin etkileşimi için incelemeye devam edilecektir.

### 3.2.1 Temel dalga ile beşinci harmoniğinin etkileşimi

(3.48a,b) denklemlerinde  $k_1 = k$ ,  $w_1 = w$  ve  $m=5$  için  $k_5 = 5k$  ve  $w_5 = 5w$  yazılırsa gerekli düzenlemelerden sonra (3.48a,b) denklemleri aşağıdaki forma indirgenir:

$$\begin{aligned}
L_0^{(1)}u_3 = & [(D_1 + D_2y)e^{ikp_1y} + (D_3 + D_4y)e^{-ikp_1y} + D_5e^{3ikp_1y} \\
& + D_6e^{-3ikp_1y} + D_7e^{-9ikp_1y} + D_8e^{-11ikp_1y} \\
& + D_9e^{11ikp_1y} + D_{10}e^{9ikp_1y}]e^{i\phi} + [(D_{11} + D_{12}y)e^{5ikp_1y} \\
& + (D_{13} + D_{14}y)e^{-5ikp_1y} + D_{15}e^{15ikp_1y} + D_{16}e^{-15ikp_1y} \\
& + D_{17}e^{3ikp_1y} + D_{18}e^{-7ikp_1y} + D_{19}e^{7ikp_1y} + D_{20}e^{-3ikp_1y}]e^{5i\phi} + \\
& (e^{3i\phi}, e^{7i\phi}, e^{9i\phi}, e^{11i\phi}, e^{15i\phi} \text{ 'li terimler) } + k.e.
\end{aligned}
\tag{3.49a}$$



$$\begin{aligned}
L_0^{(2)}v_3 = & [(D_{21} + D_{22}y)e^{-kv_2y} + (D_{23} + D_{24}y)e^{kv_2y} + D_{25}e^{-3kv_2y} \\
& + D_{26}e^{3kv_2y} + D_{27}e^{-9kv_2y} + D_{28}e^{11kv_2y} \\
& + D_{29}e^{-11kv_2y} + D_{30}e^{9kv_2y}]e^{i\phi} + [(D_{31} + D_{32}y)e^{-5kv_2y} \\
& + (D_{33} + D_{34}y)e^{5kv_2y} + D_{35}e^{-15kv_2y} + D_{36}e^{15kv_2y} + D_{37}e^{3kv_2y} \\
& + D_{38}e^{7kv_2y} + D_{39}e^{-7kv_2y} + D_{40}e^{-3kv_2y}]e^{5i\phi} + \\
& (e^{3i\phi}, e^{7i\phi}, e^{9i\phi}, e^{11i\phi}, e^{15i\phi} \text{ 'li terimler}) + k.e.
\end{aligned} \tag{3.49b}$$

Burada,  $D_i$ ,  $i=1,2,\dots,40$  katsayılarının açık ifadeleri **Ek A.**'da **(A.3.1)**' de verilmektedir.

Şimdi üçüncü mertebe probleme ait hareket denklemlerini ele alalım. Üçüncü mertebe problemde yer alan denklemler de ikinci mertebe problem gibi homojen olmayan denklemlerdir. Dolayısıyla, üçüncü mertebe çözümler de

$$u_3 = \tilde{u}_3 + \bar{u}_3 \tag{3.50a}$$

$$v_3 = \tilde{v}_3 + \bar{v}_3 \tag{3.50b}$$

olacak şekilde ikiye ayrılabilir, öyle ki  $\bar{u}_3$  ve  $\bar{v}_3$ , sırasıyla **(3.49a)** ve **(3.49b)** homojen olmayan denklemlerinin özel çözümlerini;  $\tilde{u}_3$  ve  $\tilde{v}_3$  ise,

$$L_0^{(1)}(\tilde{u}_3) = 0 \tag{3.51a}$$

$$L_0^{(2)}(\tilde{v}_3) = 0 \tag{3.51b}$$

homojen denklemlerinin ve aşağıda verilen homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar.

$$y = h_1 \text{ 'de } \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} \tag{3.51c}$$

$$y = -h_2 \text{ 'de } \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y} \tag{3.51d}$$

$$y = 0 \text{ 'da } \tilde{u}_3 - \tilde{v}_3 = -(\bar{u}_3 - \bar{v}_3) \tag{3.51e}$$

ve

$$\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y}\right) . \tag{3.51f}$$

(3.49a) ve (3.49b) denklemlerinin özel çözümleri  $\bar{u}_3$  ve  $\bar{v}_3$  fonksiyonları,

$$\bar{u}_3 = f_3^{(1)} e^{i\phi} + f_3^{(3)} e^{3i\phi} + f_3^{(5)} e^{5i\phi} + f_3^{(7)} e^{7i\phi} + f_3^{(9)} e^{9i\phi} + f_3^{(11)} e^{11i\phi} + f_3^{(15)} e^{15i\phi} + k.e. \quad (3.52a)$$

$$\bar{v}_3 = g_3^{(1)} e^{i\phi} + g_3^{(3)} e^{3i\phi} + g_3^{(5)} e^{5i\phi} + g_3^{(7)} e^{7i\phi} + g_3^{(9)} e^{9i\phi} + g_3^{(11)} e^{11i\phi} + g_3^{(15)} e^{15i\phi} + k.e. \quad (3.52b)$$

şeklinde seçilebilir. Dikkat edilirse  $\bar{u}_3$  ve  $\bar{v}_3$  özel çözüm formlarında  $e^{i\phi}$  ve  $e^{5i\phi}$  terimlerine ek olarak  $e^{3i\phi}, e^{7i\phi}, e^{9i\phi}, e^{11i\phi}, e^{15i\phi}$  terimlerinin de olması gerektiği görülür. Ancak biz bu çalışmada temel dalga ile onun beşinci harmoniğinin etkileşimini incelediğimiz için bu terimlerin katsayılarının açık ifadelerini bulmamıza gerek olmayacaktır. Yani  $e^{i\phi}$  ve  $e^{5i\phi}$  li terimlerin katsayıları olan  $f_3^{(1)}, f_3^{(5)}, g_3^{(1)}, g_3^{(5)}$  katsayıları hesaplanacaktır.

$$f_3^{(1)} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 y) y e^{ikp_1 y} + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4 y) y e^{-ikp_1 y} + \varepsilon_5 e^{3ikp_1 y} + \varepsilon_6 e^{-3ikp_1 y} + \varepsilon_7 e^{-9ikp_1 y} + \varepsilon_8 e^{-11ikp_1 y} + \varepsilon_9 e^{11ikp_1 y} + \varepsilon_{10} e^{9ikp_1 y} + k.e. \quad (3.53a)$$

$$f_3^{(5)} = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} y) y e^{5ikp_1 y} + (\varepsilon_{13} + \varepsilon_{14} y) y e^{-5ikp_1 y} + \varepsilon_{15} e^{15ikp_1 y} + \varepsilon_{16} e^{-15ikp_1 y} + \varepsilon_{17} e^{3ikp_1 y} + \varepsilon_{18} e^{-7ikp_1 y} + \varepsilon_{19} e^{7ikp_1 y} + \varepsilon_{11} e^{-3ikp_1 y} + k.e. \quad (3.53b)$$

$$g_3^{(1)} = (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} y) y e^{-kv_2 y} + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{24} y) y e^{kv_2 y} + \varepsilon_{25} e^{-3kv_2 y} + \varepsilon_{26} e^{3kv_2 y} + \varepsilon_{27} e^{-9kv_2 y} + \varepsilon_{28} e^{11kv_2 y} + \varepsilon_{29} e^{-11kv_2 y} + \varepsilon_{30} e^{9kv_2 y} + k.e. \quad (3.54a)$$

$$g_3^{(5)} = (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} y) y e^{-5kv_2 y} + (\varepsilon_{33} + \varepsilon_{34} y) y e^{5kv_2 y} + \varepsilon_{35} e^{-15kv_2 y} + \varepsilon_{36} e^{15kv_2 y} + \varepsilon_{37} e^{3kv_2 y} + \varepsilon_{38} e^{7kv_2 y} + \varepsilon_{39} e^{-7kv_2 y} + \varepsilon_{40} e^{-3kv_2 y} + k.e. \quad (3.54b)$$

şeklinde seçilebilirler.

(3.52a,b) çözümleri (3.49a,b) denkleminde kullanılırsa, gerekli ara işlemlerden sonra  $\varepsilon_i$  katsayıları ( $i=1, \dots, 40$ ) elde edilirler. Bu katsayıların açık ifadeleri **Ek A.**' da (A.3.4)' de verilmektedir.

Üçüncü mertebe homojen denklemlerin çözümleri ise  $\tilde{u}_3$  ve  $\tilde{v}_3$  aşağıdaki biçimde alınırlar:

$$\tilde{u}_3 = \sum_{l=1}^{\infty} (A_3^{(l)} e^{ilkp_1 y} + B_3^{(l)} e^{-ilkp_1 y}) e^{il\phi} + k.e. \quad (3.55a)$$

$$\tilde{v}_3 = \sum_{l=1}^{\infty} (C_3^{(l)} e^{-lkv_2 y} + D_3^{(l)} e^{lkv_2 y}) e^{il\phi} + k.e. \quad (3.55b)$$

(3.55a) ve (3.55b) ile verilen homojen çözümler, (3.52a) ve (3.52b) ile verilen özel çözümlerle birlikte (3.51) (c-f) sınır koşullarında kullanılırsa,

$$W_1 U_3^{(1)} = b_3^{(1)} \quad \text{ve} \quad W_5 U_3^{(5)} = b_3^{(5)} \quad (3.56)$$

cebrik denklem sistemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15 \text{ için} \quad b_3^{(n)} &\neq 0 \\ l \neq n \text{ için} \quad b_3^{(l)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

dır.  $n = 1$  ve  $n = 5$  için  $b_3^{(1)}$  ve  $b_3^{(5)}$  vektörlerini uzun ara işlemlerden sonra aşağıdaki formda açık olarak yazabiliriz:

$$b_3^{(1)} = \bar{b}_3^{(1)} + F^{(11)} |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} + F^{(51)} |A_1^{(5)}|^2 A_1^{(1)} \quad (3.58a)$$

$$b_3^{(5)} = \bar{b}_3^{(5)} + F^{(55)} |A_1^{(5)}|^2 A_1^{(5)} + F^{(15)} |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(5)} \quad (3.58b)$$

Burada,  $b_3^{(l)}$ ,  $l = 1, 5$  vektörlerinin açık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \bar{b}_3^{(l)} = & \left[ -i \left( \frac{\partial W_l}{\partial w_l} \frac{\partial A_2^{(l)}}{\partial t_1} - \frac{\partial W_l}{\partial k_l} \frac{\partial A_2^{(l)}}{\partial x_1} \right) - i \left( \frac{\partial W_l}{\partial w_l} \frac{\partial A_1^{(l)}}{\partial t_2} - \frac{\partial W_l}{\partial k_l} \frac{\partial A_1^{(l)}}{\partial x_2} \right) \right] R^{(l)} \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W_l}{\partial w_l^2} \frac{\partial^2 A_1^{(l)}}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 W_l}{\partial w_l \partial k_l} \frac{\partial^2 A_1^{(l)}}{\partial t_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 W_l}{\partial k_l^2} \frac{\partial^2 A_1^{(l)}}{\partial x_1^2} \right) R^{(l)} \\ & + \left[ \left( \frac{\partial W_l}{\partial k_l} \frac{\partial^2 A_1^{(l)}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial W_l}{\partial w_l} \frac{\partial^2 A_1^{(l)}}{\partial t_1 \partial x_1} \right) \left( \frac{\partial R_l}{\partial k_l} + V_s^{(l)} \frac{\partial R_l}{\partial w_l} \right) \right] R^{(l)}, \quad l = 1, 5 \end{aligned} \quad (3.59)$$

$(\alpha\beta) = (15)$  ve  $(\alpha\beta) = (51)$  ve  $\alpha, \beta = 1, 5$   $\alpha \neq \beta$  olmak üzere,  $F^{(11)}$ ,  $F^{(55)}$  ve  $F^{(\alpha\beta)}$  vektörlerinin bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$F_1^{(\alpha\alpha)} = -\beta_1 h_1 k_\alpha^4 (9 + 2p_1^2 + 9p_1^4) \frac{\cosh^3(k_\alpha h_2 v_2)}{\cos^3(k_\alpha h_1 p_1)} e^{-3k_\alpha v_2 h_2},$$

$$F_2^{(\alpha\alpha)} = \beta_2 h_2 k_\alpha^4 (9 - 2p_1^2 + 9p_1^4) e^{-3k_\alpha v_2 h_2},$$

$$\begin{aligned}
F_3^{(\alpha\alpha)} &= \beta_1 \frac{k_\alpha^3}{p_1} \frac{\cosh^3(k_\alpha h_2 v_2)}{\cos^3(k_\alpha h_1 p_1)} \left[ (9 + 2p_1^2 + 9p_1^4) \sin(k_\alpha p_1 h_1) - \frac{3}{4} (-3 - 2p_1^2 + 9p_1^4) \sin(3k_\alpha p_1 h_1) \right] e^{-3k_\alpha v_2 h_2} \\
&\quad + \gamma \beta_2 \frac{k_\alpha^3}{v_2} \left[ (9 - 2v_2^2 + 9v_2^4) \sinh(k_\alpha p_1 h_1) - \frac{3}{4} (-3 + 2v_2^2 + 9v_2^4) \sinh(3k_\alpha p_1 h_1) \right] e^{-3k_\alpha v_2 h_2} \\
&\quad - 2\beta_1 p_1 k_\alpha^3 \frac{\cosh^3(k_\alpha h_2 v_2)}{\cos^3(k_\alpha h_1 p_1)} \left[ (1 - 3p_1^2) \sin(3k_\alpha p_1 h_1) + (1 + 9p_1^2) \sin(k_\alpha p_1 h_1) \right] e^{-3k_\alpha v_2 h_2} \\
&\quad + 2\gamma \beta_2 v_2 k_\alpha^3 \left[ (1 + 3v_2^2) \sinh(3k_\alpha p_1 h_1) + \frac{3}{4} (1 - 9v_2^2) \sinh(k_\alpha p_1 h_1) \right] e^{-3k_\alpha v_2 h_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4^{(\alpha\alpha)} &= -\beta_1 \frac{k_\alpha^2}{4p_1^2} \frac{\cosh^3(k_\alpha h_2 v_2)}{\cos^3(k_\alpha h_1 p_1)} \left[ (-3 - 2p_1^2 + 9p_1^4) \cos(3k_\alpha p_1 h_1) \right] e^{-3k_\alpha v_2 h_2} \\
&\quad - \beta_2 \frac{k_\alpha^2}{4v_2^2} \left[ (-3 + 2v_2^2 + 9v_2^4) \cosh(3k_\alpha v_2 h_2) \right] e^{-3k_\alpha v_2 h_2}.
\end{aligned}$$

(3.59)

$$F_1^{(\alpha\beta)} = -4\beta_1 h_1 k_\alpha^2 k_\beta^2 (3 + 2p_1^2 + 3p_1^4) \frac{\cosh^2(k_\alpha h_2 v_2)}{\cos^2(k_\alpha h_1 p_1)} \frac{\cosh(k_\beta h_2 v_2)}{\cos(k_\beta h_1 p_1)} e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2},$$

$$F_2^{(\alpha\beta)} = 4\beta_2 h_2 k_\alpha^2 k_\beta^2 (3 - 2v_2^2 + 3v_2^4) e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2},$$

$$\begin{aligned}
F_3^{(\alpha\beta)} = & 4\beta_1 \frac{k_\alpha^2 k_\beta \cosh^2(k_\alpha h_2 v_2) \cosh(k_\beta h_2 v_2)}{p_1 \cos^2(k_\alpha h_1 p_1) \cos(k_\beta h_1 p_1)} \left[ (3 + 2p_1^2 + 3p_1^4) \sin(k_\beta p_1 h_1) \right] e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \\
& + \beta_1 \frac{k_\alpha^2 k_\beta (2k_\alpha + k_\beta) \left[ (3k_\beta + 2k_\alpha p_1^2 - 3(k_\beta + 2k_\alpha)p_1^4) \right] \sin(2k_\alpha + k_\beta) p_1 h_1 \cosh^2(k_\alpha h_2 v_2) \cosh(k_\beta h_2 v_2)}{p_1 (k_\alpha + k_\beta) \cos^2(k_\alpha h_1 p_1) \cos(k_\beta h_1 p_1)} e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \\
& + \beta_1 \frac{k_\alpha^2 k_\beta (2k_\alpha - k_\beta) \left[ (3k_\beta + 2k_\alpha p_1^2 - 3(k_\beta - 2k_\alpha)p_1^4) \right] \sin(2k_\alpha - k_\beta) p_1 h_1 \cosh^2(k_\alpha h_2 v_2) \cosh(k_\beta h_2 v_2)}{p_1 (k_\alpha - k_\beta) \cos^2(k_\alpha h_1 p_1) \cos(k_\beta h_1 p_1)} e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \\
& + 4\gamma\beta_2 \frac{k_\alpha^2 k_\beta}{v_2} \left[ (3 - 2v_2^2 + 3v_2^4) \sinh(k_\beta v_2 h_2) \right] e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \\
& - \gamma\beta_2 \frac{k_\alpha^2 k_\beta (2k_\alpha + k_\beta) \left[ (-3k_\beta + 2k_\alpha v_2^2 + 3(k_\beta + 2k_\alpha)v_2^4) \right] \sinh(2k_\alpha + k_\beta) v_2 h_2}{v_2 (k_\alpha + k_\beta)} e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \\
& - \gamma\beta_2 \frac{k_\alpha^2 k_\beta (2k_\alpha - k_\beta) \left[ (-3k_\beta + 2k_\alpha v_2^2 + 3(k_\beta + 2k_\alpha)v_2^4) \right] \sinh(2k_\alpha - k_\beta) v_2 h_2}{v_2 (k_\alpha - k_\beta)} e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \\
F_4^{(\alpha\beta)} = & \beta_1 \frac{k_\alpha k_\beta \left[ (3k_\beta + 2k_\alpha p_1^2 - 3(k_\beta - 2k_\alpha)p_1^4) \right] \cos(2k_\alpha + k_\beta) p_1 h_1 \cosh^2(k_\alpha h_2 v_2) \cosh(k_\beta h_2 v_2)}{p_1^2 (k_\alpha + k_\beta) \cos^2(k_\alpha h_1 p_1) \cos(k_\beta h_1 p_1)} e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \\
& + \beta_1 \frac{k_\alpha k_\beta \left[ (3k_\beta + 2k_\alpha p_1^2 - 3(k_\beta - 2k_\alpha)p_1^4) \right] \cos(2k_\alpha - k_\beta) p_1 h_1 \cosh^2(k_\alpha h_2 v_2) \cosh(k_\beta h_2 v_2)}{p_1^2 (k_\alpha - k_\beta) \cos^2(k_\alpha h_1 p_1) \cos(k_\beta h_1 p_1)} e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \\
& - \beta_2 \frac{k_\alpha k_\beta \left[ (-3k_\beta + 2k_\alpha v_2^2 + 3(k_\beta + 2k_\alpha)v_2^4) \right] \cosh(2k_\alpha + k_\beta) v_2 h_2}{v_2^2 (k_\alpha + k_\beta)} e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \\
& - \beta_2 \frac{k_\alpha k_\beta \left[ (-3k_\beta + 2k_\alpha v_2^2 + 3(k_\beta + 2k_\alpha)v_2^4) \right] \cosh(2k_\alpha - k_\beta) v_2 h_2}{v_2^2 (k_\alpha - k_\beta)} e^{-(2k_\alpha + k_\beta)v_2 h_2} \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Burada,  $b_3^{(n)}$  ( $n \neq 1, 5$ ) vektörlerinin açık ifadeleri incelememizde gerekli olmadığından verilmemiştir.  $F^{(\alpha\alpha)}$ ,  $F^{(\alpha\beta)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 5, \alpha \neq \beta$ ) vektörleri lineer ve nonlinear malzeme parametrelerine ve dalga sayılarına bağlıdır. Nonlinear malzeme parametreleri  $n_1 = 0$  ve  $n_2 = 0$  olduğunda  $F^{(\alpha\alpha)} = 0$  ve  $F^{(\alpha\beta)} = 0$  olur.

Ayrıca şu noktaya da dikkat çekmek gerekir;  $h_2 \rightarrow \infty$  için yukarıda incelenen problem fiziksel ve geometrik olarak daha önce [9]' da tek tabaka ile kaplı yarı sonsuz uzay modeli için incelenen Love dalgalarının beşinci harmonik rezonans etkileşimi problemine dönüşür. Bu nedenle Bölüm 3.2.1'deki sonuçların da [9]' da

elde edilen sonuçlara dönüşmesi gerekir. Yukarıdaki hesaplardan da hemen görülür ki (3.59) ve (3.60) denklemlerinde tanımlanan  $F^{(\alpha\alpha)}$ ,  $F^{(\alpha\beta)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 5, \alpha \neq \beta$ ) vektörleri  $h_2 \rightarrow \infty$  limitinde [9]'daki  $F^{(\alpha\alpha)}$ ,  $F^{(\alpha\beta)}$ 'ya indirgenebilmektedir.

$l = 1, 5$  için  $b_3^{(l)} \neq 0$  ve  $\det W_l = 0$  olduğundan  $W_l U_3^{(l)} = b_3^{(l)}$  denkleminin bir çözüme sahip olabilmesi için  $L^{(l)}$ ,  $l = 1, 5$  (3.39) ile tanımlanan satır vektör olmak üzere

$$L^{(l)} b_3^{(l)} = 0, \quad l = 1, 5 \quad (3.61)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. (3.61)'de (3.40) ve (3.41) bağıntıları kullanılırsa, yukarıdaki uygunluk koşulu  $l = 1$  ve  $l = 5$  için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial t_2} + V_g^{(1)} \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial x_2} \right) + i \left( \frac{\partial A_2^{(1)}}{\partial t_1} + V_g^{(1)} \frac{\partial A_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) + \bar{\Gamma}^{(1)} \frac{\partial^2 A_1^{(1)}}{\partial x_1^2} + \bar{\Delta}^{(11)} |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} \\ + \bar{\Delta}^{(51)} |A_1^{(5)}|^2 A_1^{(1)} = 0 \\ i \left( \frac{\partial A_1^{(5)}}{\partial t_2} + V_g^{(5)} \frac{\partial A_1^{(5)}}{\partial x_2} \right) + i \left( \frac{\partial A_2^{(5)}}{\partial t_1} + V_g^{(5)} \frac{\partial A_2^{(5)}}{\partial x_1} \right) + \bar{\Gamma}^{(5)} \frac{\partial^2 A_1^{(5)}}{\partial x_1^2} + \bar{\Delta}^{(55)} |A_1^{(5)}|^2 A_1^{(5)} \\ + \bar{\Delta}^{(15)} |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(5)} = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Burada,  $\bar{\Gamma}^{(\alpha)}$ ,  $\bar{\Delta}^{(\alpha\beta)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 5, \alpha \neq \beta$ ) aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\bar{\Gamma}^{(\alpha)} = \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{2} L^{(\alpha)} \left( V_g^{(\alpha)^2} \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial w_\alpha^2} + 2V_g^{(\alpha)} \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial w_\alpha \partial k_\alpha} + \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial k_\alpha^2} \right) R^{(\alpha)} \\ & + \left( \frac{\partial W_\alpha}{\partial k_\alpha} + V_g^{(\alpha)} \frac{\partial W_\alpha}{\partial w_\alpha} \right) \left( \frac{\partial R^{(\alpha)}}{\partial k_\alpha} + V_g^{(\alpha)} \frac{\partial R^{(\alpha)}}{\partial w_\alpha} \right) / \left( L^{(\alpha)} \frac{\partial W_\alpha}{\partial k_\alpha} \right) R^{(\alpha)} \end{aligned} \right] \quad (3.63)$$

ve

$$\bar{\Delta}^{(\alpha\beta)} = \frac{L^{(\beta)} F^{(\alpha\beta)}}{L^{(\beta)} \left( \frac{\partial W_\beta}{\partial k_\beta} \right) R^{(\beta)}}, \quad \alpha, \beta = 1, 5, \quad \alpha \neq \beta \quad (3.64)$$

$\bar{\Gamma}^{(\alpha)}$  tabakayı oluşturan malzemelerin lineer özelliklerine ve  $k_\alpha$  dalga sayısına bağlı iken,  $\bar{\Delta}^{(\alpha\beta)}$  ise bunlara ek olarak ortamı oluşturan malzemelerin nonlineer özelliklerine de bağlıdır.

(3.62) denklemlerinde  $A_2^{(1)}$  ve  $A_2^{(5)}$  ikinci mertebe genlik fonksiyonlarının  $\{x_1, t_1\}$  yavaş değişkenlerine bağlılığının  $A_1^{(1)}$  ve  $A_1^{(5)}$  birinci mertebe genlik fonksiyonları gibi, sırasıyla  $x_1 - V_g^{(1)}t_1$  ve  $x_1 - V_g^{(5)}t_1$  formunda olduğunu kabul edersek, yani  $l=1$  ve  $l=5$  için

$$A_2^{(1)} = A_2^{(1)}(x_1 - V_g^{(1)}t_1, x_2, t_2) \quad \text{ve} \quad A_2^{(5)} = A_2^{(5)}(x_1 - V_g^{(5)}t_1, x_2, t_2) \quad (3.65)$$

olduğunu varsayarsak,  $l=1$  ve  $l=5$  için

$$\left( \frac{\partial A_2^{(1)}}{\partial t_1} + V_g^{(1)} \frac{\partial A_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad \text{ve} \quad \left( \frac{\partial A_2^{(5)}}{\partial t_1} + V_g^{(5)} \frac{\partial A_2^{(5)}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (3.66)$$

olduğu görülür. Bu koşullar altında (3.62) denklemleri yalnızca  $A_1^{(1)}$  ve  $A_1^{(5)}$  için aşağıdaki kuple denklemlere dönüşür:

$$i \left( \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial t_2} + V_g^{(1)} \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \bar{\Gamma}^{(1)} \frac{\partial^2 A_1^{(1)}}{\partial x_1^2} + \bar{\Delta}^{(11)} |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} + \bar{\Delta}^{(51)} |A_1^{(5)}|^2 A_1^{(1)} = 0 \quad (3.67a)$$

$$i \left( \frac{\partial A_1^{(5)}}{\partial t_2} + V_g^{(5)} \frac{\partial A_1^{(5)}}{\partial x_2} \right) + \bar{\Gamma}^{(5)} \frac{\partial^2 A_1^{(5)}}{\partial x_1^2} + \bar{\Delta}^{(55)} |A_1^{(5)}|^2 A_1^{(5)} + \bar{\Delta}^{(15)} |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(5)} = 0. \quad (3.67b)$$

Şimdi, yeni boyutsuz değişkenler ve sabitler tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \tau &= w_1 t_2, & \xi &= k_1 (x_1 - V_g^{(1)} t_1), \\ A^{(\alpha)} &= k_1 A_1^{(\alpha)}, & \Gamma^{(\alpha)} &= k_1^2 \frac{\bar{\Gamma}^{(\alpha)}}{w_1}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\Delta^{(\alpha\beta)} = \frac{\bar{\Delta}^{(\alpha\beta)}}{w_1 k_1^2}, \quad \Lambda = \frac{k_1}{\varepsilon w_1} (V_g^{(5)} - V_g^{(1)}).$$

Bu yeni değişkenlerin ve sabitlerin (3.67a,b)' de kullanılmasıyla  $A_1^{(1)}$  ve  $A_1^{(5)}$  boyutsuz genlik fonksiyonları için aşağıdaki kuple denklem sistemi elde edilir:

$$i \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \tau} + \Gamma^{(1)} \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2} + \Delta^{(11)} |A^{(1)}|^2 A^{(1)} + \Delta^{(51)} |A^{(5)}|^2 A^{(1)} = 0 \quad (3.69a)$$

$$i \frac{\partial A^{(5)}}{\partial \tau} + i\Lambda \frac{\partial A^{(5)}}{\partial \xi} + \Gamma^{(5)} \frac{\partial^2 A^{(5)}}{\partial \xi^2} + \Delta^{(55)} |A^{(5)}|^2 A^{(5)} + \Delta^{(15)} |A^{(1)}|^2 A^{(5)} = 0 \quad (3.69b)$$

Burada  $\Gamma^{(1)}$  ve  $\Gamma^{(5)}$  katsayıları lineer dispersiyon katsayılarıdır.  $\Delta^{(1)}$  ve  $\Delta^{(5)}$  katsayıları ise temel dalga ve onun beşinci harmoniğinin self modülasyonlarını tanımlayan nonlinear katsayılarıdır.  $\Delta^{(1)}$  ve  $\Delta^{(5)}$  katsayıları ise iki dalganın birbirleri ile etkileşen terimlerini gösteren katsayılarıdır. **(3.69a, b)**' de  $\Lambda = V_g^{(5)} - V_g^{(1)} = 0$  olarak alınırsa yani temel dalganın grup hızı ile onun beşinci harmoniğinin grup hızı birbirlerine eşit olursa, **(3.69a, b)** denklem sistemi kuple nonlinear Schrödinger denklem (KNLS) sistemi haline dönüşür;

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \tau} + \Gamma^{(1)} \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2} + \Delta^{(1)} |A^{(1)}|^2 A^{(1)} + \Delta^{(5)} |A^{(5)}|^2 A^{(1)} &= 0 \\ i \frac{\partial A^{(5)}}{\partial \tau} + \Gamma^{(5)} \frac{\partial^2 A^{(5)}}{\partial \xi^2} + \Delta^{(5)} |A^{(5)}|^2 A^{(5)} + \Delta^{(1)} |A^{(1)}|^2 A^{(5)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Ayrıca **(3.69a,b)** denklemlerinin,

$$A^{(1)}(\xi, 0) = A_0^{(1)}, \quad A^{(5)}(\xi, 0) = A_0^{(5)} \quad (3.71)$$

başlangıç koşulları altında genel olarak kesin analitik çözümünü yapmak mümkün değildir. Burada dikkat edilirse, **(3.69b)** denkleminde  $\Lambda$  katsayısını yok etmek için  $A^{(5)} \rightarrow A^{(5)} e^{-i(\Omega\xi - \mu\tau)}$  gibi bir değişken dönüşümü yöntemi de kullanılabilir. Gerekli ara işlemler sonucunda  $\Omega$  ve  $\mu$  katsayıları bulunarak ve dönüşümün aşağıdaki gibi olduğu sonucuna varılır:

$$A^{(5)} \rightarrow A^{(5)} e^{-i(\xi \frac{\Lambda}{2\Gamma^{(5)}} - \tau \frac{\Lambda^2}{4\Gamma^{(5)}})} \quad (3.72)$$

Bu durumda da **(3.69a,b)** denklemleri  $A^{(1)}$  ve  $A^{(5)}$  genlik fonksiyonları için **(3.70)**' de verilen KNLS denkleminde indirgenir.

Kuple NLS denklem sistemi, fiziğin jeofiziksel akışkanlar, nonlinear optikler gibi birçok dalında karşılaşılan denklem sistemidir. Bu sebepten, literatürde KNLS için solitary dalga çözümleri, periyodik dalga çözümleri arayışları ve kararlılık incelemeleri üzerine birçok çalışma bulmak mümkündür [24-31].

**(3.69a, b)** denklemlerinin  $A^{(1)}$  ve  $A^{(5)}$  genlik fonksiyonları bulunursa, **(3.68)**' deki değişken dönüşümleri kullanılarak **(3.25)** ve **(3.26)**' da verilen birinci mertebeye uniform geçerli çözümler tam olarak belirlenmiş olur.



$A^{(5)} = 0$  kabul edilirse, **(3.69a,b)** denklem sistemi iki tabakada yayılan  $A^{(1)}$  genlikli SH dalgalarının self modülasyonunu karakterize eden NLS denkleminde indirgenmiş olur [17,23];

$$i \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \tau} + \Gamma^{(1)} \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2} + \Delta^{(11)} |A^{(1)}|^2 A^{(1)} = 0 \quad (3.73)$$

Burada benzer analiz temel dalga ile onun üçüncü harmoniğinin etkileşimi için de yürütülebilir. Bu durumda **(3.48a, b)** denklemlerinde  $m=3$  için  $k_1 = k$ ,  $w_1 = w$  ve  $k_3 = 3k$ ,  $w_3 = 3w$  yazalım. Dikkat edilirse bu durumda  $e^{i(\phi_m - 2\phi_1)} = e^{i\phi}$ ,  $e^{-i(\phi_m - 2\phi_1)} = e^{-i\phi}$  olacağından bu terimlerden  $e^{\pm i\phi}$  terimine,  $e^{\pm 3i\phi}$  terimlerinden de  $e^{\pm 3i\phi}$  terimlerine katkı gelecektir.

Bu incelemede şu noktaya dikkat edilmesi gerekir; **(3.48)** denklemlerinin sağ yanındaki  $e^{i\phi}$ ,  $e^{3i\phi}$  terimlerinin katsayılarında  $A_1^{(1)} |A_1^{(1)}|^2$ ,  $A_1^{(3)} |A_1^{(3)}|^2$ ,  $A_1^{(1)} |A_1^{(3)}|^2$  ve  $A_1^{(3)} |A_1^{(1)}|^2$  terimlerine ek olarak  $\overline{A_1^{(1)}}^2 A_1^{(3)}$  ve  $A_1^{(1)3}$  'e de bağlı yapılar görülecektir. Temel dalga ile üçüncü harmoniğinin etkileşimi problemi ileride başka bir çalışmanın konusu olarak incelenecektir.



#### 4. SONUÇ

Bu çalışmada farklı elastik özelliklere sahip düzgün kalınlıklı iki tabakadan oluşan bir ortamda nonlinear SH dalgalarının yayılması problemi, ortamda yayılan dalgaların faz hızları  $c$ , üst tabakaya ait lineer dalgaların faz hızı  $c_1$ , alt tabakaya ait olan ise  $c_2$  olmak üzere  $c_1 < c < c_2$  kabulü altında ele alınarak temel dalga ile onun  $m$ . harmoniği etkileşimi problemi incelenmiştir. Bu inceleme için bir asimptotik pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu kullanılmıştır.

Öncelikli olarak lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısından yararlanılarak hangi dalga sayılarında harmonik rezonansın ortaya çıkacağı araştırılmış, özel halde temel dalga ile onun üçüncü ve beşinci harmoniğinin etkileşiminin olduğu dalga sayıları ve faz hızları  $(k,c)$  belirlenmiştir. Daha sonra nonlinear SH dalgalarının beşinci harmonik rezonans etkileşimi incelenmiş ve temel dalga paketi ile beşinci harmoniğinin grup hızlarının aynı olması durumunda bu etkileşimin bir kuplet nonlinear Schrödinger denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.



## KAYNAKLAR

- [1] **Ewing, W.M., Jardesky, W.S. and Press F.** (1957). Elastic Waves in Layered Media, Mc Graw-Hill, New York
- [2] **Achenbach, J. D.** (1973). Wave Propagation in Elastic Solids, NorthHolland Publishing Co., Amsterdam
- [3] **Graff, K. F.** (1975). Wave Motion in Elastic Solids, Clarendon Press, Oxford
- [4] **White, R. M.** (1970). Surface elastic waves, Proc. IEEE 58 1938
- [5] **Farnell, G.W.** (1978). Types and properties of surface waves, Acoustic Surface Waves, Vol. 24, Springer, Berlin
- [6] **Jeffrey, A. and Kawahara, T.** (1982). Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Pitman, Boston
- [7] **Nayfeh, A. H.** (1973). Second harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves, J. Fluid Mech., Vol. 4, pp. 803-816.
- [8] **Nayfeh, A. H.** (1971). Third harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves, J. Fluid Mech., Vol. 48, Part 2, pp. 385-395.
- [9] **Teymur, M.** (1989). Nonlinear modulation and the fifth harmonic resonance of Love waves on a neo-Hookean layered half-space in Nonlinear Wave Motion (Ed. by . Jeffrey A.), pp.205-228, Wiley, New York
- [10] **Kalyanasundaram, N.** (1981). Nonlinear Surface Acoustical Waves on an Isotropic Solid, Int. J. Engng. Sci. Vol.19, 287.
- [11] **Bataille, K. ve Lund F.** (1982). Nonlinear Waves in Elastic Media, Physica, Vol.6, 95.
- [12] **Teymur, M.** (1988). Nonlinear modulation of Love waves in a compressible hyperelastic layered half-space, Int. J. Engng. Sci., 26,907.
- [13] **Teymur, M.** (1988). In Recent Development in Surface Acoustic Waves (Ed. By Parker D. F. and Maugin G.A.), pp. 54-61, Springer, Berlin.
- [14] **Teymur, M.** (1993). Interactions of nonlinear surface elastic waves, 8. National Congress of Mechanics- Contributed papers, pp.587-596.
- [15] **Teymur, M.** (1996). Small but finite amplitude waves in a two layered incompressible elastic medium, Int. J. Engng. Sci. 34, 227.
- [16] **Teymur, M.** (2002). Nonlinear interaction of two co-directional surface SH waves in a layered elastic half-space, Nonlinear Acoustics at the Begining of the 21st Century, Vol.1, pp.69-72.

- [17] **Ahmetolan, S. ve Teymur, M.** (2003). Nonlinear modulation of SH waves in a two layered plate and formation of surface SH waves, *Int. J. Nonlinear Mechs.*, **38**, 1237-1250.
- [18] **Var, H. İ.** (1997). Tabakalı bir hiperelastik yarım uzayda nonlinear yüzey SH dalgalarının etkileşimleri, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [19] **Maugin, G.A. ve Hadouaj H.** (1991). Solitary Surface Transverse- Waves on an Elastic Substrate Coated with a Thin Film, *Phy. Rev.* Vol. **44**, 3, 1266.
- [20] **Ahmetolan, S. ve Teymur, M.** (2007). Nonlinear modulation of SH waves in an Incompressible Hyperelastic plate. *ZAMP*, 58(3), 457-474.
- [21] **Akman, A.E.** (2012). Nonlinear Elastik Bir Tabakada SH Dalgalarının Etkileşimi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [22] **Ahmetolan, S. ve Demirci, A.** (2014). Interaction of Nonlinear SH waves in a Two Layered Elastic Plate, The 21<sup>st</sup> International Congress on Sound and Vibration, China.
- [23] **Ahmetolan S.** (1996). İki Tabakalı Elastik Ortamlarda Nonlinear Dalga Modülasyonu yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [24] **Zhou, S.** (2010). Numerical solution to coupled nonlinear Schrödinger equations on unbounded domains, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. **80** (12), pp. 2362-2373.
- [25] **Radhadrishan, R. ve Lakshmanan, M.** (1995). Bright and dark soliton solutions to coupled nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**, 2683-2692.
- [26] **Radhadrishan, R. ve Lakshmanan, M.** (1996). Exact soliton solution to coupled nonlinear Schrödinger equations with higher- order effects, *Phys. Rev. E.* **54**, 2949.
- [27] **Remoissenet, M.** (1999). *Waves called solitons: Concepts and experiments*, Springer-Verlag, Berlin.
- [28] **Roskes, G.J.** (1976). Some Nonlinear Multiphase Interactions. *Stud. Appl. Math.*, 55, 231-238.
- [29] **Porubov, A.V. ve Parker, D.F.** (1999). Some General Periodic Solutions to Coupled Nonlinear Schrödinger Equations. *Wave Motion*, 29, 97-109.
- [30] **Tan, B. ve Boyd, J.P.** (2001). Stability and Long Time Evolution of the Periodic Solutions to the Two Coupled Nonlinear Schrödinger Equations. *Chaos, Solitons&Fractals*, 12, 721-734.
- [31] **Liu, P., Li, Z. ve Lou, S.** (2010). A Class of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations: Painleve Property, Exact Solutions, and Application to Atmospheric Gravity Waves, *Appl. Math. Mech.*, 31, 1383-1404.

## **EKLER**

**EK A:** Üçüncü Mertebe Pertürbasyon Probleminin Katsayıları

**EK A:**

(3.49a, b)' deki  $D_i$  ( $i=1, \dots, 40$ ) katsayılarının açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$D_1 = 2iR_1^{(1)} (M_{12}^{(1,1)} + M_{21}^{(1,1)}) + R_1^{(1)} N_1^{(1)} + 2T_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} M_{11}^{(1,1)} + P_1 \quad ,$$

$$D_2 = \frac{-2iR_1^{(1)}}{kc_1^2 p_1} \left( w \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) M_{11}^{(1,1)} \quad ,$$

$$D_3 = 2iR_2^{(1)} (M_{12}^{(1,1)} + M_{21}^{(1,1)}) + R_2^{(1)} N_1^{(1)} + 2T_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} M_{11}^{(1,1)} + P_2 \quad ,$$

$$D_4 = \frac{2iR_2^{(1)}}{kc_1^2 p_1} \left( w \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) M_{11}^{(1,1)} \quad ,$$

$$D_5 = |R_1^{(1)}|^2 \overline{R_2^{(1)}} P_3 A_1^{(1)} |A_1^{(1)}|^2 \quad ,$$

$$D_6 = |R_2^{(1)}|^2 \overline{R_1^{(1)}} P_3 A_1^{(1)} |A_1^{(1)}|^2 \quad ,$$

$$D_7 = R_2^{(5)} R_1^{(1)} \overline{R_1^{(5)}} P_4 A_1^{(1)} |A_1^{(5)}|^2 \quad ,$$

$$D_8 = R_2^{(1)} R_2^{(5)} \overline{R_1^{(5)}} P_5 A_1^{(1)} |A_1^{(5)}|^2 \quad ,$$

$$D_9 = R_1^{(1)} R_1^{(5)} \overline{R_2^{(5)}} A_1^{(1)} |A_1^{(5)}|^2 P_5 \quad ,$$

$$D_{10} = R_2^{(1)} R_1^{(5)} \overline{R_2^{(5)}} A_1^{(1)} |A_1^{(5)}|^2 P_4 \quad ,$$

$$D_{11} = 2iR_1^{(5)} (M_{12}^{(1,5)} + M_{21}^{(1,5)}) + R_1^{(5)} N_1^{(5)} + 2T_1^{(5)} \frac{\partial}{\partial x_1} M_{11}^{(1,5)} + P_6 \quad ,$$

$$D_{12} = \frac{-2iR_1^{(5)}}{kc_1^2 p_1} \left( w \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) M_{11}^{(1,5)} \quad ,$$

$$D_{13} = 2iR_2^{(5)} (M_{12}^{(1,5)} + M_{21}^{(1,5)}) + R_2^{(5)} N_1^{(5)} + 2T_2^{(5)} \frac{\partial}{\partial x_1} M_{11}^{(1,5)} + P_7 \quad ,$$

$$D_{14} = \frac{2iR_2^{(5)}}{kc_1^2 p_1} \left( w \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) M_{11}^{(1,5)} \quad ,$$



$$D_{15} = \left| R_1^{(5)} \right|^2 \overline{R_2^{(5)}} P_8 A_1^{(5)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 ,$$

$$D_{16} = \left| R_2^{(5)} \right|^2 \overline{R_1^{(5)}} P_8 A_1^{(5)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 ,$$

$$D_{17} = R_2^{(1)} R_1^{(5)} \overline{R_1^{(1)}} P_9 A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 ,$$

$$D_{18} = R_1^{(5)} R_2^{(1)} \overline{R_1^{(1)}} P_{10} A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 ,$$

$$D_{19} = R_1^{(1)} R_1^{(5)} \overline{R_2^{(1)}} A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 P_{10} ,$$

$$D_{20} = R_1^{(1)} R_2^{(5)} \overline{R_2^{(1)}} A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 P_9 ,$$

$$D_{21} = 2iR_3^{(1)} \left( M_{12}^{(2,1)} + M_{21}^{(2,1)} \right) + R_3^{(1)} N_2^{(1)} + 2T_3^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} M_{11}^{(2,1)} + P_{11} ,$$

$$D_{22} = \frac{-2R_3^{(1)}}{kc_2^2 v_2} \left( w \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) M_{11}^{(2,1)} ,$$

$$D_{23} = 2iR_4^{(1)} \left( M_{12}^{(2,1)} + M_{21}^{(2,1)} \right) + R_4^{(1)} N_2^{(1)} + 2T_4^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} M_{11}^{(2,1)} + P_{12} ,$$

$$D_{24} = \frac{2R_4^{(1)}}{kc_2^2 v_2} \left( w \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) M_{11}^{(2,1)} ,$$

$$D_{25} = R_3^{(1)} \left| R_3^{(1)} \right|^2 P_{13} A_1^{(1)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 ,$$

$$D_{26} = R_4^{(1)} \left| R_4^{(1)} \right|^2 P_{13} A_1^{(1)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 ,$$

$$D_{27} = R_4^{(1)} \left| R_3^{(5)} \right|^2 P_{14} A_1^{(1)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 ,$$

$$D_{28} = R_4^{(1)} \left| R_4^{(5)} \right|^2 P_{15} A_1^{(1)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 ,$$

$$D_{29} = R_3^{(1)} \left| R_3^{(5)} \right|^2 P_{15} A_1^{(1)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 ,$$

$$D_{30} = R_3^{(1)} \left| R_4^{(5)} \right|^2 P_{14} A_1^{(1)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 ,$$

$$D_{31} = 2iR_3^{(5)} \left( M_{12}^{(2,5)} + M_{21}^{(2,5)} \right) + R_3^{(5)} N_2^{(5)} + 2T_3^{(5)} \frac{\partial}{\partial x_1} M_{11}^{(2,5)} + P_{16} ,$$

$$D_{32} = \frac{-2R_3^{(5)}}{kc_2^2 v_2} \left( w \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) M_{11}^{(2,5)} \quad ,$$

$$D_{33} = 2iR_4^{(5)} \left( M_{12}^{(2,5)} + M_{21}^{(2,5)} \right) + R_4^{(5)} N_2^{(5)} + 2T_4^{(5)} \frac{\partial}{\partial x_1} M_{11}^{(2,5)} + P_{17} \quad ,$$

$$D_{34} = \frac{2R_4^{(5)}}{kc_2^2 v_2} \left( w \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) M_{11}^{(2,5)} \quad ,$$

$$D_{35} = R_3^{(5)} \left| R_3^{(5)} \right|^2 P_{18} A_1^{(5)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 \quad ,$$

$$D_{36} = R_4^{(5)} \left| R_4^{(5)} \right|^2 P_{18} A_1^{(5)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 \quad ,$$

$$D_{37} = R_4^{(5)} \left| R_3^{(1)} \right|^2 P_{19} A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \quad ,$$

$$D_{38} = R_4^{(5)} \left| R_4^{(1)} \right|^2 P_{20} A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \quad ,$$

$$D_{39} = R_3^{(5)} \left| R_3^{(1)} \right|^2 P_{20} A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \quad ,$$

$$D_{40} = R_3^{(5)} \left| R_4^{(1)} \right|^2 P_{19} A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \quad .$$

(A.3.1)

ve  $\alpha=1,2,3,4$  ,  $j=1,5$  olmak üzere

$$T_\alpha^{(j)} = \left( \frac{\partial R_\alpha^{(j)}}{\partial k_j} + V_g^{(j)} \frac{\partial R_\alpha^{(j)}}{\partial w_j} \right) \quad ,$$

$$N_\alpha^{(j)} = \left( c_\alpha^2 \frac{\partial^2 A_1^{(j)}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 A_1^{(j)}}{\partial t_1^2} \right) \quad ,$$

$$M_{\beta\gamma}^{(\alpha,j)} = \left( w \frac{\partial A_\beta^{(j)}}{\partial t_\gamma} + kc_\alpha^2 \frac{\partial A_\beta^{(j)}}{\partial x_\gamma} \right) \quad .$$

(A.3.2)

$$P_1 = -n_1 k A_1^{(1)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \left\{ 3(1+p_1^2)^2 R_1^{(1)} \left| R_1^{(1)} \right|^2 + 2(3-2p_1^2+3p_1^4) R_1^{(1)} \left| R_2^{(1)} \right|^2 \right\} \\ - 50n_1 k^4 A_1^{(1)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 \left\{ 3(1+p_1^2)^2 R_1^{(1)} \left| R_1^{(5)} \right|^2 + (3-2p_1^2+3p_1^4) R_1^{(1)} \left| R_2^{(5)} \right|^2 \right\} \quad ,$$

$$P_2 = -n_1 k A_1^{(1)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \{3(1+p_1^2)^2 R_2^{(1)} \left| R_2^{(1)} \right|^2 + 2(3-2p_1^2+3p_1^4) R_2^{(1)} \left| R_1^{(1)} \right|^2\} \\ - 50n_1 k^4 A_1^{(1)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 \{3(1+p_1^2)^2 R_2^{(1)} \left| R_2^{(5)} \right|^2 + (3-2p_1^2+3p_1^4) R_2^{(1)} \left| R_1^{(5)} \right|^2\} \quad ,$$

$$P_3 = k^4 n_1 (-3-2p_1^2+9p_1^4) \quad ,$$

$$P_4 = 50k^4 n_1 [10p_1^2(1-3p_1^2)+(-3+3p_1^2)] \quad ,$$

$$P_5 = 50k^4 n_1 [10p_1^2(-1+3p_1^2)+(-3+3p_1^2)] \quad ,$$

$$P_6 = -625n_1 k^4 A_1^{(5)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 \{3(1+p_1^2)^2 R_1^{(5)} \left| R_1^{(5)} \right|^2 + 2(3-2p_1^2+3p_1^4) R_1^{(5)} \left| R_2^{(5)} \right|^2\} \\ - 50n_1 k^4 A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \{3(1+p_1^2)^2 R_1^{(5)} \left| R_1^{(1)} \right|^2 + (3-2p_1^2+3p_1^4) R_1^{(5)} \left| R_2^{(1)} \right|^2\} \quad ,$$

$$P_7 = -625n_1 k^4 A_1^{(5)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 \{3(1+p_1^2)^2 R_2^{(5)} \left| R_2^{(5)} \right|^2 + 2(3-2p_1^2+3p_1^4) R_2^{(5)} \left| R_1^{(5)} \right|^2\} \\ - 50n_1 k^4 A_1^{(5)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \{3(1+p_1^2)^2 R_2^{(5)} \left| R_2^{(1)} \right|^2 + (3-2p_1^2+3p_1^4) R_2^{(5)} \left| R_1^{(1)} \right|^2\} \quad ,$$

$$P_8 = 625k^4 n_1 (-3-2p_1^2+9p_1^4) \quad ,$$

$$P_9 = 10k^4 n_1 [2p_1^2(1-3p_1^2)+5(-3+3p_1^2)] \quad ,$$

$$P_{10} = 10k^4 n_1 [2p_1^2(-1+3p_1^2)+5(-3+3p_1^2)] \quad ,$$

$$P_{11} = -n_2 k^4 A_1^{(1)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \{3(1-v_2^2)^2 R_3^{(1)} \overline{R_4^1} + 2(3+2v_2^2+3v_4^4) R_4^{(1)} \left| R_3^{(1)} \right|^2\} \\ - 50n_2 k^4 A_1^{(1)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 \{3(1-v_2^2)^2 R_3^{(1)} R_3^{(5)} \overline{R_4^{(5)}} + (3+2v_2^2+3v_2^4) R_3^{(1)} R_4^{(5)} \overline{R_3^{(5)}}\} \quad ,$$

$$P_{12} = -n_2 k^4 A_1^{(1)} \left| A_1^{(1)} \right|^2 \{3(1-v_2^2)^2 R_3^{(1)} \left| R_4^{(1)} \right|^2 + 2(3+2v_2^2+3v_4^4) R_4^{(1)} \overline{R_3^{(1)}}\} \\ - 50k^4 n_2 A_1^{(1)} \left| A_1^{(5)} \right|^2 \{3(1-v_2^2)^2 R_4^{(1)} R_4^{(5)} \overline{R_3^{(5)}} + (3+2v_2^2+3v_2^4) R_4^{(1)} R_3^{(5)} \overline{R_4^{(5)}}\} \quad ,$$

$$P_{13} = k^4 n_2 (-3+2v_2^2+9v_2^4) \quad ,$$

$$P_{14} = 25k^4 n_2 [(-6+6v_2^4)+5(-4v_2^2-12v_2^4)] \quad ,$$

$$P_{15} = 25k^4 n_2 [(-6 + 6v_2^4) + 5(4v_2^2 + 12v_2^4)] \quad ,$$

$$P_{16} = -625n_2 k^4 A_1^{(5)} |A_1^{(5)}|^2 \{3(1-v_2^2)^2 R_3^{(5)2} \overline{R_4^{(5)}} + 2(3+2v_2^2+3v_4^4)R_4^{(5)} |R_3^{(5)}|^2\} \\ - 50n_2 k^4 A_1^{(5)} |A_1^{(1)}|^2 \{3(1-v_2^2)^2 R_3^{(5)} R_3^{(1)} \overline{R_4^{(1)}} + (3+2v_2^2+3v_4^4)R_3^{(5)} R_4^{(1)} \overline{R_3^{(1)}}\} \quad ,$$

$$P_{17} = -625n_2 k^4 A_1^{(5)} |A_1^{(5)}|^2 \{3(1-v_2^2)^2 R_3^{(5)} |R_4^{(5)}|^2 + 2(3+2v_2^2+3v_4^4)R_4^{(5)2} \overline{R_3^{(5)}}\} \\ - 50k^4 n_2 A_1^{(5)} |A_1^{(1)}|^2 \{3(1-v_2^2)^2 R_4^{(5)} R_4^{(1)} \overline{R_3^{(1)}} + (3+2v_2^2+3v_4^4)R_4^{(5)} R_3^{(1)} \overline{R_4^{(1)}}\} \quad ,$$

$$P_{18} = 625k^4 n_2 (-3 + 2v_2^2 + 9v_2^4) \quad ,$$

$$P_{19} = 5k^4 n_2 [5(-6 + 6v_2^4) + (-4v_2^2 - 12v_2^4)] \quad ,$$

$$P_{20} = 5k^4 n_2 [5(-6 + 6v_2^4) + (4v_2^2 + 12v_2^4)].$$

(A.3.3)

Yukarıda verilen denklemlerde  $|A_1^{(j)}|$ ,  $A_1^{(j)}$ 'nin modülünü göstermektedir.

(3.53) ve (3.54) denklemlerindeki  $\varepsilon_i$  ( $i=1, \dots, 40$ ) katsayılarının açık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon_1 = \frac{iD_1}{2kc_1^2 p_1} - \frac{D_2}{4k^2 c_1^2 p_1^2} \quad \varepsilon_2 = \frac{iD_2}{4kc_1^2 p_1}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{-iD_3}{2kc_1^2 p_1} - \frac{D_4}{4k^2 c_1^2 p_1^2} \quad \varepsilon_4 = \frac{-iD_4}{4kc_1^2 p_1}$$

$$\varepsilon_5 = \frac{D_5}{8k^2 c_1^2 p_1^2} \quad \varepsilon_6 = \frac{D_6}{8k^2 c_1^2 p_1^2}$$

$$\varepsilon_7 = \frac{D_7}{80k^2 c_1^2 p_1^2} \quad \varepsilon_8 = \frac{D_8}{120k^2 c_1^2 p_1^2}$$

$$\varepsilon_9 = \frac{D_9}{120k^2 c_1^2 p_1^2} \quad \varepsilon_{10} = \frac{D_{10}}{80k^2 c_1^2 p_1^2}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{iD_{11}}{10kc_1^2 p_1} - \frac{D_{12}}{100k^2 c_1^2 p_1^2} \quad \varepsilon_{12} = \frac{iD_{12}}{20kc_1^2 p_1}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{13} &= \frac{-iD_{13}}{10kc_1^2 p_1} - \frac{D_{14}}{100k^2 c_1^2 p_1^2} & \varepsilon_{14} &= \frac{-iD_{14}}{20kc_1^2 p_1} \\
\varepsilon_{15} &= \frac{D_{15}}{200k^2 c_1^2 p_1^2} & \varepsilon_{16} &= \frac{D_{16}}{200k^2 c_1^2 p_1^2} \\
\varepsilon_{17} &= \frac{D_{17}}{-16k^2 c_1^2 p_1^2} & \varepsilon_{18} &= \frac{D_{18}}{24k^2 c_1^2 p_1^2} \\
\varepsilon_{19} &= \frac{D_{19}}{24k^2 c_1^2 p_1^2} & \varepsilon_{20} &= \frac{D_{20}}{-16k^2 c_1^2 p_1^2} \\
\varepsilon_{21} &= \frac{D_{21}}{2kc_2^2 v_2} + \frac{D_{22}}{4k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{22} &= \frac{D_{22}}{4kc_2^2 v_2} \\
\varepsilon_{23} &= \frac{-D_{23}}{2kc_2^2 v_2} + \frac{D_{24}}{4k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{24} &= \frac{-D_{24}}{4kc_2^2 v_2} \\
\varepsilon_{25} &= \frac{-D_{25}}{8k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{26} &= \frac{-D_{26}}{8k^2 c_2^2 v_2^2} \\
\varepsilon_{27} &= \frac{-D_{27}}{80k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{28} &= \frac{-D_{28}}{120k^2 c_2^2 v_2^2} \\
\varepsilon_{29} &= \frac{-D_{29}}{120k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{30} &= \frac{-D_{30}}{80k^2 c_2^2 v_2^2} \\
\varepsilon_{31} &= \frac{D_{31}}{10kc_2^2 v_2} + \frac{D_{32}}{100k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{32} &= \frac{D_{32}}{20kc_2^2 v_2} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{-D_{33}}{10kc_2^2 v_2} + \frac{D_{34}}{100k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{34} &= \frac{-D_{34}}{20kc_2^2 v_2} \\
\varepsilon_{35} &= \frac{-D_{35}}{200k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{36} &= \frac{-D_{36}}{200k^2 c_2^2 v_2^2} \\
\varepsilon_{37} &= \frac{D_{37}}{16k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{38} &= \frac{-D_{38}}{24k^2 c_2^2 v_2^2} \\
\varepsilon_{39} &= \frac{-D_{39}}{24k^2 c_2^2 v_2^2} & \varepsilon_{40} &= \frac{D_{40}}{16k^2 c_2^2 v_2^2}
\end{aligned} \tag{A.3.4}$$



## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad** : Neşe Özdemir  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Eskişehir 08.05.1989  
**E-Posta** : ozdemirnes@itu.edu.tr

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2012, Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü

**MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:** Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü  
Bölüm Üçüncülüğü