

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÜNİFORM KALINLIKLI BİR TABAKA İLE İKİYE AYRILMIŞ
SONSUZ BİR ELASTİK ORTAMDA NONLİNEER ENİNE
KAYMA (SH) DALGALARININ YAYILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hamza KURT

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

OCAK 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÜNİFORM KALINLIKLI BİR TABAKA İLE İKİYE AYRILMIŞ
SONSUZ BİR ELASTİK ORTAMDA NONLİNEER ENİNE
KAYMA (SH) DALGALARININ YAYILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hamza KURT
(509081012)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR

OCAK 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509081012 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Hamza KURT**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**ÜNİFORM KALINLIKLIL BİR TABAKA İLE İKİYE AYRILMIŞ SONSUZ BİR ELASTİK ORTAMDA NONLİNEER ENİNE KAYMA (SH) DALGALARININ YAYILMASI**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan Jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR**

İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR**

İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ayşe Hümevra BİLGE

Kadir Has Üniversitesi

Doç. Dr. Semra AHMETOLAN

İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **24 EKİM 2014**

Savunma Tarihi : **15 OCAK 2015**

ÖNSÖZ

Bu çalışma sürecinde samimi ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, değerli bilgi ve birikimini paylaşan, gösterdiği hoşgörü ve sabırdan dolayı kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR'e şükranlarımı sunarım. Ayrıca, önemli katkılarından dolayı Sayın Dr. Ali DEMİRCİ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Tezin hazırlanması ve yazımı sırasında gösterdiği anlayış ve sabırdan dolayı da sevgili eşim Vijdan KURT'a teşekkür ederim.

EKİM 2014

Hamza KURT
(İnşaat Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
2. ÜNİFORM KALINLIKLIL BİR TABAKA İLE İKİYE AYRILMIŞ SONSUZ BİR ELASTİK ORTAMDA NONLİNEER ENİNE KAYMA (SH) DALGALARININ YAYILMASI.....	3
2.1 Giriş.....	3
2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler.....	3
2.3 Lineer Dalgalar ve Dispersiyon Bağıntısı	7
2.3.1 Dispersiyon Bağıntısı Grafikleri	9
3. NONLİNEER ENİNE KAYMA (SH) DALGALARININ MODÜLASYONU	13
3.1 Giriş.....	13
3.2 Nonlinear Enine Kayma (SH) Dalgalarının Self Modülasyonu.....	13
3.2.1 $c_2 < c < c_1 < c_3$ İçin Analiz	17
3.2.2 NLS Denkleminin Bazı Çözümleri	33
3.2.3 $\Gamma\Delta$ 'nın K ile Değişimi ve Bu Değişimin Değerlendirilmesi.....	35
4. SONUÇ.....	41
KAYNAKLAR	43
EKLER.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	59

KISALTMALAR

NLS : Non-Linear Schrödinger
SH : Shear Horizontal

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Üniform kalınlıklı tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz ortamın geometrisi....4	
Şekil 2.2 : (2.45)'teki dispersiyon bağıntısının $C = C(K)$ grafikleri (Dispersiyon bağıntısının ele alınan dallarının grafikleri).....11	
Şekil 3.1 : $\Gamma\Delta_1$ 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, 2, -2)$37	
Şekil 3.2 : $\Gamma\Delta_2$ 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, -2, 2)$38	
Şekil 3.3 : $\Gamma\Delta_3$ 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, 2, 2)$39	
Şekil 3.4 : $\Gamma\Delta_4$ 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, -2, -2)$40	
Şekil C.1 : Γ 'nın K 'ya göre değişimi.....54	
Şekil C.2 : Δ_1 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, 2, -2)$55	
Şekil C.3 : Δ_2 'nin K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, -2, 2)$56	
Şekil C.4 : Δ_3 'ün K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, 2, 2)$57	
Şekil C.5 : Δ_4 'ün K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, -2, -2)$58	

ÜNİFORM KALINLIKLI BİR TABAKA İLE İKİYE AYRILMIŞ SONSUZ BİR ELASTİK ORTAMDA NONLİNEER ENİNE KAYMA (SH) DALAGALARININ YAYILMASI

ÖZET

Bu çalışmada, üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz bir elastik ortamda nonlineer genelleştirilmiş enine kayma (SH) dalgalarının yayılmasını modelleyen bir sınır değer probleminin, bu ortamdaki yayılma olaylarını karakterize eden yaklaşık çözümleri, bir asimptotik pertürbasyon yöntemi ile elde edilmiştir. İncelemede ortamı oluşturan yarım uzayların ve bunları ayıran üniform kalınlıklı tabakanın birbirlerinden farklı elastik özelliklere sahip genelleştirilmiş neo-Hookean elastik malzemelerden meydana geldikleri kabul edilmektedir.

Ortamlar lineer elastik malzemelerden oluştuğlarında bu tip dalgaların yayılması daha önceden incelenmiştir. Bunların bir lineer elastik yarım uzayın, farklı elastik özelliklere sahip bir üniform tabaka ile kaplı olduğu bir ortamda yayılan SH tipi yüzey dalgalarının (Love dalgaları) dispersiyon bağıntısına benzer bir dispersiyon bağıntısına sahip oldukları bulunmuştur. Yani bu dalgalar da dispersif elastik dalgalardır. Bundan dolayı, bu SH dalgaları da genelleştirilmiş tipten Love dalgaları olarak adlandırılmıştır. Bu nedenle ilk bölümde önce Love dalgalarının tanımı özetlenmiştir. Daha sonra çalışmada ele alınan problem ve çalışmanın amacı belirtilmiştir. Çalışmada gerçekleştirilen analiz, kullanılan yöntem ve ulaşılan sonuçlara değinilerek bölüm sonlandırılmıştır.

İkinci bölümde, önce üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış ve genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluşan sonsuz bir ortamda nonlineer enine kayma dalgalarının yayılmasını yöneten hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları verilmektedir. Bu denklemler ve sınır koşulları yazılırken Ek A'da, genelleştirilmiş neo-Hookean ortamlarda, genelleştirilmiş kayma hareketi hakkında yapılan incelemeden faydalanılmıştır. Daha sonra, bu denklemler ve sınır koşulları lineerleştirilmiş ve enine kayma dalgalarının yayılması incelenmiştir. Bu incelemede, c , lineer dalgaların faz hızını; c_1 , c_2 ve c_3 ise, sırası ile üst yarım uzayda, uniform ara tabakada ve alt yarım uzaydaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarını göstermek üzere, bu hızlar arasında $c_2 < c < c_1 < c_3$ sağlanması koşulu altında lineer dalgaların yayılması incelenmiş ve çözümleri türetilmiştir. Seçilen lineer bir model için dispersiyon bağıntısı hesaplanmış ve faz hızlarının dalga sayıları ile değişimini gösteren grafikler ilk dallar için çizilmiştir. Bu grafiklerden tabaka kalınlığının dalga yayılmasının karakteristiklerini etkilediği gözlemlenmiştir.

Üçüncü bölümde, lineer özellikleri $c_2 < c < c_1 < c_3$ eşitsizliklerini sağlayan, üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz bir elastik ortamda nonlineer enine kayma dalgaların self modülasyonu, bir asimptotik pertürbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler yöntemi (the multiple scale method) kullanılarak incelenmiştir. Bu incelemede, nonlineer self modülasyonun bir nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi

ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. NLS denkleminin çözümlerinin davranışı, genel olarak denklemin katsayı fonksiyonlarının çarpımlarının işaretine bağlı olduğundan, problemin asimptotik çözümlerinin nonlineerliğe bağlılığını incelemek için ortamları oluşturan malzemelerin lineer özellikleri sabit tutulmuş ve nonlineer malzeme sabitleri değiştirilerek, denklemin katsayılarının dalga sayısına göre değişimleri numerik olarak hesaplanmıştır. NLS denkleminin katsayı fonksiyonlarının ve çarpımlarının grafikleri çizilmiş ve ortamlardaki malzemelerin nonlineer özelliklerinin bu katsayı fonksiyonlarının çarpımının işaretini etkilediği görülmüştür. Ele alınan problemde, K boyutsuz dalga sayısını göstermek üzere, bu çarpımın işaretini, $0.7610 < K < 1.11$ için yarım-uzay ortamlarındaki malzemelerin nonlineer özellikleri, $K > 1.11$ için ise tabaka ortamındaki malzemenin nonlineer özelliği belirlemektedir. Dolayısıyla, dalga yayılmasının davranışının, ortamlardaki malzemelerin nonlineer özelliklerinden etkilendiği gözlemlenmektedir.

**PROPAGATION OF NONLINEAR SHEAR HORIZONTAL (SH) WAVES IN
AN ELASTIC MEDIUM DIVIDED BY A LAYER OF UNIFORM
THICKNESS**

SUMMARY

In this work, the propagation of nonlinear shear horizontal (SH) waves in an infinite layered elastic medium is considered. The infinite medium consists of two half spaces separated by a layer of uniform thickness. The uniform layer, the top half space and the bottom half space are assumed to occupy the following respective regions:

$$D_2 = \{(X_1, X_2, X_3) | -h < X_2 < 0, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\}$$

$$D_1 = \{(X_1, X_2, X_3) | 0 < X_2 < \infty, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\}$$

$$D_3 = \{(X_1, X_2, X_3) | -\infty < X_2 < -h, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\}$$

in the reference frame X_K , $K = 1, 2, 3$ where X_K denotes the material coordinates of a point referred to the rectangular cartesian system of axes. It is also assumed that each medium has different elastic characteristics and the stresses and displacements are continuous at the interfaces $X_2 = 0$ and $X_2 = -h$. Then an SH wave (a Love type wave) described by

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3^{(v)}(X_\Delta, t) \delta_{k3}, \quad v = 1, 2, 3 \quad (1)$$

is supposed to propagate along the X_1 axis in the medium. In the equation (1) the supercript v refers to the regions D_v ; $u_3^{(v)}$ is the displacement of a particle in the X_3 direction in a given region, x_k , $k = 1, 2, 3$, are spatial rectangular coordinates, t is the time and δ_{kK} is the Kronecker symbol. The summation on repeated indices is implied in (1) and in the sequel. Latin and Greek indices have respective ranges (1,2,3) and (1,2).

Let $T_{KI}^{(v)}$ be the first Piola-Kirchoff stress tensor field accompanying the deformation field (1); in the absence of body forces, the equations of the motion in the reference state are

$$T_{\Delta\beta,\Delta}^{(v)} = 0, \quad \beta = 1, 2; \quad T_{\Delta 3,\Delta}^{(v)} = \rho_0^{(v)} \ddot{u}_3^{(v)}, \quad v = 1, 2, 3 \quad (2)$$

where subscripts preceded by a comma indicate partial differentiation with respect to X_Δ and an over dot represents the partial differentiation with respect to t . Note

that continuity of displacements and stresses at the interfaces $X_2 = 0$ and $X_2 = -h$ are satisfied if

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)} \quad \text{and} \quad T_{2k}^{(1)} = T_{2k}^{(2)} \quad \text{on} \quad X_2 = 0 \quad (3)$$

and

$$u_3^{(2)} = u_3^{(3)} \quad \text{and} \quad T_{2k}^{(2)} = T_{2k}^{(3)} \quad \text{on} \quad X_2 = -h. \quad (4)$$

Also, the following radiation conditions must be satisfied

$$\text{for } X_2 \rightarrow -\infty, \quad u_3^{(3)} \rightarrow 0 \quad (5)$$

$$\text{for } X_2 \rightarrow \infty, \quad u_3^{(1)} \rightarrow 0. \quad (6)$$

When the constituent materials of the layered space are hyperelastic then there exist strain energy function Σ^ν characterizing the mechanical properties of the materials and stress constitutive equations can be expressed as

$$T_{Kk}^{(\nu)} = \frac{\partial \Sigma^\nu}{\partial x_{k,K}}. \quad (7)$$

Furthermore, if the materials are also homogeneous and isotropic then Σ^ν s are functions of the principle invariants of a deformation tensor, say the Finger deformation tensor

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K}. \quad (8)$$

Hence,

$$\Sigma^\nu = \Sigma^\nu(I_1^\nu, I_2^\nu, I_3^\nu) \quad (9)$$

where

$$I_1^\nu = \text{tr}(c^{-1}), \quad 2I_2^\nu = \text{tr}(c^{-1})^2 + \text{tr}(c^{-2}), \quad I_3^\nu = \det(c^{-1}) \quad (10)$$

In this work, it is assumed that the constituent materials are homogeneous, isotropic and incompressible hyperelastic and the strain energy functions are only the functions of the first invariants, i.e.

$$\Sigma^\nu = \Sigma^\nu(I_1^\nu). \quad (11)$$

This class of materials is called generalized neo-Hookean and for such a material the stress constitutive equation can be expressed as

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \Phi c_{kl}^{-1} \quad (12)$$

where t_{kl} is the Cauchy stress tensor, p is an arbitrary hydrostatic pressure function and $\Phi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1}$. Then by considering the relation $T_{kl} = j X_{k,K} t_{kl}$, where $j = \det[x_{k,K}] = 1$ for the motion (1), the components of the Piola-Kirchhoff stress tensor are obtained as

$$T_{11}^v = T_{22}^v = T_{33}^v = T_{12}^v = T_{21}^v = 0, \quad T_{\Delta 3}^v = T_{3\Delta}^v = 2 \frac{\partial \Sigma^v}{\partial I_1^v} u_{3,\Delta}^v. \quad (13)$$

Hence, when the constituent materials are generalized neo-Hookean, the second and third equations in (2) are satisfied identically and therefore the wave motion described by (1) can exist in the layered media in the absence of body forces.

Since in this work the propagation of small but finite amplitude waves are under consideration, proceeding with the approximate equations rather than the exact ones will be more convenient. To this end let us assume that the strain energy functions are continuously differentiable functions of $I = I_1$ on the interval $[3, \infty)$ and they can be expanded in Taylor series as

$$\Sigma(I) = \Sigma'(3)(I-3) + \frac{1}{2!} \Sigma''(3) + \dots \quad (14)$$

where a prime denotes differentiation with respect to I and $\Sigma(3) = 0$.

Now, let

$$X = X_1, \quad Y = X_2, \quad Z = X_3 \quad \text{and} \quad u = u^{(1)}, \quad v = u^{(2)}, \quad w = u^{(3)} \quad (15)$$

Then by employing the expansion (14) in the first equation of (2) and also in the boundary conditions (3-6), the following approximate expressions involving the third degree in the deformation gradients, are obtained.

The equations of motion;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = n_1 \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \kappa(u) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \kappa(u) \right) \right] \quad (16a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = n_2 \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial v}{\partial X} \kappa(v) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \kappa(v) \right) \right] \quad (16b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_3^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right) = n_3 \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial w}{\partial X} \kappa(w) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \kappa(w) \right) \right] \quad (16c)$$

the boundary conditions;

$$\text{for } Y \rightarrow \infty, u \rightarrow 0 \quad (17)$$

$$\text{on } Y = 0, u = v \text{ and } \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial Y} = \gamma_1 \beta_2 \frac{\partial v}{\partial Y} \kappa(v) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial Y} \kappa(u) \quad (18a, b)$$

$$\text{on } Y = -h, v = w \text{ and } \frac{\partial v}{\partial Y} - \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial Y} = \gamma_2 \beta_3 \frac{\partial w}{\partial Y} \kappa(w) - \beta_2 \frac{\partial v}{\partial Y} \kappa(v) \quad (19a, b)$$

$$\text{for } Y \rightarrow -\infty, w \rightarrow 0 \quad (20)$$

where

$$\kappa(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2 \quad (21)$$

and the constants c_v (linear shear wave velocities), n_v (nonlinear material constants), γ_1, γ_2 and $\beta_v, v=1,2,3$; are defined as

$$c_v^2 = \mu_v / \rho_v, \quad n_v \rho_v = \frac{\partial \Phi^v(3)}{\partial I}, \quad \mu_v = \Phi^v(3) \quad (22)$$

$$\gamma_1 = \mu_2 / \mu_1, \quad \gamma_2 = \mu_3 / \mu_2, \quad \beta_v = n_v / \mu_v.$$

$\rho_v = \rho_0^v$ are the densities the relevant mediums.

First, the equations of motion (16) and the boundary conditions (18-19) are linearized. Then, the propagation of linear waves is examined. This problem was first investigated by Stoneley and it was found that for the existence of an SH wave (a Love type wave) the phase velocity c of this wave must satisfy the inequalities;

$$c_2 < c < c_1 < c_3 \quad (23)$$

The dispersion relation of the linear wave is obtained as

$$\tan \left(K \sqrt{C^2 - 1} \right) = \frac{\frac{9}{4} \sqrt{(C^2 - 1) \left(1 - \frac{C^2}{9} \right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{C^2}{4} \right) (C^2 - 1)}}{\frac{1}{4} (C^2 - 1) - 9 \sqrt{\left(1 - \frac{C^2}{4} \right) \left(1 - \frac{C^2}{9} \right)}} \quad (24)$$

where $C = \frac{c}{c_2}$ and $K = kh$, k is the wave number and h is the thickness of the layer.

Later, the nonlinear wave propagation problem governed by the equations (16-20) is considered. The nonlinear self modulation of a group of SH waves centered around a wave number k and a frequency ω is investigated. Thus, the harmonic-resonance phenomena is excluded in this examination. The amplitude of the wave motion is assumed to be small but finite, and the problem is investigated by employing the

method of multiple scales. Following the usual procedure of the method, new independent variables

$$x_i = \epsilon^i X, \quad t_i = \epsilon^i t, \quad y = Y, \quad i = 0, 1, 2 \quad (25)$$

are introduced instead of (X, Y, t) , where ϵ is a small parameter representing the weakness of the of non-linearity and x_1, x_2, t_1, t_2 are slow variables describing the slow variations in the problem. Now u, v and w are considered to be functions of these new variables and they are expanded in the following asymptotic series in ϵ :

$$u \cong \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (26a)$$

$$v \cong \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (26b)$$

$$w \cong \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n w_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2). \quad (26c)$$

Then, writing equations (16) and the boundary conditions (17-20) in terms of the new independent variables (25) and then employing the asymptotic expansions (26) in the resulting expressions and collecting the terms of like powers in ϵ , yields a hierarchy of problems from which it is possible to determine u_n, v_n and w_n , successively. As it is usual in this type of asymptotic analysis these perturbation problems are linear at each step and the first order problem is simply the classical linear wave problem first investigated by Stoneley. The solution of the first order problem is found as

$$u_1 = \mathcal{A}_1 R_1 e^{-kp_1 y + i\phi} + c.c. \quad (27a)$$

$$v_1 = \mathcal{A}_1 \left(R_2 e^{-ikp_2 y} + R_3 e^{ikp_2 y} \right) e^{i\phi} + c.c. \quad (27b)$$

$$w_1 = \mathcal{A}_1 R_4 e^{kp_3 y + i\phi} + c.c. \quad (27c)$$

where $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ is a complex function representing the first-order slowly varying amplitude of the wave modulation. The constants R_1, R_2, R_3 and R_4 are defined as

$$R_1 = \frac{a\gamma_1}{p_1} \left[p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h) \right] e^{-kp_3 h}$$

$$R_2 = \frac{a}{2} \left[1 + i \frac{\gamma_2 p_3}{p_2} \right] e^{-kp_3 h - ikp_2 h}, \quad R_3 = \frac{a}{2} \left[1 - i \frac{\gamma_2 p_3}{p_2} \right] e^{-kp_3 h + ikp_2 h} = \overline{R_2}$$

$$R_4 = a \quad (28)$$

where a is an arbitrary constant. The first-order solution and the solution of the classical linear problem are of the same form. The only difference is that, in the linear problem \mathcal{A}_1 is a constant but here it is a slowly varying function representing the nonlinear self-modulation of a wave train. To complete the first-order solutions this function has to be determined. This has been achieved by constructing the solutions of the second and the third order problems. The compatibility condition in the third order problem yields the following NLS equation for $\mathcal{A} = k\mathcal{A}_1$

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta \mathcal{A} |\mathcal{A}|^2 = 0, \quad (29)$$

where Γ is the linear dispersion coefficients and Δ is the nonlinear constant. Thus, once a solution for \mathcal{A} is derived from (29), then the first-order solutions u_1, v_1, w_1 can be constructed by (27). This work is centered around the weakly nonlinear waves, therefore it is aimed to obtain just the uniformly valid first-order solutions u_1, v_1, w_1 . Thus, the task is completed. Since the behavior of solutions of NLS equations depends on sign of $\Gamma\Delta$, the variation of it with the wave number has to be found out. The numerical evaluation of $\Gamma\Delta$ with respect to the nondimensional wave number $K = kh$ is performed for the lowest branch of the dispersion relation (24) giving appropriate values to the material constants. It is observed that in the wave number range $0.7610 < K < 1.11$, the nonlinear material constants of the half spaces determine the sign of $\Gamma\Delta$, whereas when $K > 1.11$ the nonlinear material constant of the layer determines the sign of $\Gamma\Delta$. $K = 0.7610$ is the cut-off wave number of the first branch of the dispersion relation.

In the appendix A, The anti-plane shear motion in a generalised neo-Hookean elastic medium is presented. In the appendices B and C, the matlab codes to evaluate the dispersion relation (24) and the product $\Gamma\Delta$ are presented.

1. GİRİŞ

A. E. H. Love, yerin yapısında, yüzey dalgası katarlarında, enine yer değiştirme bileşenlerine sahip dispersif dalgaların sismograflar tarafından kaydedilmiş olmasından yola çıkarak üstü elastik özellikleri farklı ve üniform kalınlıklı bir tabaka ile kaplı, homojen, izotrop, elastik bir yarım-uzayda yer değiştirme doğrultusu yayılma doğrultusu ile serbest düzlem yüzeyin normalinin oluşturduğu düzleme (sagittal düzlem) dik olan dispersif yüzey dalgaların varlığını teorik olarak göstermiştir. Bu yatay olarak polarize olmuş, enine yüzey dalgaları (SH tipi yüzey dalgaları), ismine izafeten Love dalgaları olarak isimlendirilmektedir.

Bu çalışmada, homojen, izotrop, sıkışmaz, genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluşan, üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz bir elastik ortamda Love tipi nonlinear enine kayma (SH) dalgalarının yayılması incelenmiştir. Elastik tabakalı ortam, üniform kalınlıklı bir tabaka ile ayrılmış ve tabakanın üstünde ve altında kalan iki yarım-uzaydan oluşmaktadır. Bu ortamların elastik özelliklerinin birbirlerinden farklı oldukları kabul edilmektedir. Çalışmada [14]'deki incelemelere benzer bir yol izlenmiştir. Bu probleme karşılık gelen lineer problem ilk defa Stoneley [9] tarafından ele alınmıştır.

Tezin amacı, üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz bir ortamdaki elastik malzemelerin nonlinear özelliklerinin enine kayma dalgalarının yayılmalarına olan etkilerini incelemektir.

Çalışmada ilk olarak lineer problem ele alınmış ve dispersiyon bağıntısı türetilerek grafikleri çizilmiştir. Daha sonra ise nonlinear yayılmayı modelleyen sınır değer problemi tanımlanmış ve bu problemin nonlinear dalga modülasyonu için asimptotik analizi yapılmıştır. Bu analizde, nonlinear dalga modülasyonunun bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. NLS denkleminin çözümlerinin davranışı, denklemin katsayı fonksiyonlarının çarpımlarının işaretine bağlı olduğundan [1,2], problemin asimptotik çözümlerinin nonlinearliğe bağlılığını incelemek için tabakayı ve iki yarım-uzayı oluşturan

malzemelerin lineer özellikleri sabit tutulmuş ve nonlineer sabitler değiştirilerek denklemin katsayılarının dalga sayısına göre değişimleri sayısal olarak incelenmiştir.

2. ÜNİFORM KALINLIKLI BİR TABAKA İLE İKİYE AYRILMIŞ SONSUZ BİR ELASTİK ORTAMDA NONLİNEER ENİNE KAYMA (SH) DALGALARININ YAYILMASI

2.1 Giriş

Bu bölümde, önce üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz bir elastik ortamda nonlineer enine kayma (SH) dalgalarının yayılmasını karakterize eden hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları tanımlanmaktadır. Daha sonra, bu denklemler ve sınır koşulları lineerleştirilerek elde edilen ve SH tipi lineer dalgaların yayılmasını karakterize eden sınır değer problemi incelenmekte ve bu problemde belirtilen koşul altında lineer dispersiyon bağıntısı hesaplanıp grafikleri çizilmektedir.

2.2 Problemin Tanımı ve Temel Denklemler

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik eksen takımına göre maddesel koordinatlarını (X_1, X_2, X_3) , uzaysal koordinatlarını ise (x_1, x_2, x_3) şeklinde gösterelim. $h > 0$ olmak üzere, elastik malzemeden oluşan, üniform h kalınlıklı bir tabaka

$$D_2 = \{(X_1, X_2, X_3) | -h < X_2 < 0, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\} \quad (2.1)$$

ortamını doldursun. D_2 tabakası

$$D_1 = \{(X_1, X_2, X_3) | 0 < X_2 < \infty, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\} \quad (2.2)$$

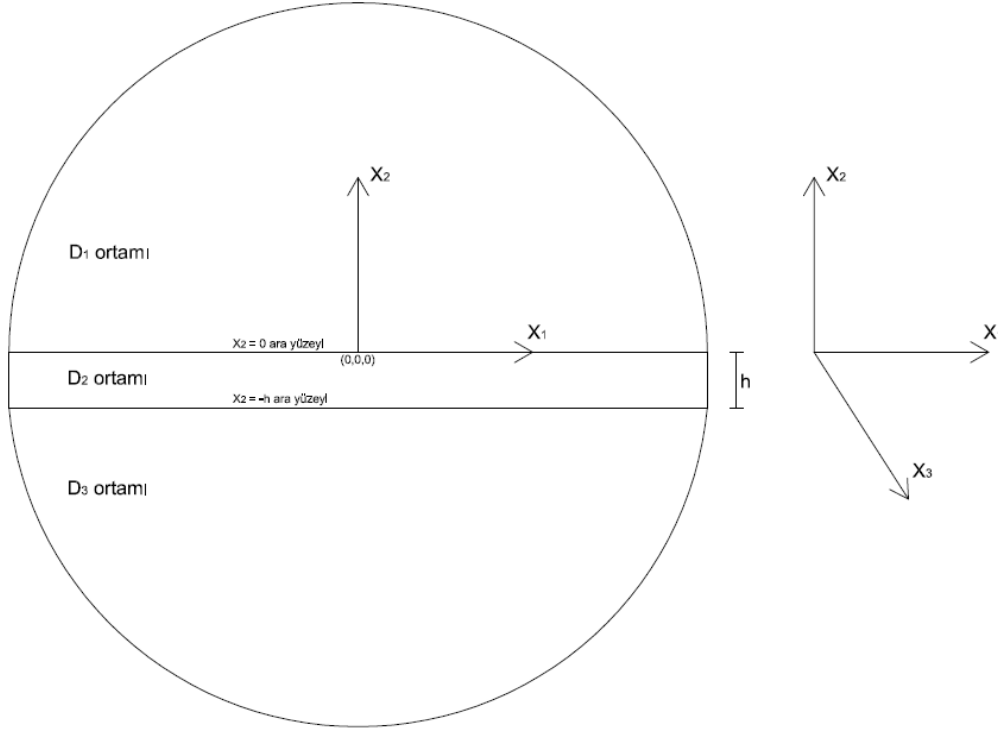
ve

$$D_3 = \{(X_1, X_2, X_3) | -\infty < X_2 < -h, -\infty < X_1 < \infty, -\infty < X_3 < \infty\} \quad (2.3)$$

yarım-uzayları ile sırasıyla $X_2 = 0$ 'da ve $X_2 = -h$ 'de ara yüzeyler oluşturmaktadır.

D_1 ve D_3 yarım-uzay ortamlarını dolduran malzemeler, birbirinden ve D_2 tabaka

ortamını dolduran malzemeden farklı elastik malzemelerden oluşmaktadır. $X_2 = 0$ ve $X_2 = -h$ ara yüzeylerinde yer değiştirme ve gerilmelerin sürekli olduklarını varsayıyoruz. Üniform kalınlıklı tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz ortamın geometrisi şekil 2.1’de gösterilmiştir.



Şekil 2.1 : Üniform kalınlıklı tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz ortamın geometrisi.

Bu tabakalı ortamda X_1 eksenine boyunca yayılan ve

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3^{(v)}(X_\Delta, t) \delta_{k3}, \quad v = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

ile tanımlanan SH dalgalarını göz önüne alalım [4]. Burada $u_3^{(1)}$, $u_3^{(2)}$ ve $u_3^{(3)}$ sırası ile D_1 yarım-uzayı, D_2 tabakası ve D_3 yarım-uzayındaki noktaların X_3 yönündeki yer değiştirme fonksiyonlarıdır. $u_3^{(v)}$ ifadesinde parantez içindeki indis X_3 yönündeki yer değiştirmenin hangi ortama ait olduğunu göstermektedir. Ayrıca, t zamanı, δ_{kK} Kronecker sembolünü göstermektedir. Latin indislerinin (1,2,3), Yunan indislerinin ise (1,2) değerlerini alacakları ve (2.4)’te bundan sonra, tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1’den 3’e kadar, tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde ise 1’den 2’ye kadar

toplam işlemleri yapılacağı kabul edilmektedir. Ek A'da yapılan inceleme ışığında, harekete etki eden kütle kuvvetleri bulunmadığı varsayılırsa bu dalga hareketini tanımlayan denklemler (A.5)'ten referans konumunda

$$T_{\Delta\beta,\Delta}^{(v)} = 0, \beta = 1, 2; T_{\Delta 3,\Delta}^{(v)} = \rho_0^{(v)} \ddot{u}_3^{(v)}, v = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

olarak yazılır. Burada $T_{kl}^{(v)}$ birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörünü, virgülden sonraki alt indis, bu indisin belirttiği kartezyen koordinata göre kısmi türevi ve $\ddot{u}_3^{(v)}$ üzerindeki bir nokta da zamana göre kısmi türevi göstermektedir. Ayrıca, ara yüzeylerdeki süreklilik koşullarından;

$$X_2 = 0 \text{ 'da } T_{2k}^{(1)} = T_{2k}^{(2)} \text{ ve } u_3^{(1)} = u_3^{(2)} \quad (2.6a, b)$$

$$X_2 = -h \text{ 'de } T_{2k}^{(2)} = T_{2k}^{(3)} \text{ ve } u_3^{(2)} = u_3^{(3)} \quad (2.7a, b)$$

bağıntıları yazılır. Ayrıca,

$$X_2 \rightarrow -\infty \text{ için } u_3^{(3)} \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

$$X_2 \rightarrow \infty \text{ için } u_3^{(1)} \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

dır. (2.8) ve (2.9)'a radyasyon koşulları da denir.

Bu çalışmada, sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılması problemi incelendiğinden, Ek A dikkate alınarak ortamları meydana getiren genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerin bünye bağıntılarının (2.5)'teki ilk iki denklemini özdeş olarak sağladıkları kabul edilmektedir. Bu kabul altında (2.4) ile tanımlanan hareket, (X_1, X_2) -düzleminde etkiyen sürekli kütle kuvvetlerine ihtiyaç duyulmadan oluşturulabilir. Bu durumda, her bir ortama ait bünye bağıntıları (A.16) ile tanımlanır. Bundan sonra (X_1, X_2, X_3) yerine (X, Y, Z) , yer değiştirme fonksiyonları $u_3^{(1)}, u_3^{(2)}, u_3^{(3)}$ yerine ise sırasıyla u, v, w yazılacaktır. Yüksek mertebe nonlineer terimler ihmal edildiğinde, (A.21)'den, (2.5)'teki üçüncü denklem $v = 1, 2, 3$ için sırası ile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = n_1 \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \kappa(u) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \kappa(u) \right) \right] \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = n_2 \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial v}{\partial X} \kappa(v) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \kappa(v) \right) \right] \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_3^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right) = n_3 \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial w}{\partial X} \kappa(w) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \kappa(w) \right) \right] \quad (2.12)$$

olarak yazılır. Burada

$$\kappa(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2 \quad (2.13)$$

olarak tanımlanmaktadır ve ortamların genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluştuğu kabul edildiğinden, n_v sabitleri (A.22b)'den

$$n_v = 4c_{200}^{(v)} / \rho_v \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, (A.22a) ve (A.24)'ten

$$c_v^2 = \mu_v / \rho_v \quad (2.15)$$

yazılır. n_v 'ler, ortamların nonlinear özellikleri ile ilgili sabitleri; c_v 'ler, ortamlardaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarını; ρ_v 'ler ise ortamların yoğunluklarını göstermektedir. Bağımsız değişkenlerin dönüşümünden sonra (A.6), (A.16) ve (A.20) kullanılarak (2.6-2.9) sınır koşulları yeniden düzenlenerek aşağıdaki formlarda yazılır;

$$Y \rightarrow \infty \text{ için } u \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

$$Y = 0 \text{ 'da } u = v \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial Y} = \gamma_1 \beta_2 \frac{\partial v}{\partial Y} \kappa(v) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial Y} \kappa(u) \quad (2.17a, b)$$

$$Y = -h \text{ 'de } v = w \text{ ve } \frac{\partial v}{\partial Y} - \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial Y} = \gamma_2 \beta_3 \frac{\partial w}{\partial Y} \kappa(w) - \beta_2 \frac{\partial v}{\partial Y} \kappa(v) \quad (2.18a, b)$$

$$Y \rightarrow -\infty \text{ için } w \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

Burada γ_1 , γ_2 ve β_v , $v=1,2,3$; sabitleri

$$\gamma_1 = \mu_2 / \mu_1, \gamma_2 = \mu_3 / \mu_2, \beta_v = n_v / \mu_v \quad (2.20)$$

olarak tanımlanmaktadır. (2.20)'deki μ_v 'ler ise ek A'daki inceleme ışığında, lineer ortamlar için ortamların kayma modülleridir.

Bu verilerle birlikte c , dalgaların faz hızını göstermek üzere

$$c_2 < c < c_1 < c_3 \quad (2.21)$$

koşulu altında önce lineer dalgaların yayılması ele alınacak ve dispersiyon bağıntısı türetilerek grafikleri çizilecektir.

2.3 Lineer Dalgalar ve Dispersiyon Bağıntısı

(2.10-2.12) ve (2.16-2.19) denklemlerinde $n_v = 0$ ve dolayısıyla $\beta_v = 0$ alınarak lineer dalgaları ifade eden denklemler aşağıdaki gibi yazılır;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_3^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (2.24)$$

$$Y \rightarrow \infty \text{ için } u \rightarrow 0 \quad (2.25)$$

$$Y = 0 \text{ 'da } u = v \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (2.26a, b)$$

$$Y = -h \text{ 'de } v = w \text{ ve } \frac{\partial v}{\partial Y} - \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial Y} = 0 \quad (2.27a, b)$$

$$Y \rightarrow -\infty \text{ için } w \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Pozitif X eksenini yönünde yayılan harmonik dalgalar için (2.22-2.24) denklemlerinin çözümlerini aşağıdaki formlarda arayabiliriz;

$$u = U(Y) e^{i(kX - \omega t)} + c.c. \quad (2.29a)$$

$$v = V(Y) e^{i(kX - \omega t)} + c.c. \quad (2.29b)$$

$$w = W(Y) e^{i(kX - \omega t)} + c.c.. \quad (2.29c)$$

Burada k dalga sayısını, ω açısal frekansı göstermektedir ve dalgaların faz hızı

$$c = \omega / k \quad (2.30)$$

olarak ifade edilir. (2.29) çözüm formları, (2.22-2.24) denklemlerinde kullanılarak U , V ve W için

$$U'' + k^2 \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) U = 0 \quad (2.31a)$$

$$V'' + k^2 \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) V = 0 \quad (2.31b)$$

$$W'' + k^2 \left(\frac{c^2}{c_3^2} - 1 \right) W = 0 \quad (2.31c)$$

denklemleri elde edilir. (2.21)'deki koşul göz önüne alınarak

$$p_1^2 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2} > 0, \quad p_2^2 = \frac{c^2}{c_2^2} - 1 > 0, \quad p_3^2 = 1 - \frac{c^2}{c_3^2} > 0 \quad (2.32)$$

tanımlanır. (2.25-2.28) sınır koşulları dikkate alınarak (2.31) denklemlerinin çözümleri

$$U = A e^{-kp_1 Y} \quad (2.33a)$$

$$V = B e^{-ikp_2 Y} + C e^{ikp_2 Y} \quad (2.33b)$$

$$W = D e^{kp_3 Y} \quad (2.33c)$$

olarak elde edilir. (2.33) çözümleri (2.26-2.27) sınır koşullarında kullanılırsa

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -kp_1 & i\gamma_1 kp_2 & -i\gamma_1 kp_2 & 0 \\ 0 & e^{ikp_2 h} & e^{-ikp_2 h} & -e^{-kp_3 h} \\ 0 & -ikp_2 e^{ikp_2 h} & ikp_2 e^{-ikp_2 h} & -\gamma_2 kp_3 e^{-kp_3 h} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

ve

$$U = [A \ B \ C \ D]^T \quad (2.35)$$

olarak tanımlanmak üzere

$$W U = 0 \quad (2.36)$$

homojen cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin non-trivial bir çözüme sahip olması için

$$\det W = 0 \quad (2.37)$$

olmalıdır. (2.37) bağıntısı ara işlemlerden sonra

$$\tan(kp_2 h) = \frac{p_1 p_2 + \gamma_1 \gamma_2 p_2 p_3}{\gamma_1 p_2^2 - \gamma_2 p_1 p_3} \quad (2.38)$$

olarak elde edilir. Bu bağıntı, faz hızı (2.21) eşitsizliğini sağlayan SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır ve ilk defa Stoneley tarafından elde edilmiştir [9].

2.3.1 Dispersiyon Bağıntısı Grafikleri

Bu bölümde, üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz bir elastik ortamda yayılan enine kayma dalgalarının (2.38)'deki dispersiyon bağıntısının faz hızı-dalga sayısı eğrilerinin grafikleri hesaplanıp çizilecektir. Dikkat edilirse (2.38) bağıntısı, değişkenleri (c, k) olan bir denklemdir ve bu denklemin yapısı çok karmaşık olduğu için bu denklemden $c = c(k)$ bağıntısını analitik olarak hesaplamak mümkün değildir. Bu nedenle, dispersiyon bağıntısının eğrileri nümerik olarak hesaplanacaktır. Bu dispersiyon bağıntısı, yapısındaki trigonometrik ifadeden dolayı birden fazla fonksiyon tanımlar ve bu fonksiyonların her biri dispersiyon bağıntısının bir dalını oluşturur. Bu çalışmada, dispersiyon bağıntısına ait on dal ele alınıp bu dalların grafikleri çizilmiştir.

Grafiklerde boyutsuz büyüklükler kullanılacağından şimdi (2.21)'den

$$1 < \frac{c}{c_2} < \frac{c_1}{c_2} < \frac{c_3}{c_2} \quad (2.39)$$

yazalım ve bu eşitsizliği göz önüne alarak

$$C = \frac{c}{c_2} \quad (2.40)$$

tanımını yapalım. Ayrıca,

$$K = kh > 0, \quad m_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad m_2 = \frac{c_3}{c_2} \quad (2.41)$$

tanımlarını yapalım. Lineer malzeme özellikleri ile ilgili parametreler

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1 \text{ ve } \mu_1 = 4, \mu_2 = 1, \mu_3 = 9 \quad (2.42)$$

olarak seçilmektedir. Böyle seçilen lineer model için (2.15) ve (2.20)'den

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 3, \quad \gamma_1 = 1/4, \quad \gamma_2 = 9 \quad (2.43)$$

olarak bulunur. (2.32)'de tanımlanan p_1 , p_2 ve p_3 yukarıda verilen tanımlara göre yeniden yazılırsa

$$p_1^2 = 1 - \frac{C^2}{4} > 0, \quad p_2^2 = C^2 - 1 > 0, \quad p_3^2 = 1 - \frac{C^2}{9} > 0 \quad (2.44)$$

olarak ifade edilir. Şimdi, yapılan tüm bu tanımlar ışığında (2.38)'de elde edilen dispersiyon bağıntısı yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılır;

$$\tan\left(K\sqrt{C^2-1}\right) = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{(C^2-1)\left(1-\frac{C^2}{9}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{C^2}{4}\right)(C^2-1)}}{\frac{1}{4}(C^2-1) - 9\sqrt{\left(1-\frac{C^2}{4}\right)\left(1-\frac{C^2}{9}\right)}}. \quad (2.45)$$

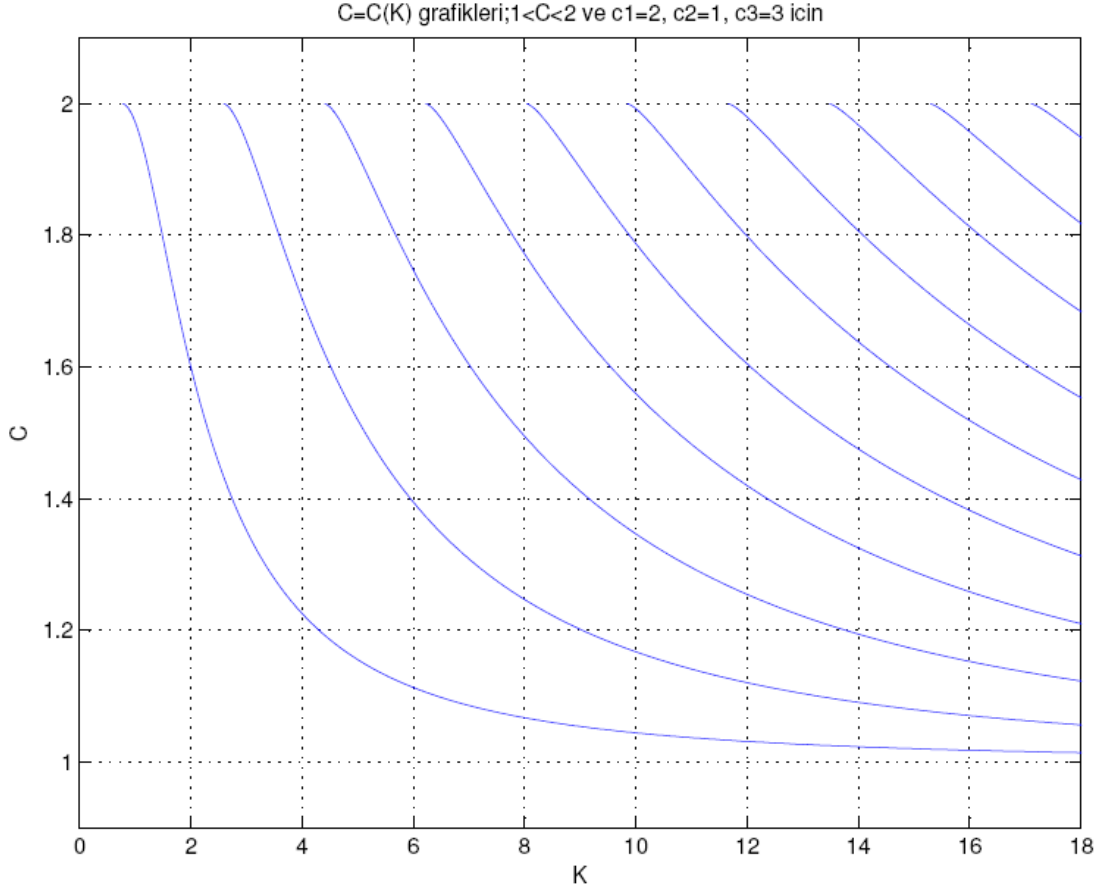
Elde edilen bu bağıntıdan $C = C(K)$ eğrilerinin grafikleri artık hesaplanabilir. (2.39)

ve (2.45) dikkate alınarak $C = C(K)$ grafikleri için

$$1 < C < 2 \text{ ve } K > 0.7610 \quad (2.46)$$

eşitsizlikleri yazılır. $C = 2$ sınır değerinde, (2.45) bağıntısından $K = 0.7610$ elde edilir. Bu birinci dal için cut-off dalga sayısıdır. $K \leq 0.7610$ için yayılma yoktur.

Diğer dallar için de cut-off dalga sayıları, (2.45)'te $C = 2$ yazılarak elde edilen $\tan(K\sqrt{3}) = \sqrt{15}$ bağıntısından hesaplanabilir. (2.45)'teki dispersiyon bağıntısının seçilen dallarının grafikleri şekil 2.2'de verilmiştir. Bu grafikler Matlab'ta yazılan bir kod ile çizdirilmiştir. Bu kod Ek B'de verilmiştir.



Şekil 2.2 : (2.45)'teki dispersiyon bağıntısının $C = C(K)$ grafikleri (Dispersiyon bağıntısının ele alınan dallarının grafikleri).

Grafikler incelendiğinde, tabaka kalınlığının dalga yayılmasını etkilediği görülmektedir. Tabaka kalınlığı küçüldükçe faz hızının arttığı gözlemlenmektedir. Ancak, $h \rightarrow 0$ ve dolayısıyla $K \rightarrow 0$ limitinde yayılma olmamaktadır. Yayılmanın var olduğu K aralığı ise $K > 0.7610$ 'dur.

Sonuç olarak, yarım-uzaylar arasındaki tabaka kalınlığı küçüldükçe; bu tabakanın etkisi de azalmakta ve faz hızı, üst yarım-uzay ortamındaki dalgaların yayılma hızına yaklaşmaktadır. Yarım-uzaylar arasındaki tabaka tamamen kaldırıldığında ise yayılma gerçekleşmemektedir.

3. NONLİNEER ENİNE KAYMA (SH) DALGALARININ MODÜLASYONU

3.1 Giriş

Bu bölümde, lineer özellikleri

$$c_2 < c < c_1 < c_3 \quad (3.1)$$

eşitsizliklerini sağlayan ve üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış bir tabakalı elastik ortamda nonlinear enine kayma (SH) dalgalarının self modülasyonu bir asimptotik pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenecektir. Bu incelemede, nonlinear self modülasyonun bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. NLS denklemi ile karakterize edilen asimptotik dalga alanının çözümlerinin davranışlarını belirlemek için bu NLS denkleminin katsayı fonksiyonlarının dalga sayısına göre değişimleri elde edilmiştir.

3.2 Nonlinear Enine Kayma (SH) Dalgalarının Self Modülasyonu

Küçük fakat sonlu genlikli SH tipi enine kayma dalgalarının self modülasyonu değişik ölçekler yöntemi (the multiple scale method) kullanılarak incelenecektir [6,11]. Bunun için X , Y ve t bağımsız değişkenleri yerine

$$x_i = \epsilon^i X, t_i = \epsilon^i t, y = Y, \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.2)$$

bağıntıları ile yeni bağımsız değişkenler tanımlayalım ve u , v , ve w 'nin bu yeni değişkenlerin fonksiyonları olduklarını kabul edelim. Burada ϵ nonlineerliğin mertebesini belirten küçük, pozitif bir parametre ($0 < \epsilon < 1$); x_1 , x_2 , t_1 , t_2 ise yayılma olayında yavaş değişimi ifade eden değişkenlerdir.

Şimdi u , v ve w 'nin $\{\epsilon^n\}$ asimptotik dizisine göre

$$u \cong \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.3a)$$

$$v \cong \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n v_n (x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.3b)$$

$$w \cong \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n w_n (x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.3c)$$

formlarında üniform olarak geçerli asimptotik açılımlara sahip olduklarını kabul edelim. Eski ve yeni bağımsız değişkenlere göre türev operasyonları arasında

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.4c, d)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_1} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_2} \right) \quad (3.4e)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_2} \right) \quad (3.4f)$$

bağıntıları mevcuttur. (2.10-12) hareket denklemleri ve (2.16-19)'daki sınır koşullarına (3.4)'teki türev operasyonları dikkate alınarak (3.2) dönüşümü uygulandıktan sonra (3.3)'te verilen asimptotik açılımlar kullanılırsa, ϵ 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek u_n , v_n ve w_n 'nin ardışık olarak hesaplanabilecekleri bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Bu problemlerin ilk üçü aşağıda verilmektedir:

$\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_1 = 0, \quad \mathcal{L}_0^{(2)} v_1 = 0, \quad \mathcal{L}_0^{(3)} w_1 = 0 \quad (3.5a, b, c)$$

$$y \rightarrow \infty \text{ için } u_1 \rightarrow 0 \quad (3.5d)$$

$$y = 0 \text{ 'da } u_1 = v_1 \text{ ve } \frac{\partial u_1}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3.5e, f)$$

$$y = -h \text{ 'de } v_1 = w_1 \text{ ve } \frac{\partial v_1}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \quad (3.5g, h)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } w_1 \rightarrow 0 \quad (3.5i)$$

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_2 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_1, \quad \mathcal{L}_0^{(2)} v_2 = \mathcal{L}_1^{(2)} v_1, \quad \mathcal{L}_0^{(3)} w_2 = \mathcal{L}_1^{(3)} w_1 \quad (3.6a, b, c)$$

$$y \rightarrow \infty \text{ için } u_2 \rightarrow 0 \quad (3.6d)$$

$$y = 0 \text{ 'da } u_2 = v_2 \text{ ve } \frac{\partial u_2}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (3.6e, f)$$

$$y = -h \text{ 'de } v_2 = w_2 \text{ ve } \frac{\partial v_2}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0 \quad (3.6g, h)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } w_2 \rightarrow 0 \quad (3.6i)$$

$\mathcal{O}(\epsilon^3)$:

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_3 = \mathcal{L}_1^{(1)} u_2 + \mathcal{L}_2^{(1)} u_1 + n_1 \mathcal{H}_0(u_1) \quad (3.7a)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)} v_3 = \mathcal{L}_1^{(2)} v_2 + \mathcal{L}_2^{(2)} v_1 + n_2 \mathcal{H}_0(v_1) \quad (3.7b)$$

$$\mathcal{L}_0^{(3)} w_3 = \mathcal{L}_1^{(3)} w_2 + \mathcal{L}_2^{(3)} w_1 + n_3 \mathcal{H}_0(w_1) \quad (3.7c)$$

$$y \rightarrow \infty \text{ için } u_3 \rightarrow 0 \quad (3.7d)$$

$$y = 0 \text{ 'da } u_3 = v_3 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial v_3}{\partial y} = \gamma_1 \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \mathcal{K}_0(v_1) - \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1) \quad (3.7e, f)$$

$y = -h$ 'de $v_3 = w_3$ ve

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial w_3}{\partial y} = \gamma_2 \beta_3 \frac{\partial w_1}{\partial y} \mathcal{K}_0(w_1) - \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \mathcal{K}_0(v_1) \quad (3.7g, h)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } w_3 \rightarrow 0. \quad (3.7i)$$

Burada, $\mathcal{L}_i^{(v)}$, $i = 0, 1, 2$, $v = 1, 2, 3$; \mathcal{H}_0 , \mathcal{K}_0 diferansiyel operatörleri

$$\mathcal{L}_0^{(v)}\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0^2} - c_v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad \mathcal{L}_1^{(v)}\psi = 2 \left(c_v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_1} \right) \quad (3.8a, b)$$

$$\mathcal{L}_2^{(v)}\psi = c_v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_0 \partial t_2} \quad (3.8c)$$

$$\mathcal{H}_0(\psi) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \mathcal{K}_0(\psi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathcal{K}_0(\psi) \right) \quad (3.8d)$$

$$\mathcal{K}_0(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \quad (3.8e)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Dikkat edilirse (2.22-2.28) denklemleri ile tanımlanan lineer problemle, (3.5a-i) denklemleri ile tanımlanan ϵ mertebesindeki pertürbasyon problemi ile eş yapıdadır. Yalnız (2.22-2.28) denklemleri ile tanımlanan problemde u , v ve w

$$u = u(X, Y, t), \quad v = v(X, Y, t), \quad w = w(X, Y, t) \quad (3.9)$$

yapısında fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar, problemi tanımlayan denklemler sınır koşulları sağlanacak şekilde çözümlenerek tamamen belirlenir. (3.5a-i) ile tanımlanan ϵ mertebesindeki lineer problemde ise u_1 , v_1 ve w_1

$$u_1 = u_1(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.10a)$$

$$v_1 = v_1(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.10b)$$

$$w_1 = w_1(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \quad (3.10c)$$

yapısında fonksiyonlardır ve aşağıda gösterileceği gibi ϵ mertebesinde problem çözülerek u_1 , v_1 ve w_1 'in ancak x_0 , t_0 ve y değişkenlerine bağılıklarının yapısı açık olarak hesaplanabilmektedir. Bu fonksiyonların diğer bağımsız değişkenlere bağılıkları daha üst mertebe pertürbasyon problemlerinin çözümlerinden belirlenebilmektedir.

Dikkat edilirse ikinci ve üçüncü mertebe problemlerde, bu problemlerdeki denklemlerin sağ tarafları bir önceki mertebedeki problemlerden belirlenmiş olacakları için, birinci mertebedeki gibi lineer problemlerdir. Ancak, bu problemlerde, hareket denklemleri ve bazı sınır koşulları inhomojen yapıda olacaktır. Şimdi, ϵ mertebesindeki problemden başlayarak bu problemlerin çözümlerini (3.1)'de verilen koşul altında bulacağız.

3.2.1 $c_2 < c < c_1 < c_3$ İçin Analiz

Birinci mertebe problemdeki (3.5a, b, c) denklemlerinin çözümleri bölüm 2.3'teki gibi değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilirler;

$$u_1 = \sum_{l=1}^{\infty} A_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-lkp_1 y} e^{il\phi} + c.c. \quad (3.11a)$$

$$v_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ B_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y} + C_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} \right\} e^{il\phi} + c.c. \quad (3.11b)$$

$$w_1 = \sum_{l=1}^{\infty} D_1^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_3 y} e^{il\phi} + c.c.. \quad (3.11c)$$

Bu çözüm formları, (2.33) çözüm formları dikkate alınarak yazılmıştır. Burada "c.c." sembolleri önceki terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. Ayrıca,

$$\phi = kx_0 - \omega t_0 \quad (3.12)$$

şeklinde ve p_1 , p_2 , p_3 ise (2.32)'deki gibi tanımlanmaktadır. $A_1^{(l)}$, $B_1^{(l)}$, $C_1^{(l)}$, $D_1^{(l)}$ birinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve problemin sınır koşullarından elde

edileceklerdir. Bunları elde etmek amacıyla (3.11)'de verilen çözümler, (3.5e-h) sınır koşullarında kullanılırsa

$$W_l = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -lkp_1 & il\gamma_1kp_2 & -il\gamma_1kp_2 & 0 \\ 0 & e^{ilkp_2h} & e^{-ilkp_2h} & -e^{-lkp_3h} \\ 0 & -ilkp_2e^{ilkp_2h} & ilkp_2e^{-ilkp_2h} & -\gamma_2lkp_3e^{-lkp_3h} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

ve

$$U_1^{(l)} = [A_1^{(l)} \quad B_1^{(l)} \quad C_1^{(l)} \quad D_1^{(l)}]^T \quad (3.14)$$

olarak tanımlanmak üzere

$$W_l U_1^{(l)} = 0 \quad (3.15)$$

homojen cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Dikkat edilirse $l=1$ için (3.13) ile tanımlanan W_1 matrisi, (2.34)'te verilen matrise özdeştir. Dolayısıyla,

$$\det W_1 = \det W = 0 \quad (3.16)$$

denkleminde (2.38)'de verilen dispersiyon bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı

$$\tan(kp_2h) = \frac{p_1p_2 + \gamma_1\gamma_2p_2p_3}{\gamma_1p_2^2 - \gamma_2p_1p_3} \quad (3.17)$$

şeklindedir.

Bu bölümde, bir k dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının nonlineer self-modülasyonu incelendiğinden yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıklarını kabul ediyoruz. Yani,

$$l \geq 2 \text{ için } \det W_l \neq 0 \quad (3.18)$$

dır. Bu koşul altında (3.15)'in çözümleri, R

$$W_l R = 0 \quad (3.19)$$

denklemini sağlayan bir sütün vektörü olmak üzere

$$l = 1 \quad \text{için} \quad U_1^{(l)} = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \mathbf{R} \quad (3.20)$$

ve

$$l \geq 2 \quad \text{için} \quad U_1^{(l)} = 0 \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. (3.19) denkleminin bir çözümü, $a \in \mathbb{R}$ ve

$$R_1 = \frac{a\gamma_1}{p_1} \left[p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h) \right] e^{-kp_3 h}$$

$$R_2 = \frac{a}{2} \left[1 + i \frac{\gamma_2 p_3}{p_2} \right] e^{-kp_3 h - ikp_2 h}, \quad R_3 = \frac{a}{2} \left[1 - i \frac{\gamma_2 p_3}{p_2} \right] e^{-kp_3 h + ikp_2 h} = \overline{R_2}$$

$$R_4 = a \quad (3.22)$$

olmak üzere

$$\mathbf{R} = [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4]^T \quad (3.23)$$

olarak elde edilir. Burada $\overline{R_2}$, R_2 'nin kompleks eşleniğini göstermektedir. (3.20) ve (3.21) kullanılarak, birinci mertebe çözümler (3.11)'den aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_1 = \mathcal{A}_1 R_1 e^{-kp_1 y + i\phi} + c.c. \quad (3.24a)$$

$$v_1 = \mathcal{A}_1 \left(R_2 e^{-ikp_2 y} + R_3 e^{ikp_2 y} \right) e^{i\phi} + c.c. \quad (3.24b)$$

$$w_1 = \mathcal{A}_1 R_4 e^{kp_3 y + i\phi} + c.c.. \quad (3.24c)$$

Birinci mertebe çözümün tamamen belirlenebilmesi için dalga modülasyonunun birinci mertebe yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonu \mathcal{A}_1 'in hesaplanması yeterli olacaktır.

(3.24)'te verilen birinci mertebe çözümler, ikinci mertebe pertürbasyon probleminin (3.6a, b, c)'de verilen denklemlerinde kullanılırsa bu denklemler aşağıdaki formlarda yazılır;

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_2 = 2i \mathcal{M}_{11}^{(1)} R_1 e^{-kp_1 y + i\phi} + c.c. \quad (3.25a)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)} v_2 = 2i \mathcal{M}_{11}^{(2)} \left(R_2 e^{-ikp_2 y} + R_3 e^{ikp_2 y} \right) e^{i\phi} + c.c. \quad (3.25b)$$

$$\mathcal{L}_0^{(3)} w_2 = 2i \mathcal{M}_{11}^{(3)} R_4 e^{kp_3 y + i\phi} + c.c.. \quad (3.25c)$$

Burada

$$\mathcal{M}_{11}^{(\alpha)} = \omega \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + k c_\alpha^2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.26)$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.25) denklemlerinin çözümlerini

$$u_2 = \bar{u}_2 + \tilde{u}_2, \quad v_2 = \bar{v}_2 + \tilde{v}_2, \quad w_2 = \bar{w}_2 + \tilde{w}_2 \quad (3.27)$$

formlarında iki parça şeklinde yazalım. Burada \bar{u}_2 , \bar{v}_2 ve \bar{w}_2 sırası ile (3.25a), (3.25b) ve (3.25c) denklemlerinin özel çözümleri; \tilde{u}_2 , \tilde{v}_2 ve \tilde{w}_2 ise

$$\mathcal{L}_0^{(1)} \tilde{u}_2 = 0, \quad \mathcal{L}_0^{(2)} \tilde{v}_2 = 0, \quad \mathcal{L}_0^{(3)} \tilde{w}_2 = 0 \quad (3.28a, b, c)$$

homojen denklemlerinin, (3.6d-i)'den (3.27) kullanılarak türetilen aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun;

$$y \rightarrow \infty \text{ için } \bar{u}_2 + \tilde{u}_2 \rightarrow 0 \quad (3.29a)$$

$$y = 0 \text{ 'da } \tilde{u}_2 - \tilde{v}_2 = -(\bar{u}_2 - \bar{v}_2) \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} = - \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} \right) \quad (3.29b, c)$$

$$y = -h \text{ 'de } \tilde{v}_2 - \tilde{w}_2 = -(\bar{v}_2 - \bar{w}_2) \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial y} = - \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial y} \right) \quad (3.29d, e)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } \bar{w}_2 + \tilde{w}_2 \rightarrow 0. \quad (3.29f)$$

(3.25)'te verilen denklemlerin özel çözümleri belirsiz katsayılar yöntemi ile bulunabilir. Dolayısıyla \bar{u}_2 , \bar{v}_2 ve \bar{w}_2 sırası ile

$$\bar{u}_2 = C_1 y e^{-kp_1 y + i\phi} + c.c. \quad (3.30a)$$

$$\bar{v}_2 = (C_2 e^{-ikp_2 y} + C_3 e^{ikp_2 y}) y e^{i\phi} + c.c. \quad (3.30b)$$

$$\bar{w}_2 = C_4 y e^{kp_3 y + i\phi} + c.c. \quad (3.30c)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$C_\alpha = C_\alpha(x_1, x_2, t_1, t_2), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (3.31)$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.30)'daki çözüm formları (3.25)'teki denklemlerde kullanılırsa, ara işlemlerden sonra C_α 'lar

$$\begin{aligned} C_1 &= i \frac{R_1}{kp_1 c_1^2} \mathcal{M}_{11}^{(1)}, \quad C_2 = \frac{R_2}{kp_2 c_2^2} \mathcal{M}_{11}^{(2)} \\ C_3 &= -\frac{R_3}{kp_2 c_2^2} \mathcal{M}_{11}^{(2)}, \quad C_4 = -i \frac{R_4}{kp_3 c_3^2} \mathcal{M}_{11}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

olarak elde edilir. (3.28) homojen denklemlerinin çözümleri ise birinci mertebe problemin çözümleri gibi değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak aşağıdaki formlarda yazılır;

$$\tilde{u}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} A_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-lkp_1 y} e^{il\phi} + c.c. \quad (3.33a)$$

$$\tilde{v}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ B_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-ilkp_2 y} + C_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ilkp_2 y} \right\} e^{il\phi} + c.c. \quad (3.33b)$$

$$\tilde{w}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} D_2^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{ikp_3 y} e^{il\phi} + c.c.. \quad (3.33c)$$

Burada $A_2^{(l)}$, $B_2^{(l)}$, $C_2^{(l)}$ ve $D_2^{(l)}$ ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar, (3.29b-e) sınır koşulları kullanılarak bulunacaktır. (3.14)'teki gibi

$$U_2^{(l)} = \left[A_2^{(l)} \quad B_2^{(l)} \quad C_2^{(l)} \quad D_2^{(l)} \right]^T \quad (3.34)$$

vektörlerini tanımlayalım. Şimdi (3.33) çözümleri (3.29b-e) sınır koşullarında kullanılırsa $U_2^{(l)}$ 'ler için aşağıdaki cebirsel denklem sistemleri elde edilir;

$$W_l U_2^{(l)} = b_2^{(l)}. \quad (3.35)$$

(3.35) denkleminde $b_2^{(l)}$ vektörleri, $l=1$ için

$$b_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_1 + \gamma_1 (C_2 + C_3) \\ he^{ikp_2 h} C_2 + he^{-ikp_2 h} C_3 - he^{-kp_3 h} C_4 \\ (-1 - ikp_2 h) e^{ikp_2 h} C_2 + (-1 + ikp_2 h) e^{-ikp_2 h} C_3 + \gamma_2 (1 - kp_3 h) e^{-kp_3 h} C_4 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

ve

$$l \geq 2 \text{ için } b_2^{(l)} \equiv 0 \quad (3.37)$$

dır. Dikkat edilirse, W_1 matrisinin ve R vektörünün tanımları kullanılarak

$$b_2^{(1)} = -i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} \frac{\partial W_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \frac{\partial W_1}{\partial k} \right) R \quad (3.38)$$

olduğu görülür. $\det W_1 = 0$ ve $b_2^{(1)} \neq 0$ olduğundan (3.35) denkleminin $l=1$ için çözümlerinin olması için L ,

$$LW_1 = 0 \quad (3.39)$$

ile tanımlanan bir satır vektörü olmak üzere

$$Lb_2^{(1)} = 0 \quad (3.40)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. (3.39) denklemini sağlayan bir

$$L = [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4] \quad (3.41)$$

vektörünün bileşenleri, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L_1 = bp_1k$$

$$L_2 = b$$

$$L_3 = bk [p_1 \cos(kp_2h) - \gamma_1 p_2 \sin(kp_2h)]$$

$$L_4 = b \left[\frac{p_1}{p_2} \sin(kp_2h) + \gamma_1 \cos(kp_2h) \right] \quad (3.42)$$

olarak bulunur. (3.19) denklemi k 'ya göre türetilirse

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial W_1}{\partial \omega} \right) R + W_1 \left(\frac{\partial R}{\partial k} + V_g \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) = 0 \quad (3.43)$$

elde edilir. Burada V_g

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.44)$$

olarak tanımlanmakta ve grup hızını göstermektedir. (3.43) denklemi soldan L ile çarpılıp (3.39) kullanılırsa

$$V_g = - \left(L \frac{\partial W_1}{\partial k} R \right) / \left(L \frac{\partial W_1}{\partial \omega} R \right) \quad (3.45)$$

olduğu bulunur. (3.45) dikkate alınır ve (3.38) kullanılırsa (3.40) uygunluk koşulundan

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = 0 \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.46) denklemi, \mathcal{A}_1 'in V_g grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldığını gösterir. Yani, \mathcal{A}_1 fonksiyonu

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \quad (3.47)$$

yapısında olur. (3.43) ve (3.46) kullanılarak $l = 1$ için (3.35) denkleminin çözümü

$$U_2^{(1)} = \mathcal{A}_2(x_1, x_2, t_1, t_2) R - i \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial R}{\partial k} + V_g \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \quad (3.48)$$

formunda yazılabilir. Burada \mathcal{A}_2 , dalga modülasyonunun yavaş değişen ikinci mertebe genliğini göstermektedir ve gerektiğinde yukarı mertebe pertürbasyon problemlerinden elde edilir. Ancak, bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılması ile ilgilenildiğinden sadece birinci mertebe üniform geçerli çözümün inşası hedeflenmektedir. Bu çözüme ulaşmak için \mathcal{A}_1 'in belirlenmesi yeterli olacaktır.

$l \geq 2$ için (3.35)'in çözümü, $l \neq 1$ için $\det W_l \neq 0$ kabul edildiğinden ve $l \neq 1$ için $b_2^{(l)} \equiv 0$ olduğundan

$$U_2^{(l)} \equiv 0 \quad (3.49)$$

dır.

Böylece birinci ve ikinci mertebe çözümler tamamlanmış oldu ancak, \mathcal{A}_1 fonksiyonu henüz tam olarak belirlenemedi. \mathcal{A}_1 fonksiyonunu belirlemek için üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin çözümü incelenecektir. Daha önce türetilen birinci ve ikinci mertebe çözümler, üçüncü mertebe probleme ait (3.7a-c) denklemlerinde kullanılırsa uzun ara işlemlerden sonra (3.7a-c) denklemleri aşağıdaki formlara indirgenir;

$$\mathcal{L}_0^{(1)} u_3 = \left(\mathcal{D}_1 e^{-kp_1 y} + \mathcal{D}_2 y e^{-kp_1 y} + \mathcal{D}_3 e^{-3kp_1 y} \right) e^{i\phi} + \left(e^{3i\phi} \text{ 'li terimler} \right) + c.c. \quad (3.50a)$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)} v_3 = \left(\mathcal{D}_4 e^{-ikp_2 y} + \mathcal{D}_5 y e^{-ikp_2 y} + \mathcal{D}_6 e^{ikp_2 y} + \mathcal{D}_7 y e^{ikp_2 y} + \mathcal{D}_8 e^{-3ikp_2 y} \right)$$

$$+\mathcal{D}_9 e^{3ikp_2 y} e^{i\phi} + (e^{3i\phi} \text{ 'li terimler}) + c.c. \quad (3.50b)$$

$$\mathcal{L}_0^{(3)} w_3 = (\mathcal{D}_{10} e^{kp_3 y} + \mathcal{D}_{11} y e^{kp_3 y} + \mathcal{D}_{12} e^{3kp_3 y}) e^{i\phi} + (e^{3i\phi} \text{ 'li terimler}) + c.c.. \quad (3.50c)$$

Burada

$$\mathcal{D}_1 = 2iR_1 \mathcal{M}_{21}^{(1)} + 2iR_1 \mathcal{M}_{12}^{(1)} + 2\Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(1)} + R_1 \mathcal{N}^{(1)}$$

$$\mathcal{D}_2 = -\frac{2R_1}{kp_1 c_1^2} \left(\omega \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(1)}$$

$$\mathcal{D}_3 = n_1 k^4 (9p_1^4 + 2p_1^2 - 3) R_1 |R_1|^2 \mathcal{A}_1 |\mathcal{A}_1|^2$$

$$\mathcal{D}_4 = 2iR_2 \mathcal{M}_{21}^{(2)} + 2iR_2 \mathcal{M}_{12}^{(2)} + 2\Lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(2)} + R_2 \mathcal{N}^{(2)} - \mathcal{P}^-$$

$$\mathcal{D}_5 = \frac{2iR_2}{kp_2 c_2^2} \left(\omega \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(2)}$$

$$\mathcal{D}_6 = 2iR_3 \mathcal{M}_{21}^{(2)} + 2iR_3 \mathcal{M}_{12}^{(2)} + 2\Lambda_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(2)} + R_3 \mathcal{N}^{(2)} - \mathcal{P}^+$$

$$\mathcal{D}_7 = -\frac{2iR_3}{kp_2 c_2^2} \left(\omega \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(2)}$$

$$\mathcal{D}_8 = \mathcal{Q}^-$$

$$\mathcal{D}_9 = \mathcal{Q}^+$$

$$\mathcal{D}_{10} = 2iR_4 \mathcal{M}_{21}^{(3)} + 2iR_4 \mathcal{M}_{12}^{(3)} + 2\Lambda_4 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{M}_{11}^{(3)} + R_4 \mathcal{N}^{(3)}$$

$$\mathcal{D}_{11} = \frac{2R_4}{kp_3 c_3^2} \left(\omega \frac{\partial}{\partial t_1} + kc_3^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathcal{M}_{11}^{(3)}$$

$$\mathcal{D}_{12} = n_3 k^4 (9p_3^4 + 2p_3^2 - 3) R_4 |R_4|^2 \mathcal{A}_1 |\mathcal{A}_1|^2 \quad (3.51)$$

ve

$$\mathcal{M}_{\beta\gamma}^{(\alpha)} = \omega \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial t_\gamma} + kc_\alpha^2 \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial x_\gamma}, \quad \mathcal{N}^{(\alpha)} = c_\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2}$$

$$\Lambda_\nu = \frac{\partial R_\nu}{\partial k} + V_g \frac{\partial R_\nu}{\partial \omega}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \beta = 1, 2, \quad \gamma = 1, 2, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathcal{P}^- = n_2 k^4 (9p_2^4 + 2p_2^2 + 9) R_3 R_2^2 \mathcal{A}_1 |\mathcal{A}_1|^2$$

$$\mathcal{P}^+ = n_2 k^4 (9p_2^4 + 2p_2^2 + 9) R_2 R_3^2 \mathcal{A}_1 |\mathcal{A}_1|^2$$

$$\mathcal{Q}^- = n_2 k^4 (9p_2^4 - 2p_2^2 - 3) R_2^2 \mathcal{A}_1 |\mathcal{A}_1|^2$$

$$\mathcal{Q}^+ = n_2 k^4 (9p_2^4 - 2p_2^2 - 3) R_3^2 \mathcal{A}_1 |\mathcal{A}_1|^2 \quad (3.52)$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca $|\psi|$, bir ψ büyüklüğünün modülünü göstermektedir.

İkinci mertebe problemdeki gibi, üçüncü mertebe problemin çözümlerini

$$u_3 = \bar{u}_3 + \tilde{u}_3, \quad v_3 = \bar{v}_3 + \tilde{v}_3, \quad w_3 = \bar{w}_3 + \tilde{w}_3 \quad (3.53)$$

formlarında iki parça şeklinde yazalım. Burada \bar{u}_3 , \bar{v}_3 ve \bar{w}_3 sırası ile (3.50a-c) denklemlerinin özel çözümleri; \tilde{u}_3 , \tilde{v}_3 , \tilde{w}_3 ise

$$\mathcal{L}_0^{(1)} \tilde{u}_3 = 0, \quad \mathcal{L}_0^{(2)} \tilde{v}_3 = 0, \quad \mathcal{L}_0^{(3)} \tilde{w}_3 = 0 \quad (3.54a, b, c)$$

homojen denklemlerinin, (3.7d-i)'den (3.53) kullanılarak türetilen, aşağıdaki homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olsun;

$$y \rightarrow \infty \text{ için } \bar{u}_3 + \tilde{u}_3 \rightarrow 0 \quad (3.55a)$$

$$y = 0 \text{ 'da } \tilde{u}_3 - \tilde{v}_3 = -(\bar{u}_3 - \bar{v}_3) \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} = - \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y} \right) + \gamma_1 \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \mathcal{K}_0(v_1) - \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathcal{K}_0(u_1) \quad (3.55b, c)$$

$$y = -h \text{ 'de } \tilde{v}_3 - \tilde{w}_3 = -(\bar{v}_3 - \bar{w}_3) \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial \tilde{w}_3}{\partial y} = - \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y} \right) + \gamma_2 \beta_3 \frac{\partial w_1}{\partial y} \mathcal{K}_0(w_1) - \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \mathcal{K}_0(v_1) \quad (3.55d, e)$$

$$y \rightarrow -\infty \text{ için } \bar{w}_3 + \tilde{w}_3 \rightarrow 0. \quad (3.55f)$$

\bar{u}_3 , \bar{v}_3 ve \bar{w}_3 özel çözümleri

$$\bar{u}_3^{(l)} = f_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{il\phi} + c.c. \quad (3.56a)$$

$$\bar{v}_3^{(l)} = g_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{il\phi} + c.c. \quad (3.56b)$$

$$\bar{w}_3^{(l)} = h_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{il\phi} + c.c. , \quad l=1,3 \quad (3.56c)$$

olmak üzere

$$\bar{u}_3 = \bar{u}_3^{(1)} + \bar{u}_3^{(3)}, \quad \bar{v}_3 = \bar{v}_3^{(1)} + \bar{v}_3^{(3)}, \quad \bar{w}_3 = \bar{w}_3^{(1)} + \bar{w}_3^{(3)} \quad (3.57)$$

formlarında lineer bağımsız fonksiyonların toplamı şeklinde ifade edilebilir. $l=1$ için $f_3^{(1)}$, $g_3^{(1)}$ ve $h_3^{(1)}$ fonksiyonları

$$f_3^{(1)} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 y) y e^{-kp_1 y} + \mathcal{E}_3 e^{-3kp_1 y} \quad (3.58a)$$

$$g_3^{(1)} = (\mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 y) y e^{-ikp_2 y} + (\mathcal{E}_6 + \mathcal{E}_7 y) y e^{ikp_2 y} + \mathcal{E}_8 e^{-3ikp_2 y} + \mathcal{E}_9 e^{3ikp_2 y} \quad (3.58b)$$

$$h_3^{(1)} = (\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{11} y) y e^{kp_3 y} + \mathcal{E}_{12} e^{3kp_3 y} \quad (3.58c)$$

formlarında seçilebilir. (3.58a, b, c) denklemleri (3.50a, b, c) denklemlerinde kullanılıp gerekli ara işlemler yapılırsa \mathcal{E}_i , $i=1,2,\dots,12$; katsayıları

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{D}_1}{2kp_1 c_1^2} + \frac{\mathcal{D}_2}{4k^2 p_1^2 c_1^2}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{D}_2}{4kp_1 c_1^2}, \quad \mathcal{E}_3 = -\frac{\mathcal{D}_3}{8k^2 p_1^2 c_1^2},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_4 &= -\frac{i\mathcal{D}_4}{2kp_2c_2^2} - \frac{\mathcal{D}_5}{4k^2p_2^2c_2^2}, & \mathcal{E}_5 &= -\frac{i\mathcal{D}_5}{4kp_2c_2^2}, & \mathcal{E}_6 &= \frac{i\mathcal{D}_6}{2kp_2c_2^2} - \frac{\mathcal{D}_7}{4k^2p_2^2c_2^2}, \\
\mathcal{E}_7 &= \frac{i\mathcal{D}_7}{4kp_2c_2^2}, & \mathcal{E}_8 &= \frac{\mathcal{D}_8}{8k^2p_2^2c_2^2}, & \mathcal{E}_9 &= \frac{\mathcal{D}_9}{8k^2p_2^2c_2^2}, \\
\mathcal{E}_{10} &= -\frac{\mathcal{D}_{10}}{2kp_3c_3^2} + \frac{\mathcal{D}_{11}}{4k^2p_3^2c_3^2}, & \mathcal{E}_{11} &= -\frac{\mathcal{D}_{11}}{4kp_3c_3^2}, & \mathcal{E}_{12} &= -\frac{\mathcal{D}_{12}}{8k^2p_3^2c_3^2}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

olarak bulunur. $\bar{u}_3^{(3)}$, $\bar{v}_3^{(3)}$ ve $\bar{w}_3^{(3)}$ çözümleri benzer yol izlenerek hesaplanabilir. Ancak, sonraki kısımlarda bu fonksiyonların açık ifadelerine ihtiyaç olmayacağı için $\bar{u}_3^{(3)}$, $\bar{v}_3^{(3)}$ ve $\bar{w}_3^{(3)}$ çözümleri hesaplanmayacaktır.

\tilde{u}_3 , \tilde{v}_3 ve \tilde{w}_3 çözümleri, bir önceki pertürbasyon probleminde izlenen yol ile (3.54a-c) ve (3.55a-f) denklemleri kullanılarak bulunabilir. Dolayısıyla, (3.54a, b, c) homojen denklemlerinin çözümleri

$$\tilde{u}_3 = \sum_{l=1}^{\infty} A_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-l p_1 y} e^{i l \phi} + c.c. \tag{3.60a}$$

$$\tilde{v}_3 = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ B_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{-i l p_2 y} + C_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{i l p_2 y} \right\} e^{i l \phi} + c.c. \tag{3.60b}$$

$$\tilde{w}_3 = \sum_{l=1}^{\infty} D_3^{(l)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{l p_3 y} e^{i l \phi} + c.c. \tag{3.60c}$$

olarak yazılır. Burada $A_3^{(l)}$, $B_3^{(l)}$, $C_3^{(l)}$ ve $D_3^{(l)}$ üçüncü mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar (3.55b-e) sınır koşullarından hesaplanacaktır. Daha önceki mertebe problemlerinde yapıldığı gibi

$$U_3^{(l)} = \left[A_3^{(l)} \quad B_3^{(l)} \quad C_3^{(l)} \quad D_3^{(l)} \right]^T \tag{3.61}$$

vektör tanımı yapıp bu vektörler için, (3.60a, b, c) ile birlikte

$u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \bar{u}_3, \bar{v}_3$ ve \bar{w}_3 çözümleri (3.55b-e) sınır koşullarında kullanılırsa aşağıdaki cebirsel denklem sistemleri elde edilir:

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U}_3^{(l)} = \mathbf{b}_3^{(l)}. \quad (3.62)$$

$\mathbf{b}_3^{(l)}$ vektörleri $l=1$ ve $l=3$ için sıfırdan farklı, fakat $l \neq 1,3$ için özdeş olarak sıfırdır. $l=1$ için çok uzun ara işlemler yapıldıktan sonra bu vektör

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3^{(1)} = & \left[-i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) - i \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial t_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k \partial \omega} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}_1}{\partial k^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} \right) \right] \mathbf{R} \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1 \partial t_1} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} + V_g \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right) + F \mathcal{A}_1 |\mathcal{A}_1|^2 \end{aligned} \quad (3.63)$$

olarak bulunur. Buradaki F vektörünün (sütun vektörü) bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} F_1 = & \left[\frac{\beta_1 \gamma_1^3 k^2 (9p_1^4 + 2p_1^2 - 3)}{8 p_1^5} (p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h))^3 \right. \\ & + \frac{\beta_2 k^2 (9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{8 p_2^5} (p_2 \cos(kp_2 h) + \gamma_2 p_3 \sin(kp_2 h))^3 \\ & \left. - \frac{3\beta_2 k^2 (9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{32 p_2^5} (p_2^2 + \gamma_2^2 p_3^2) (p_2 \cos(kp_2 h) + \gamma_2 p_3 \sin(kp_2 h)) \right] e^{-3kp_3 h} \\ F_2 = & \left[-\frac{3\beta_1 \gamma_1^3 k^3 (9p_1^4 + 2p_1^2 - 3)}{8 p_1^4} (p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h))^3 \right. \\ & + \frac{\beta_2 \gamma_1 k^3 (9p_2^4 + 2p_2^2 + 9)}{8 p_2^4} (p_2^2 + \gamma_2^2 p_3^2) (p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h)) \\ & \left. + \frac{3\beta_2 \gamma_1 k^3 (9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{8 p_2^4} (p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h))^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{9\beta_2\gamma_1}{32} \frac{k^3(9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{p_2^4} (p_2^2 + \gamma_2^2 p_3^2) (p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h)) \\
& + \gamma_1 \beta_2 \frac{k^3(p_2 - 3p_2^3)}{p_2^3} (p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h))^3 \\
& - \gamma_1 \beta_2 \frac{k^3(p_2^2 + \gamma_2^2 p_3^2)}{p_2^2} (p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h)) \\
& + \gamma_1^3 \beta_1 \frac{k^3(p_1 + 3p_1^3)}{p_1^3} (p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h))^3 \Big] e^{-3kp_3 h} \\
F_3 = & \left[-\frac{\beta_2 \gamma_2}{8} \frac{hk^3(9p_2^4 + 2p_2^2 + 9)}{p_2^4} (p_2^2 + \gamma_2^2 p_3^2) p_3 \right. \\
& - \frac{\beta_2}{32} \frac{k^2(9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{p_2^4} (p_2^2 - 3\gamma_2^2 p_3^2) \\
& \left. - \frac{\beta_3}{8} \frac{k^2(9p_3^4 + 2p_3^2 - 3)}{p_3^2} \right] e^{-3kp_3 h} \\
F_4 = & \left[\frac{\beta_2}{8} \frac{hk^4(9p_2^4 + 2p_2^2 + 9)}{p_2^2} (p_2^2 + \gamma_2^2 p_3^2) \right. \\
& + \frac{\beta_2 \gamma_2}{8} \frac{k^3(9p_2^4 + 2p_2^2 + 9)}{p_2^4} (p_2^2 + \gamma_2^2 p_3^2) p_3 \\
& - \frac{3\beta_2 \gamma_2}{32} \frac{k^3(9p_2^4 - 2p_2^2 - 3)}{p_2^4} (3p_2^2 - \gamma_2^2 p_3^2) p_3 \\
& \left. - \frac{3\beta_3 \gamma_2}{8} \frac{k^3(9p_3^4 + 2p_3^2 - 3)}{p_3} \right. \\
& \left. + \gamma_2 \beta_3 k^3 (1 + 3p_3^2) p_3 - \gamma_2 \beta_2 k^3 (1 + 3\gamma_2^2 p_3^2) p_3 \right] e^{-3kp_3 h}. \tag{3.64}
\end{aligned}$$

$b_3^{(3)}$ vektörünün açık formu, ileriki hesaplarda kullanılmayacağı için gösterilmeyecektir.

$\det W_1 = 0$ ve $b_3^{(1)} \neq 0$ olduğundan (3.62) denkleminin $l=1$ için çözümü olabilmesi için

$$Lb_3^{(1)} = 0 \quad (3.65)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. Ayrıca, $l=3$ için $\det W_3 \neq 0$ olduğundan (3.62)'nin çözümü

$$U_3^{(3)} = W_3^{-1}b_3^{(3)} \quad (3.66)$$

olarak ifade edilir. $l \neq 1$ ve $l \neq 3$ için ise, bu l değerleri için $\det W_l \neq 0$ ve $b_3^{(l)} \equiv 0$ olduğundan

$$U_3^{(l)} \equiv 0, \quad l \neq 1, 3 \quad (3.67)$$

olarak bulunur. Burada, birinci mertebe üniform geçerli çözümü elde etmek için $U_3^{(1)}$ ve $U_3^{(3)}$ çözümlerinin açık yapılarına ihtiyaç duyulmadığından bu vektörlerin açık yapıları elde edilmeye çalışılmayacaktır.

(3.65) uygunluk koşulu, (3.45) kullanılarak yeniden yazılırsa

$$i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) + \tilde{\Gamma} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial x_1^2} + \tilde{\Delta} \mathcal{A}_1 |\mathcal{A}_1|^2 + i \left(\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (3.68)$$

olarak bulunur. Burada $\tilde{\Gamma}$ ve $\tilde{\Delta}$ sabitleri

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = & - \left[\frac{1}{2} L \left(V_g^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \omega^2} + 2V_g \frac{\partial^2 W_1}{\partial \omega \partial k} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial k^2} \right) R \right. \\ & \left. + L \left(\frac{\partial W_1}{\partial k} + V_g \frac{\partial W_1}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial k} + V_g \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \right] / \left(L \frac{\partial W_1}{\partial \omega} R \right) \end{aligned} \quad (3.68a)$$

$$\tilde{\Delta} = -LF / \left(L \frac{\partial W_1}{\partial \omega} R \right) \quad (3.68b)$$

olarak tanımlanmıştır.

(3.68) denklemine bakılırsa, \mathcal{A}_2 fonksiyonu bir şekilde belirlenebilirse bu denklem \mathcal{A}_1 'in bulunması için kullanılabilir. Dolayısıyla, problemin birinci merteye üniform geçerli çözümü de bulunmuş olur. (3.68)'de \mathcal{A}_2 'yi içeren terimlerin yapısı incelendiğinde, eğer \mathcal{A}_2 fonksiyonunun x_1 ve t_1 değişkenlerine bağıllığı, \mathcal{A}_1 'in bu değişkenlere bağıllığı gibi kabul edilirse, yani

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \quad (3.69)$$

yapısında kabul edilirse,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} = 0 \quad (3.70)$$

elde edilir. Bu bağıntı (3.68)'de kullanılırsa, (3.68) sadece \mathcal{A}_1 için bir denkleme dönüşür. $W_1 R = 0$ denklemini, $\omega = \omega(k)$ olduğu kabul edilerek k 'ya göre iki defa türetilip bu sonuç soldan L satır vektörü ile çarpılırsa elde edilen ifade (3.68a) ile ilişkilendirildiğinde bu denklemdeki $\tilde{\Gamma}$ katsayısı

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{dV_g}{dk} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \quad (3.71)$$

olarak yazılır. Aşağıda verilen boyutsuz değişkenler ve sabitler kullanılarak

$$\tau = \omega t_2 = \omega \epsilon t_1 = \omega \epsilon^2 t, \quad \xi = k \epsilon^{-1} (x_2 - V_g t_2) = k (x_1 - V_g t_1) = k \epsilon (X - V_g t)$$

$$\mathcal{A} = k \mathcal{A}_1, \quad \Gamma = k^2 \tilde{\Gamma} / \omega, \quad \Delta = \tilde{\Delta} / (\omega k^2) \quad (3.72)$$

(3.68) denklemini, (3.69) varsayımı altında aşağıdaki forma dönüşür;

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta \mathcal{A} |\mathcal{A}|^2 = 0. \quad (3.73)$$

Dikkat edilirse (3.73) denklemi nonlinear Schrödinger (NLS) denklemdir. Bu denklem değişik alanlarda nonlinear dalga modülasyonunu asimptotik olarak karakterize etmek için türetilmiştir.

(3.73) denkleminin verilen bir

$$\mathcal{A}(\xi, 0) = \mathcal{A}_0(\xi) \quad (3.74)$$

başlangıç koşulu için çözümü bulunduktan sonra birinci merteye çözümler (3.24) denklemleri kullanılarak inşa edilir. Buradaki $\mathcal{A}_0(\xi)$ başlangıç değeri, tabaka ortamındaki yerdeğişirmelerin başlangıç değerlerine bağlıdır. Örneğin, $Y = y = 0$ ara yüzeyinde, $t = 0$ için, (3.24a)'dan;

$$U(X, 0, 0) = \epsilon \left[p_2 \sin(kp_2 h) - \gamma_2 p_3 \cos(kp_2 h) \right] \frac{\gamma_1}{kp_1} e^{-kp_3 h} \mathcal{A}_0(\epsilon k X) e^{ikX} \\ + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.75)$$

yazılır.

Bu çalışmadaki hedef, ele alınan problemin birinci merteye üniform geçerli çözümünü inşa etmektir. Dolayısıyla, çözümün tamamlanması (3.73)'teki NLS denkleminin çözümünü bulma problemine indirgenmiş oldu. Şimdi, genel olarak NLS denkleminin bazı çözümlerine ve bu çözümlerin davranışının, denklemdeki katsayı fonksiyonları çarpımı $\Gamma\Delta$ 'nın işaretinden nasıl etkilendiğine değinilecektir. Daha sonra, (3.73) NLS denklemindeki katsayı fonksiyonları çarpımı $\Gamma\Delta$ 'nın K 'ya göre değişimleri elde edilecek ve bu değişim doğrultusunda asimptotik dalga alanı çözümlerinin davranışları belirlenecektir.

3.2.2 NLS Denkleminin Bazı Çözümleri

(3.73) NLS denkleminin, ϕ reel bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{A}(\xi, \tau) = \phi(\zeta) e^{i(K\xi - \Omega\tau)}, \quad \zeta = \xi - V_0\tau, \quad V_0, K, \Omega \text{ sabitler} \quad (3.76)$$

formunda ilerleyen dalga çözümleri Jakobian eliptik fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir [11]. Bu çözümlerin elde edilmesi ve açık yapıları üzerinde durulmayacaktır. Bunun yerine bazı özel çözümlerin açık ifadeleri verilecektir.

$\zeta \rightarrow \infty$ için $\phi \rightarrow 0$ ve $d\phi/d\zeta \rightarrow 0$ olduğu varsayılırsa, $\Gamma\Delta > 0$ ve $(\Gamma K^2 - \Omega)/\Delta\phi_0^2 = 1/2$ için ϕ fonksiyonu

$$\phi(\zeta) = \text{sech} \left[(\Delta/2\Gamma)^{1/2} \phi_0 \zeta \right], \quad V_0 = 2K\Gamma \quad (3.77)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (3.76) çözümü bir zarf soliton çözümü olarak isimlendirilir [1].

$\zeta \rightarrow -\infty$ için $\phi \rightarrow \phi_0$ olduğu varsayılırsa, $\Gamma\Delta < 0$ ve $(\Gamma K^2 - \Omega)/\Delta\phi_0^2 = 1$ için ϕ fonksiyonu

$$\phi(\zeta) = \phi_0 \tanh \left[(-\Delta/2\Gamma)^{1/2} \phi_0 \zeta \right], \quad V_0 = 2K\Gamma \quad (3.78)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (3.76) çözümü bir faz sıçramasının (şok dalgası) yayılmasını karakterize eder [11].

Ayrıca, $\Gamma\Delta > 0$ veya $\Gamma\Delta < 0$ olması durumunda, $(\Gamma K^2 - \Omega)/\Delta k^2 a_0^2 = 4$ için ϕ fonksiyonu

$$\phi(\zeta) = ka_0/2 = \text{sabit} \quad (3.79)$$

olarak elde edilir. Bu durumda ise (3.76) çözümü bir nonlinear düzlem dalganın yayılmasını karakterize eder [11].

Dikkat edilirse $\Gamma\Delta$ 'nın işareti ne olursa olsun (3.76) ile birlikte (3.79) çözümü ile verilen düzlem dalga çözümü vardır. NLS denkleminin (3.74) başlangıç koşulu dikkate alındığında, özel bir durum olarak, $|\xi| \rightarrow \infty$ için sıfır olan başlangıç uyarıları, eğer $\Gamma\Delta > 0$ ise bir dizi solitona, fakat $\Gamma\Delta < 0$ ise sönen titreşimlere dönüşür [1,2].

3.2.3 $\Gamma\Delta$ 'nın K ile Değişimi ve Bu Değişimin Değerlendirilmesi

$\Gamma\Delta$ teriminin yapısı çok karmaşık olduğundan nümerik işlem yaparak Γ , Δ ve $\Gamma\Delta$ 'nın K ile değişimi elde edilmiştir. Tabaka ve iki yarım-uzayı meydana getiren malzemelerin lineer özellikleri sabit tutulmuş ve malzemelerin nonlineer özellikleri için çeşitli değerler seçilerek $\Gamma\Delta$ 'nın $K = kh$ boyutsuz dalga sayısına göre değişimi incelenmiştir. Lineer özellikler ikinci bölümdeki gibi

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1 \text{ ve } \mu_1 = 4, \mu_2 = 1, \mu_3 = 9$$

olarak seçilmiş ve (C, K) değerleri ise lineer dispersiyon bağıntısının birinci dalından alınmıştır. Nonlineer malzeme sabitleri çeşitli durumlar için;

$$\text{birinci durumda} \quad : (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, 2, -2) \quad \text{için } \Delta = \Delta_1$$

$$\text{ikinci durumda} \quad : (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, -2, 2) \quad \text{için } \Delta = \Delta_2$$

$$\text{üçüncü durumda} \quad : (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, 2, 2) \quad \text{için } \Delta = \Delta_3$$

$$\text{dördüncü durumda} \quad : (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, -2, -2) \quad \text{için } \Delta = \Delta_4$$

olarak seçilmiştir. (2.20) ve Ek A'dan, $\beta_v > 0$ ise ilgili malzeme kaymada sertleşen, $\beta_v < 0$ durumunda ise kaymada yumuşayan davranış gösterir.

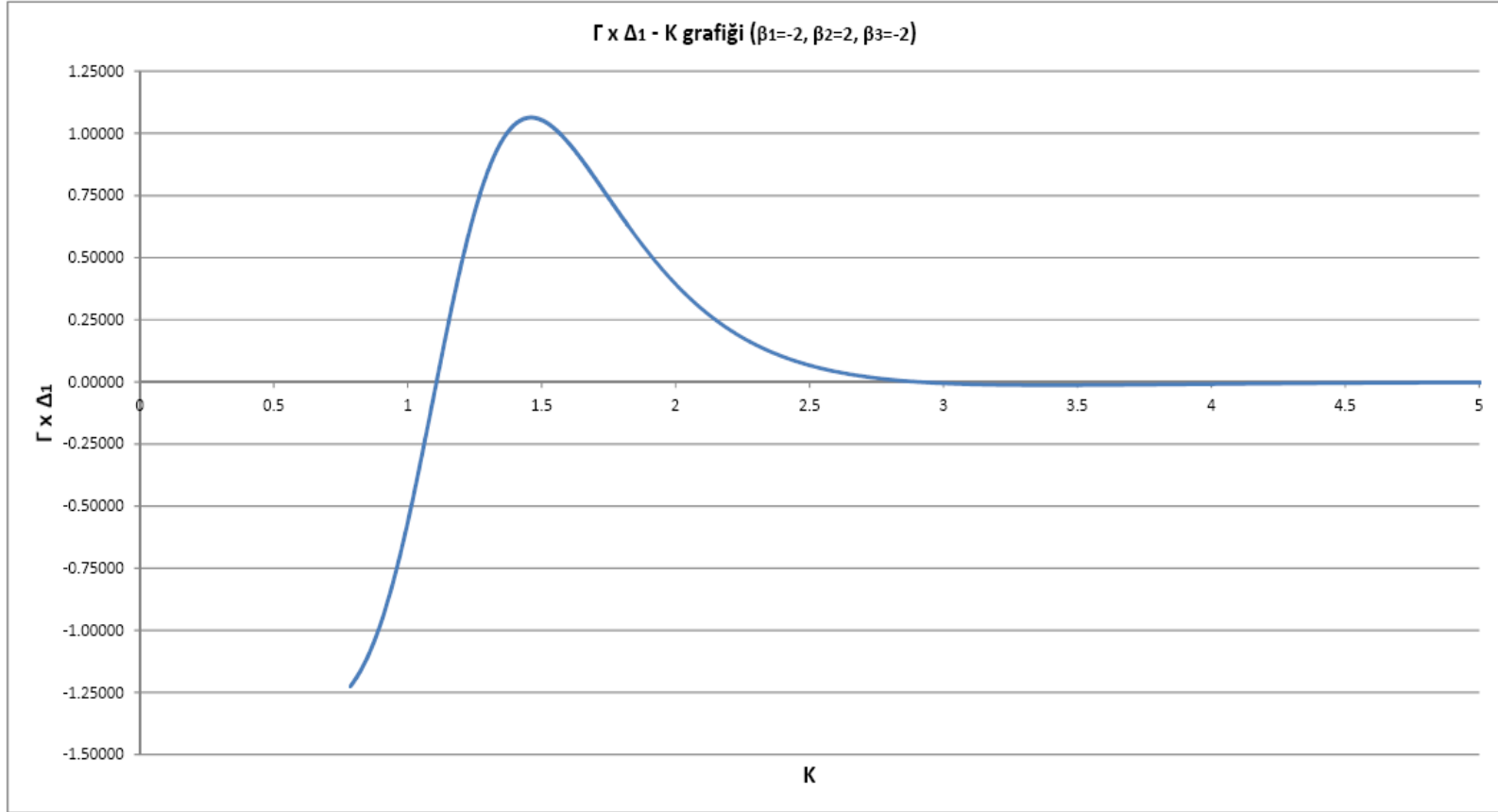
$\Gamma\Delta_1 - K$, $\Gamma\Delta_2 - K$, $\Gamma\Delta_3 - K$ ve $\Gamma\Delta_4 - K$ grafikleri aşağıda sırasıyla şekil 3.1, şekil 3.2, şekil 3.3 ve şekil 3.4'te verilmiştir. $\Gamma - K$ ile $\Delta_1 - K$, $\Delta_2 - K$, $\Delta_3 - K$ ve $\Delta_4 - K$ grafikleri ise Ek C'de sırasıyla Şekil C.1 ile Şekil C.2, Şekil C.3, Şekil C.4 ve Şekil C.5'te verilmiştir.

Şekil 3.1'de Tabakanın sertleşen, iki yarım-uzayın ise yumuşayan malzemelerden oluştuğu durum için sonuçlar gösterilmiştir. Şekil 3.2'de ise şekil 3.1'deki durumun tam tersi durum söz konusudur. Yani, tabakanın yumuşayan, iki yarım-uzayın ise sertleşen malzemelerden oluştuğu durum için sonuçlar gösterilmiştir. Dikkat edilirse şekil 3.1 ve şekil 3.2'deki grafikler yatay eksene göre simetriktir.

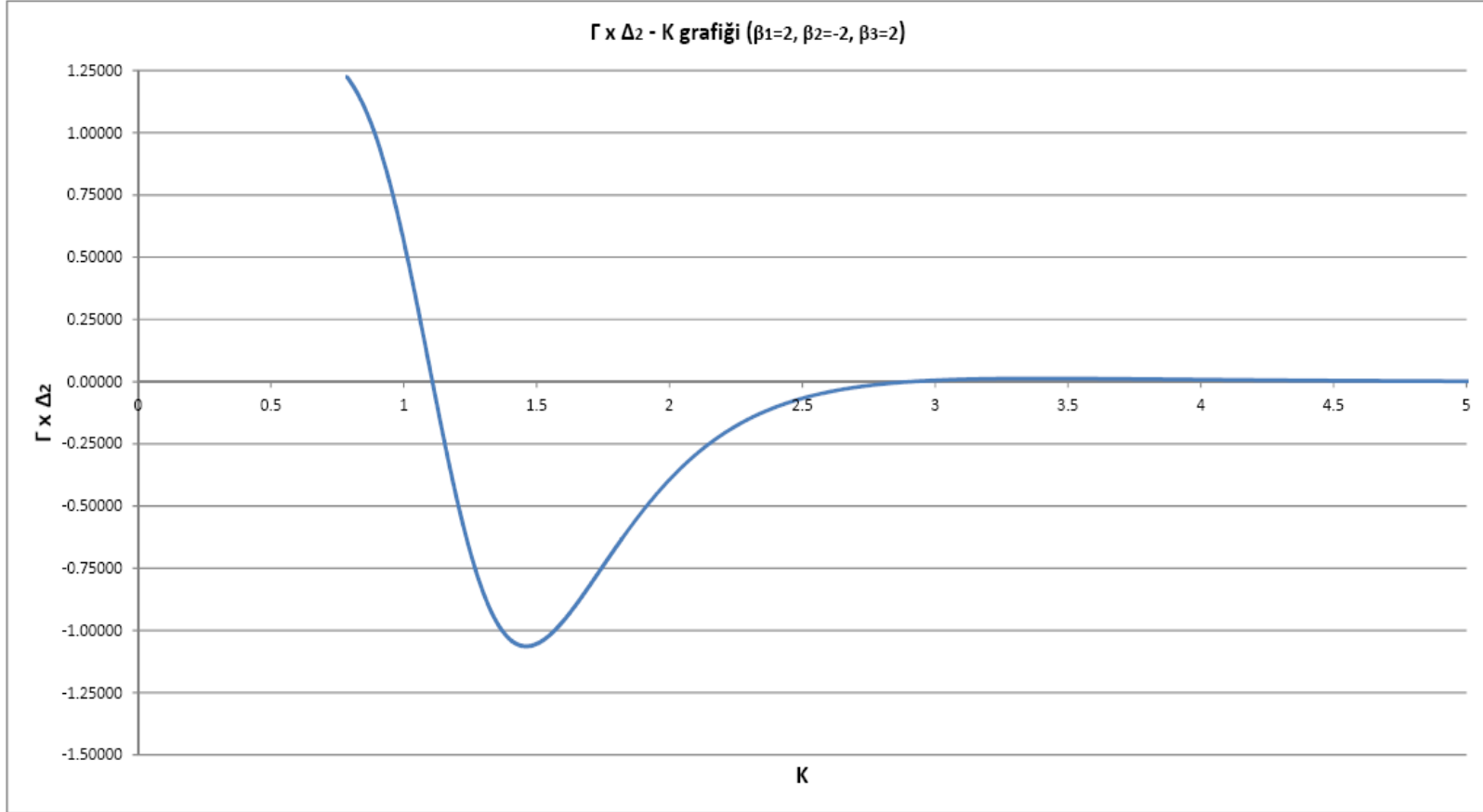
Şekil 3.3'te tüm ortamların sadece sertleşen malzemelerden oluştuğu durum için sonuçlar gösterilmiştir. Şekil 3.4'te ise şekil 3.3'teki durumun tam tersi durum söz konusudur. Yani, tüm ortamların sadece yumuşayan malzemelerden oluştuğu durum için sonuçlar gösterilmiştir. Yine şekil 3.3 ve şekil 3.4'teki grafikler yatay eksene göre simetriktir.

Şekil 3.3 incelendiğinde, tüm ortamların sadece sertleşen malzemelerden oluştuğu durumda $0.7610 < K < 2.9$ için $\Gamma\Delta > 0$ olduğundan, (3.77)'de belirtilen soliton dalgaların var olduğu görülür. Şekil 3.4'te ise tüm ortamların sadece yumuşayan malzemelerden oluştuğu durumda $0.7610 < K < 2.9$ için $\Gamma\Delta < 0$ olduğundan, dalgaların sönen titreşimlere dönüşeceği gözlemlenmektedir [1,2].

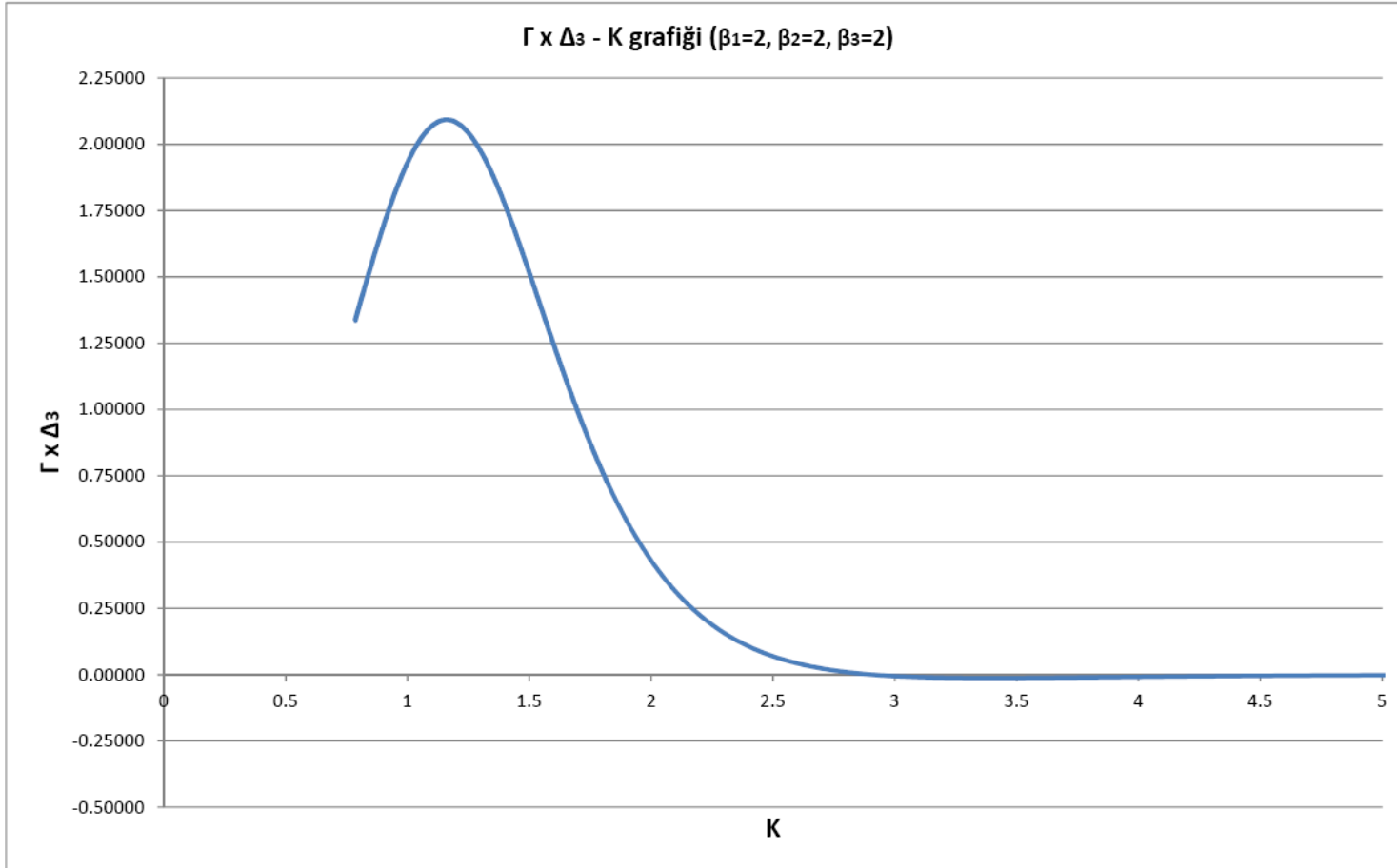
Tüm şekillerden şu genel sonuçlar çıkarılabilir; $\Gamma\Delta$ 'nın işaretini, $0.7610 < K < 1.11$ için yarım-uzay ortamlarındaki malzemelerin nonlinear özellikleri, $K > 1.11$ için ise tabaka ortamındaki malzemenin nonlinear özelliği belirlemektedir.



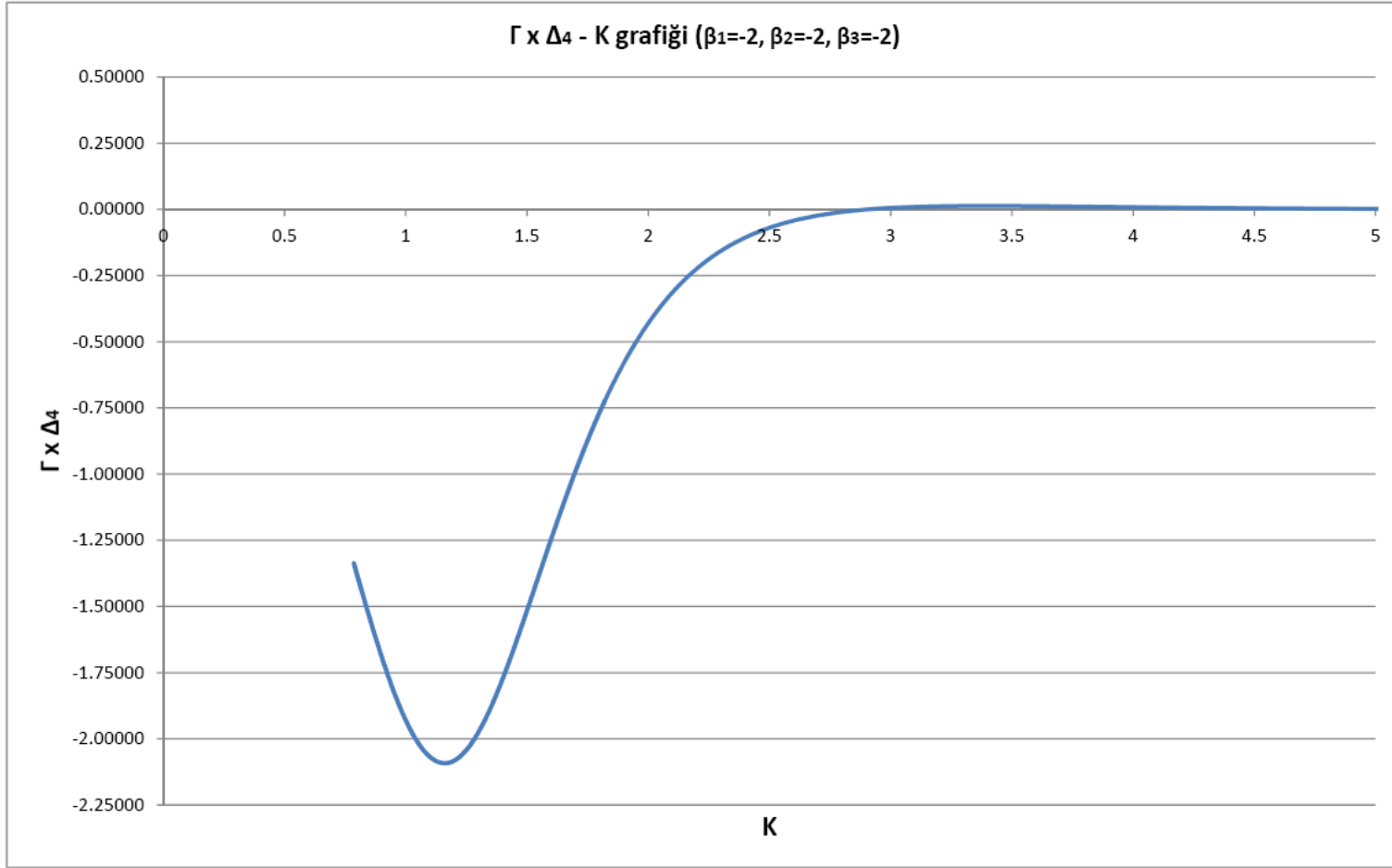
Şekil 3.1 : $\Gamma \Delta_1$ 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, 2, -2)$.



Şekil 3.2 : $\Gamma \Delta_2$ 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, -2, 2)$.



Şekil 3.3 : $\Gamma \Delta_3$ 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, 2, 2)$.



Şekil 3.4 : $\Gamma \Delta_4$ 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, -2, -2)$

4. SONUÇ

Bu çalışmada, genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluşan, üniform kalınlıklı bir tabaka ile ikiye ayrılmış sonsuz bir elastik ortamda nonlinear enine kayma (SH) dalgalarının yayılmasını modelleyen bir sınır değer probleminin asimptotik çözümleri incelenmiştir. Dalga genliklerinin sonlu fakat küçük oldukları ve buna bağlı olarak lineer yayılma olayında olduğu gibi yerdeğiştirme doğrultusuna dik düzlemdeki Cauchy gerilmelerinin yaklaşık olarak sıfır oldukları kabul edilmiştir. Bu koşul altında nonlinear enine kayma dalgaları, lineer haldeki gibi bu düzlem içinde etkiyen sürekli kütle kuvvetlerine ihtiyaç duyulmadan oluşturulabilir. Bu şartlar altında nonlinearlik derecesi üçten büyük olan terimler ihmal edilerek hareket denklemleri ve bunlara eşlik eden sınır koşulları elde edilmiştir. Sınır koşulları türetilirken yarım-uzaylar ve tabaka arasındaki ara yüzeylerde gerilmelerin ve yerdeğiştirmelerin sürekli oldukları kabul edilmiştir.

Yukarıdaki gibi tanımlanan nonlinear sınır değer problemin SH tipi enine kayma dalgalarının self modülasyonunu karakterize eden çözümü değişik ölçekler yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Bu analiz sonucunda, nonlinear dalga modülasyonunun bir nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

NLS denkleminin çözümlerinin davranışı, başlangıç koşulları yanında denklemin katsayı fonksiyonları Γ ve Δ 'nın çarpımlarının işaretine bağlı olduğundan, tabakayı ve iki yarım-uzayı oluşturan malzemelerin nonlinear özellikleri için çeşitli değerler seçilerek $\Gamma\Delta$ çarpımının değişimi, boyutsuz dalga sayısı K 'ya göre incelenmiştir. Lineer dispersiyon bağıntısı ışığında, yayılmanın var olduğu K aralığı $K > 0.7610$ 'dur.

Yapılan inceleme sonucunda, ortamlardaki malzemelerin nonlinear özelliklerinin $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretini etkilediği görülmüştür. Genel olarak, $\Gamma\Delta$ 'nın işaretini, $0.7610 < K < 1.11$ için yarım-uzay ortamlarındaki malzemelerin nonlinear özellikleri, $K > 1.11$ için ise tabaka ortamındaki malzemenin nonlinear özelliği belirlemektedir. Dolayısıyla, dalga yayılmasının davranışının, malzemelerin nonlinear özelliklerinden etkilendiği gözlemlenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Ablowitz, M. J. and Segur, H.** (1981). Solitons and Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia.
- [2] **Dodd, R. K., Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D. and Morris, H. C.** (1982). Solitons and Nonlinear Waves, Academic Press, London.
- [3] **Eringen, A. C.** (1967). Mechanics of Continua, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [4] **Eringen, A. C. and Şuhubi, E. S.** (1974). Elastodynamics, Vol. 1 , Finite Motions, Academic Press, New York.
- [5] **Eringen, A. C. and Şuhubi, E. S.** (1975). Elastodynamics, Vol. 2 , Linear Theory, Academic Press, New York.
- [6] **Jeffrey, A. and Kawahara, T.** (1982). Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Pitman, Boston.
- [7] **Love, A. E. H.** (1911). Some Problems of Geodynamics, Cambridge Univ. Press, London.
- [8] **Love, A. E. H.** (1944). Mathematical Theory of Elasticity, 4th Edition, Dover Publications Inc., New York.
- [9] **Stoneley, R.** (1924). Proc. Roy. Soc., London. A 106, pp. 416-428.
- [10] **Stoneley, R. and Tillotson, E.** (1928). Monthly Notices Roy. Astron. Soc. : Geophys. Suppl., 1, pp. 521-527.
- [11] **Teymur, M.** (1988). Int. J. Engng. Sci., 26, 907.
- [12] **Teymur, M.** (1989). In Nonlinear Wave Motion (Ed. by Jeffrey, A.), pp. 205-228, Wiley, New York.
- [13] **Teymur, M.** (1996). Int. J. Engng. Sci., 34, 227.
- [14] **Var, H. İ.** (1997). Tabakalı Bir Hiperelastik Yarım Uzayda Nonlineer Yüzey SH Dalgalarının Yayılması, Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

EKLER

EK A: Genelleştirilmiş Neo-Hookean Elastik Ortamlarda Düzlem Dışı Kayma Hareketi

EK B: Dispersiyon Bağıntısı Grafiklerinin Matlab Kodu

EK C: $\Gamma - K$ ve $\Delta_i - K$ Fonksiyonlarının Matlab Kodu ile Bu Fonksiyonların Grafikleri

EK A

Genelleştirilmiş Neo-Hookean Elastik Ortamlarda Düzlem Dışı Kayma Hareketi

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik eksen takımına göre maddesel koordinatları (X_1, X_2, X_3) , uzaysal (Eulerian) koordinatları ise (x_1, x_2, x_3) sıralı sayıları ile gösterilmek üzere

$$x_k = X_K \delta_{kK} + u_3(X_\Delta, t) \delta_{k3} \quad (\text{A.1})$$

denklemleri ile ifade edilen bir şekil değiştirme, genelleştirilmiş kayma hareketi olarak isimlendirilir [4]. Bu denklemde, u_3 bir parçacığın X_3 doğrultusundaki yerdeğiştirme fonksiyonunu, t zamanı, δ_{kK} ise Kronecker sembolünü göstermektedir. Ayrıca, Latin indislerinin $(1, 2, 3)$, Yunan indislerinin ise $(1, 2)$ değerlerini alacakları ve (A.1)'de ve bundan sonra, tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar, tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde ise 1'den 2'ye kadar toplam yapılacağı kabul edilmektedir.

(A.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketine ait şekil değiştirme gradyanları

$$[x_{k,K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 \end{bmatrix}, \quad [X_{K,k}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_{3,1} & -u_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

olarak elde edilir. Burada, virgülden sonraki alt indis, bu indisin belirttiği kartezyen koordinata göre kısmi türevi göstermektedir. Dikkat edilirse (A.2)'de

$$j = \det[x_{k,K}] = 1 \quad (\text{A.3})$$

dir. Dolayısıyla, (A.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketi izokorik bir şekil değiştirme hareketidir, yani bu hareket sırasında hacim değişmez. Buna bağlı olarak da bu hareketin meydana geldiği ortamın yoğunluğu ρ da değişmez, yani

$$\rho = \rho_0 = \text{sabit} \quad (\text{A.4})$$

dir.

T_{kk} birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörünü göstermek üzere harekete etki eden kütle kuvvetleri bulunmadığında (A.1) ile tanımlanan hareketin referans konumundaki denklemleri

$$T_{\Delta\beta,\Delta} = 0, \beta = 1, 2; \quad T_{\Delta 3,\Delta} = \rho_0 \ddot{u}_3 \quad (\text{A.5})$$

olarak yazılır. Burada, u_3 'ün üzerindeki bir nokta zamana göre kısmi türevi göstermektedir. Cauchy gerilme tansörü t_{kl} ile birinci tür Piola-Kirchoff gerilme tansörü T_{Kl} arasındaki

$$T_{Kl} = j X_{K,k} t_{kl} \quad (\text{A.6})$$

bağıntısı ve (A.3) dikkate alınır, (A.2) de kullanılarak (A.5) hareket denklemleri Cauchy gerilme tansörü t_{kl} cinsinden sırasıyla

$$(\delta_{\Delta\alpha} t_{\alpha\beta})_{,\Delta} = 0, \beta = 1, 2; \quad (\delta_{\Delta\alpha} t_{\alpha 3})_{,\Delta} = \rho_0 \ddot{u}_3 \quad (\text{A.7})$$

olarak yazılır.

Genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluşan bir ortam için gerilme bünye denklemleri [3],

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \Phi c_{kl}^{-1} \quad (\text{A.8})$$

olarak tanımlanır. Burada c_{kl}^{-1} bileşenleri

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K} \quad (\text{A.9})$$

ile verilen Finger şekil değiştirme tansörüdür. Φ ve basınç fonksiyonu p ise

$$\Phi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1}, \quad p = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \quad (\text{A.10})$$

olarak tanımlanmaktadır. (A.10)'da Σ gerilme potansiyeli fonksiyonunu göstermektedir. I_1 ise Finger şekil değiştirme tansörünün asal invaryantlarından ilki olup

$$I_1 = tr(c^{-1}) \quad (\text{A.11})$$

olarak ifade edilmektedir. Bu tansörün diğer asal invaryantları I_2 ve I_3 , genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluşan bir ortamın hareket denklemlerini etkilemediğinden bu asal invaryantların açık ifadeleri burada gösterilmeyecektir.

Finger şekil değiştirme tansörü, (A.2) ve (A.9) kullanılarak

$$c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{3,1} \\ 0 & 1 & u_{3,2} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 + K^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, asal invaryant I_1 ve K^2

$$I_1 = 3 + K^2, \quad K^2 = u_{3,\Delta} u_{3,\Delta} = u_{3,1}^2 + u_{3,2}^2 \quad (\text{A.13})$$

olarak bulunur.

Genelleştirilmiş neo-Hookean malzemenin gerilme potansiyeli Σ yalnızca I_1 invaryantına bağlı olduğundan, Σ 'nin I_1 'in analitik fonksiyonu olduğunu kabul ederek bu fonksiyon, gerilmesiz doğal durum etrafında $I_1 - 3$ 'ün kuvvetleri cinsinden aşağıdaki formda bir seri olarak yazılabilir;

$$\Sigma(I_1) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{p00} (I_1 - 3)^p \quad (\text{A.14})$$

Burada, c_{p00} sabitleri

$$c_{p00} = \frac{1}{p!} \frac{d^p \Sigma}{dI_1^p} (3) \quad (\text{A.15})$$

olarak tanımlanmaktadır.

(A.10) ve (A.12) kullanılarak (A.8)'deki gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} t_{11} &= t_{12} = t_{21} = t_{22} = 0, \\ t_{13} &= t_{31} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} u_{3,1}, \\ t_{23} &= t_{32} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} u_{3,2}, \\ t_{33} &= 2K^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

olarak elde edilir. Şimdi

$$\tau = \sqrt{t_{13}^2 + t_{23}^2} \quad (\text{A.17})$$

bağıntısı ile bir kayma gerilmesi tanımlanırsa, (A.16)'dan

$$\tau = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} K \quad (\text{A.18})$$

elde edilir. K kayma deformasyonunu ifade ettiğinden (A.18)'deki K 'nın katsayısı ortamın genelleştirilmiş kayma modülü olarak isimlendirilir ve $\hat{\mu}$ ile gösterilir. Dolayısıyla,

$$\hat{\mu} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \quad (\text{A.19})$$

tanımı yapılabilir. (A.14)'ten

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} = c_{100} + 2c_{200}K^2 + \mathcal{O}(K^4) \quad (\text{A.20})$$

elde edilir. (A.20) kullanılarak (A.16)'daki gerilme bileşenleri yeniden yazılır ve bu bileşenler kullanılarak (A.7)'teki üçüncü denklem, mertebesi K^4 ve daha yüksek olan terimler ihmal edilirse,

$$\ddot{u}_3 - c^2 u_{3,\Delta\Delta} = n \mathcal{N}(u_3) \quad (\text{A.21})$$

olarak elde edilir. Burada

$$c^2 = \frac{2c_{100}}{\rho_0}, \quad n = \frac{4c_{200}}{\rho_0}, \quad \mathcal{N}(u_3) = (u_{3,1}K^2)_{,1} + (u_{3,2}K^2)_{,2} \quad (\text{A.22a, b, c})$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca c , lineer bir ortamdaki kayma dalgalarının yayılma hızıdır. Şimdi (A.22a, b) ve (A.20), (A.19)'da kullanılır ve mertebesi K^4 ve daha yüksek olan terimler ihmal edilirse, (A.19)

$$\hat{\mu} = \rho_0 (c^2 + nK^2) \quad (\text{A.23})$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse bu bağıntıda, malzemenin nonlinear özelliklerini ifade eden terim nK^2 dir. Ortamın lineer olduğu durum için bu bağıntı

$$\hat{\mu}_{(K=0)} = \mu = \rho_0 c^2 = 2c_{100} \quad (\text{A.24})$$

olarak bulunur. (A.23)'te; $c^2 > 0$ olduğundan, eğer $n > 0$ ise K arttıkça $\hat{\mu}$ monoton olarak artacak, fakat $n < 0$ ise monoton olarak azalacaktır. Dolayısıyla, $n > 0$ ise kayma hareketinde ortam sertleşen davranış, fakat $n < 0$ ise yumuşayan davranış gösterir.

(A.16) dikkate alındığında, (A.7) hareket denklemlerindeki ilk iki denklem özdeş olarak sağlanır. (A.7)'deki üçüncü denklem ise, çözümü u_3 fonksiyonu olan (A.21) denkleminde dönüşmektedir. Sonuç olarak, (A.1) ile tanımlanan hareket, (X_1, X_2) -düzleminde etkiyen sürekli kütle kuvvetlerine ihtiyaç duyulmadan oluşturulabilir.

Kayma modülünün fiziksel olarak boyut analizi incelenirse; (A.23) denkleminin sağ tarafındaki ilk terimin boyutu, kayma modülünün de boyutu olur. M kütle, L uzunluk ve T zamanı göstermek üzere bu boyut

$$\hat{\mu} \rightarrow \frac{M L^2}{L^3 T^2} = \frac{M}{LT^2} \quad \text{olarak yazılır. Kuvvetin kütle ile boyut cinsinden ilişkisi}$$

$F = M \frac{L}{T^2}$, kayma modülü boyutunda kullanılırsa $\hat{\mu} \rightarrow \frac{F}{L^2}$ elde edilir. Dikkat edilirse, bu boyut bir gerilme boyutudur. Bu da beklenen bir sonuçtur.

EK B

Dispersiyon Bağıntısı Grafiklerinin Matlab Kodu

```
clc
clear

mu1=4;
mu2=1;
mu3=9;

gama1=mu2/mu1;
gama2=mu3/mu2;

c1=sqrt(mu1);
c2=sqrt(mu2);
c3=sqrt(mu3);

m1=c1/c2;
m2=c3/c2;

C=1.0001:0.0001:1.9879;
z=atan((gama1*gama2.*sqrt((C.^2-1).*(1-C.^2/(m2)^2))+sqrt((1-C.^2./(m1)^2).*(C.^2-1)))/(gama1.*(C.^2-1)-gama2.*sqrt((1-C.^2/(m1)^2).*(1-C.^2/(m2)^2))));
for m=1:10
    k(m,:)=(z+pi*m)/sqrt(C.^2-1);
    plot(k(m,:),C,'Color','b');
    hold on;
end
hold on;

C3=1.9880;
z3=pi/2;
for v=1:10
    k3(v,:)=(z3+pi*(v-1))/sqrt(C3.^2-1);
```

```

    plot(k3(v,:),C3,'Color','b');
    hold on;
end

C2=1.9881:0.0001:1.9999;
z2=atan((gama1*gama2.*sqrt((C2.^2-1).*(1-C2.^2/(m2)^2))+sqrt((1-C2.^2/(m1)^2).*(C2.^2-1)))/(gama1.*(C2.^2-1)-gama2.*sqrt((1-C2.^2/(m1)^2).*(1-C2.^2/(m2)^2))));
for j=1:10
    k2(j,:)=(z2+pi*(j-1))./sqrt(C2.^2-1);
    plot(k2(j,:),C2,'Color','b');
    hold on;
end

axis([0 18 0.9 2.1])

xlabel('K');
ylabel('C');
title('C=C(K) grafikleri;1<C<2 ve c1=2, c2=1, c3=3 icin');
grid;

```


EK C

$\Gamma - K$ ve $\Delta_i - K$ Fonksiyonlarının Matlab Kodu ile Bu Fonksiyonların Grafikleri

```
clc
clear

mu1=4;
mu2=1;
mu3=9;

gama1=mu2/mu1;
gama2=mu3/mu2;

c1=sqrt(mu1);
c2=sqrt(mu2);
c3=sqrt(mu3);

m1=c1/c2;
m2=c3/c2;

w=sym('w');
C=sym('C');

p1=sqrt(1-C^2/m1^2);
p2=sqrt(C^2-1);
p3=sqrt(1-C^2/m2^2);

beta1=-2;
beta2=-2;
beta3=-2; % ele alınan durumlar için beta değerleri değiştirilerek fonksiyonlar elde edilir.
```

```

k=sym('k');
h=sym('h');
K=sym('K');

```

```

pp1=sqrt(1-w^2/(k^2*c1^2));
pp2=sqrt(w^2/(k^2*c2^2)-1);
pp3=sqrt(1-w^2/(k^2*c3^2));

```

```

R1=(gama1/p1)*(p2*sin(p2*k*h)-gama2*p3*cos(p2*k*h))*exp(-p3*k*h);
R2=(1/2)*(1+i*gama2*p3/p2)*exp(-p3*k*h)*(cos(p2*k*h)-i*sin(p2*k*h));
R3=(1/2)*(1-i*gama2*p3/p2)*exp(-p3*k*h)*(cos(p2*k*h)+i*sin(p2*k*h));
R4=1;
R=[R1;R2;R3;R4];

```

```

L1=p1*k;
L2=1;
L3=k*(p1*cos(p2*k*h)-gama1*p2*sin(p2*k*h));
L4=(1/p2)*(p1*sin(p2*k*h)+gama1*p2*cos(p2*k*h));
L=[L1 L2 L3 L4];

```

```

W1=[1 -1 -1 0;-pp1*k i*gama1*pp2*k -i*gama1*pp2*k 0;0 cos(pp2*k*h)+i*sin(pp2*k*h) cos(pp2*k*h)-i*sin(pp2*k*h) -exp(-pp3*k*h); 0 -
i*pp2*k*(cos(pp2*k*h)+i*sin(pp2*k*h)) i*pp2*k*(cos(pp2*k*h)-i*sin(pp2*k*h)) -gama2*pp3*k*exp(-pp3*k*h)];

```

```

RR1=(gama1/pp1)*(pp2*sin(pp2*k*h)-gama2*pp3*cos(pp2*k*h))*exp(-pp3*k*h);
RR2=(1/2)*(1+i*gama2*pp3/pp2)*exp(-pp3*k*h)*(cos(pp2*k*h)-i*sin(pp2*k*h));
RR3=(1/2)*(1-i*gama2*pp3/pp2)*exp(-pp3*k*h)*(cos(pp2*k*h)+i*sin(pp2*k*h));
RR4=1;
RR=[RR1;RR2;RR3;RR4];

```

```

dRdk=diff(RR,k);
dRdw=diff(RR,w);
dW1dk=diff(W1,k);
d2W1dk2=diff(dW1dk,k);

```

$$dW1dw=diff(W1,w);$$

$$d2W1dw2=diff(dW1dw,w);$$

$$d2W1dwdk=diff(dW1dk,w);$$

$$F1=(beta1*gama1^3*k^2/8*(9*p1^4+2*p1^2-3)/p1^5*(p2*sin(p2*K)-gama2*p3*cos(p2*K))^3+beta2*k^2/8*(9*p2^4-2*p2^2-3)/p2^5*(p2*cos(p2*K)+gama2*p3*sin(p2*K))^3-beta2*k^2/32*(9*p2^4-2*p2^2-3)/p2^5*(p2^2+gama2^2*p3^2)*(p2*cos(p2*K)+gama2*p3*sin(p2*K))) * exp(-3*p3*K);$$

$$F2=(-3*beta1*gama1^3*k^3/8*(9*p1^4+2*p1^2-3)/p1^4*(p2*sin(p2*K)-gama2*p3*cos(p2*K))^3+beta2*gama1*k^3/8*(9*p2^4+2*p2^2+9)/p2^4*(p2^2+gama2^2*p3^2)*(p2*sin(p2*K)-gama2*p3*cos(p2*K))+3*beta2*gama1*k^3/8*(9*p2^4-2*p2^2-3)/p2^4*(p2*sin(p2*K)-gama2*p3*cos(p2*K))^3-9*beta2*gama1*k^3/32*(9*p2^4-2*p2^2-3)/p2^4*(p2^2+gama2^2*p3^2)*(p2*sin(p2*K)-gama2*p3*cos(p2*K))+gama1*beta2*k^3*(p2-3*p2^3)/p2^3*(p2*sin(p2*K)-gama2*p3*cos(p2*K))^3-gama1*beta2*k^3*(p2^2+gama2^2*p3^2)/p2^2*(p2*sin(p2*K)-gama2*p3*cos(p2*K))+gama1^3*beta1*k^3*(p1+3*p1^3)/p1^3*(p2*sin(p2*K)-gama2*p3*cos(p2*K))^3)*exp(-3*p3*K);$$

$$F3=(-beta2*gama2*k^3*h/8*(9*p2^4+2*p2^2+9)/p2^4*(p2^2+gama2^2*p3^2)*p3-beta2*k^2/32*(9*p2^4-2*p2^2-3)/p2^4*(p2^2-3*gama2^2*p3^2)-beta3*k^2/8*(9*p3^4+2*p3^2-3)/p3^2)*exp(-3*p3*K);$$

$$F4=(beta2*k^4*h/8*(9*p2^4+2*p2^2+9)/p2^2*(p2^2+gama2^2*p3^2)+beta2*gama2*k^3/8*(9*p2^4+2*p2^2+9)/p2^4*(p2^2+gama2^2*p3^2)*p3-3*beta2*gama2*k^3/32*(9*p2^4-2*p2^2-3)/p2^4*(3*p2^2-gama2^2*p3^2)*p3-3*beta3*gama2*k^3/8*(9*p3^4+2*p3^2-3)/p3+gama2*beta3*k^3*p3*(1+3*p3^2)-gama2*beta2*p3*k^3*(1+3*gama2^2*p3^2))*exp(-3*p3*K);$$

$$F=[F1;F2;F3;F4];$$

$$delta1=(-L*F)/(L*dW1dw*R)/(w*k^2);$$

$$delta=simplify(subs(delta1,[w,k],[K*C*c2/h,K/h]));$$

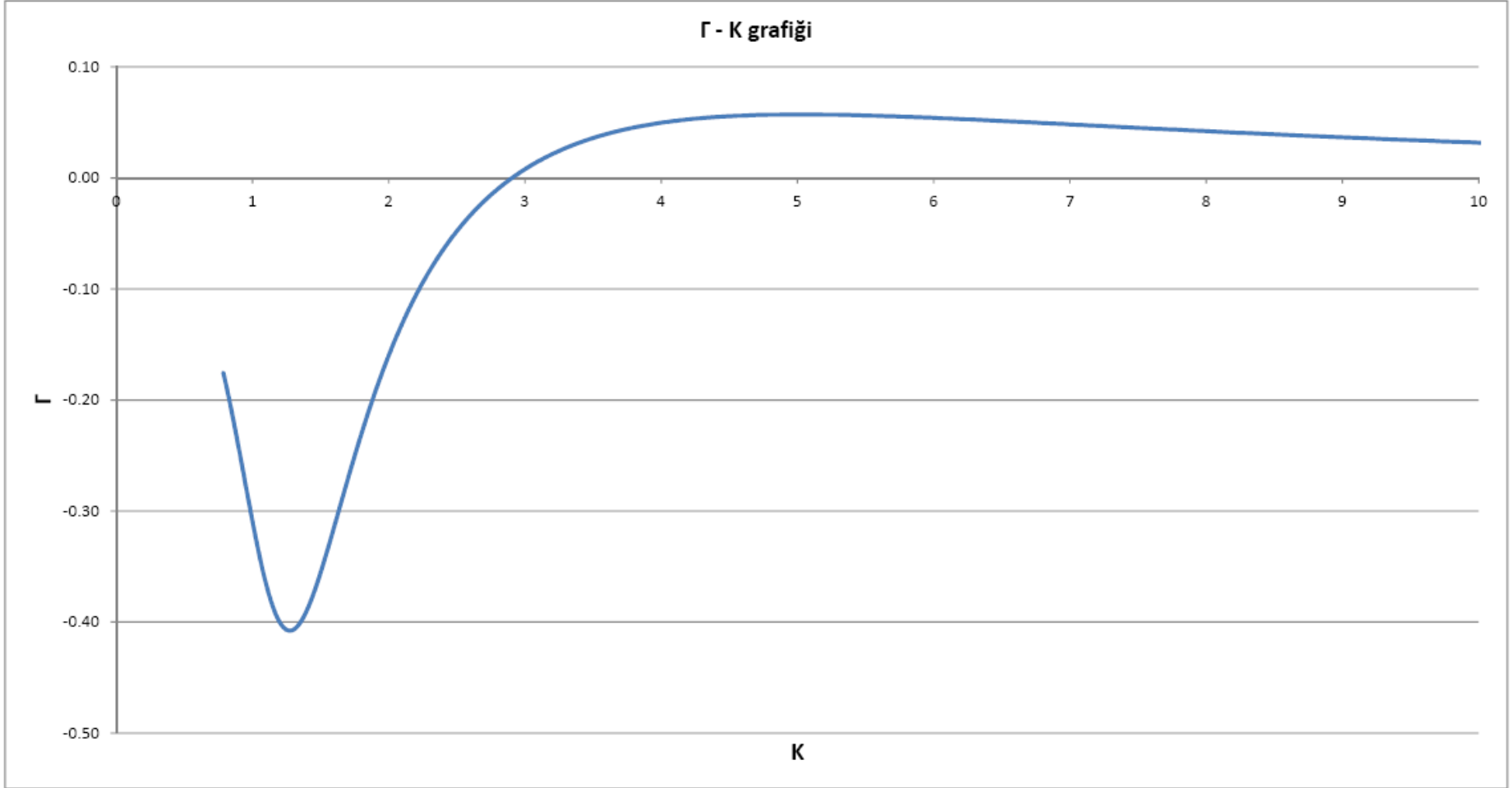
$$Vg=-(L*dW1dk*RR)/(L*dW1dw*RR);$$

$$tilda1=k^2*(-(0.5*L*(Vg^2*d2W1dw2+2*Vg*d2W1dwdk+d2W1dk2)*R+L*(dW1dk+Vg*dW1dw)*(dRdk+Vg*dRdw))/(L*dW1dw*R))/w;$$

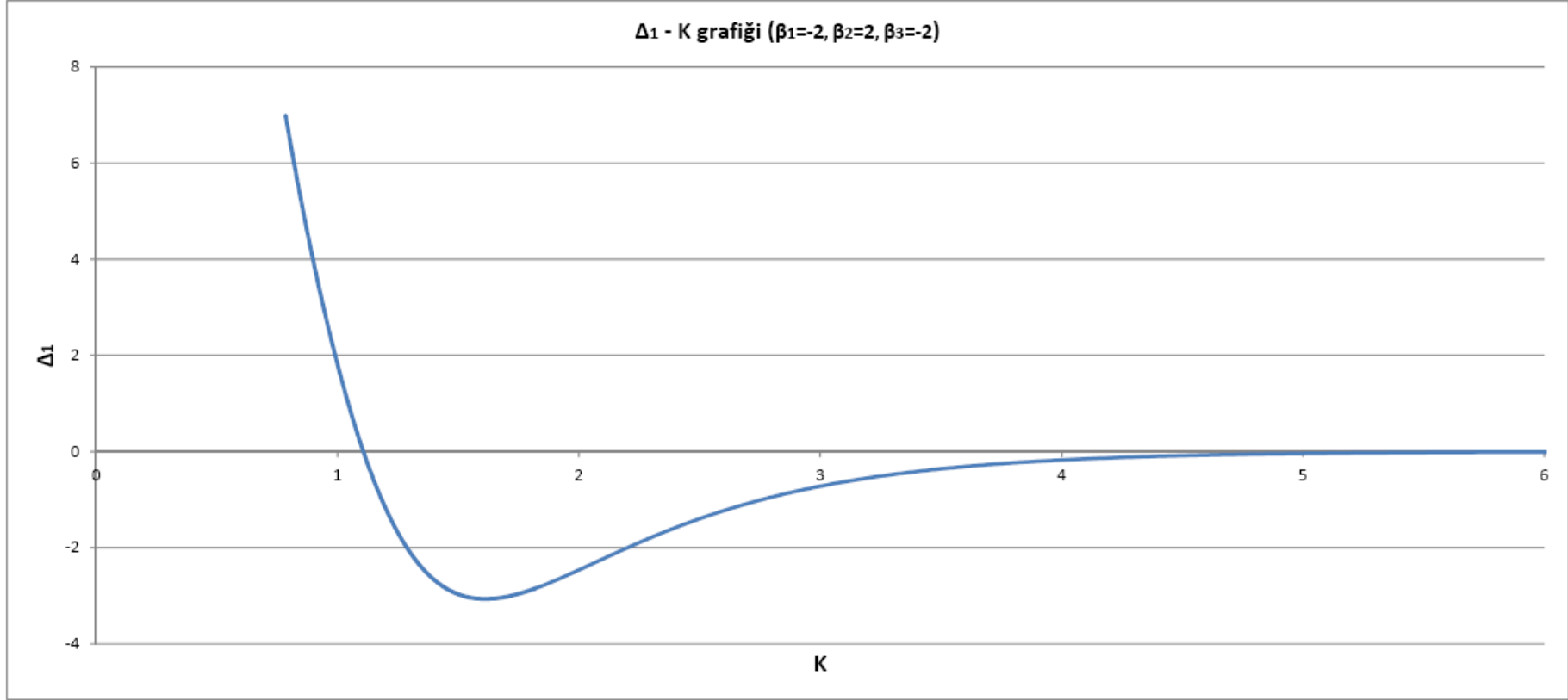
$$tilda=simplify(subs(tilda1,[w,k],[K*C*c2/h,K/h]));$$

$$delta,$$

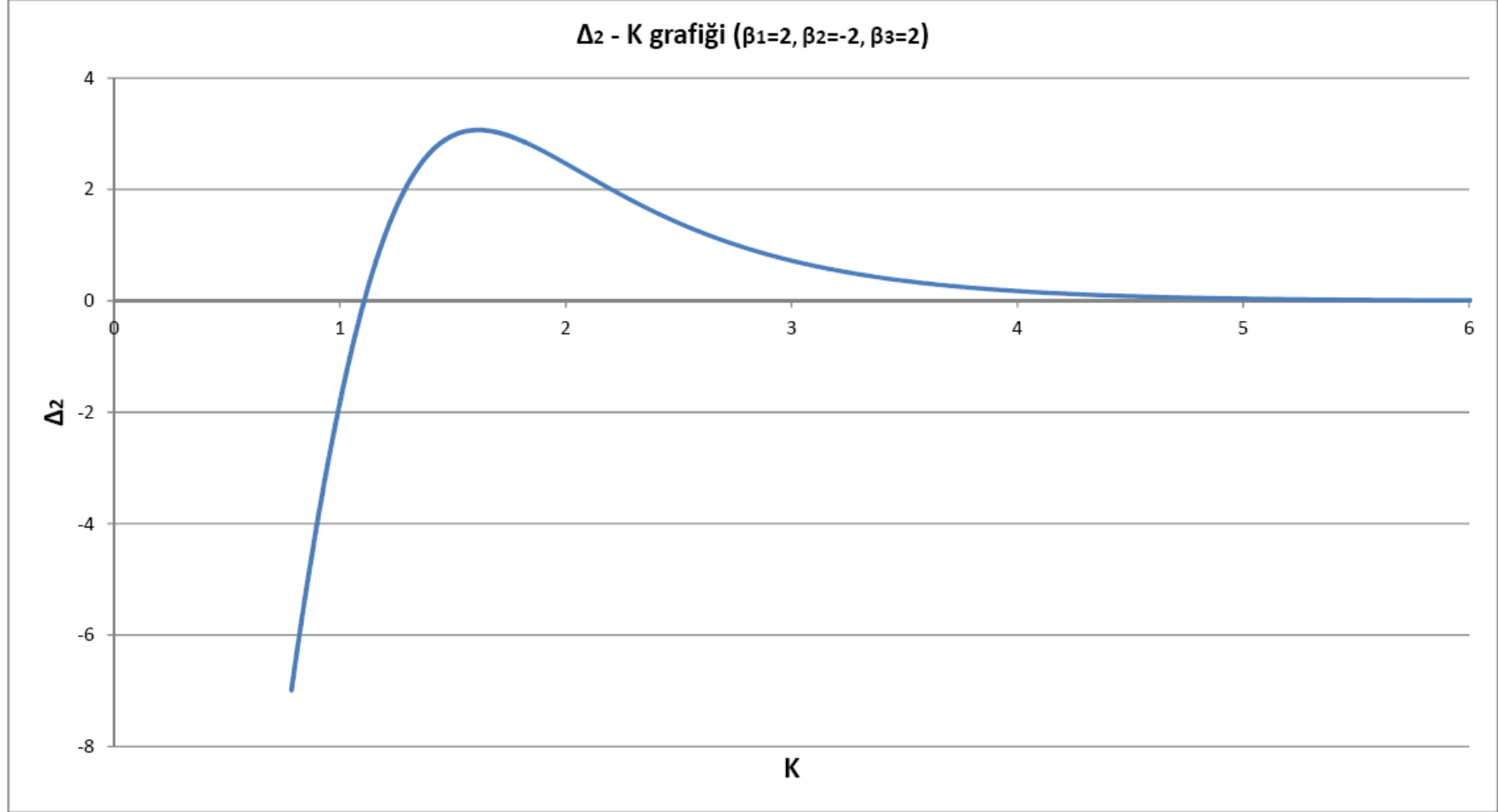
$$tilda;$$



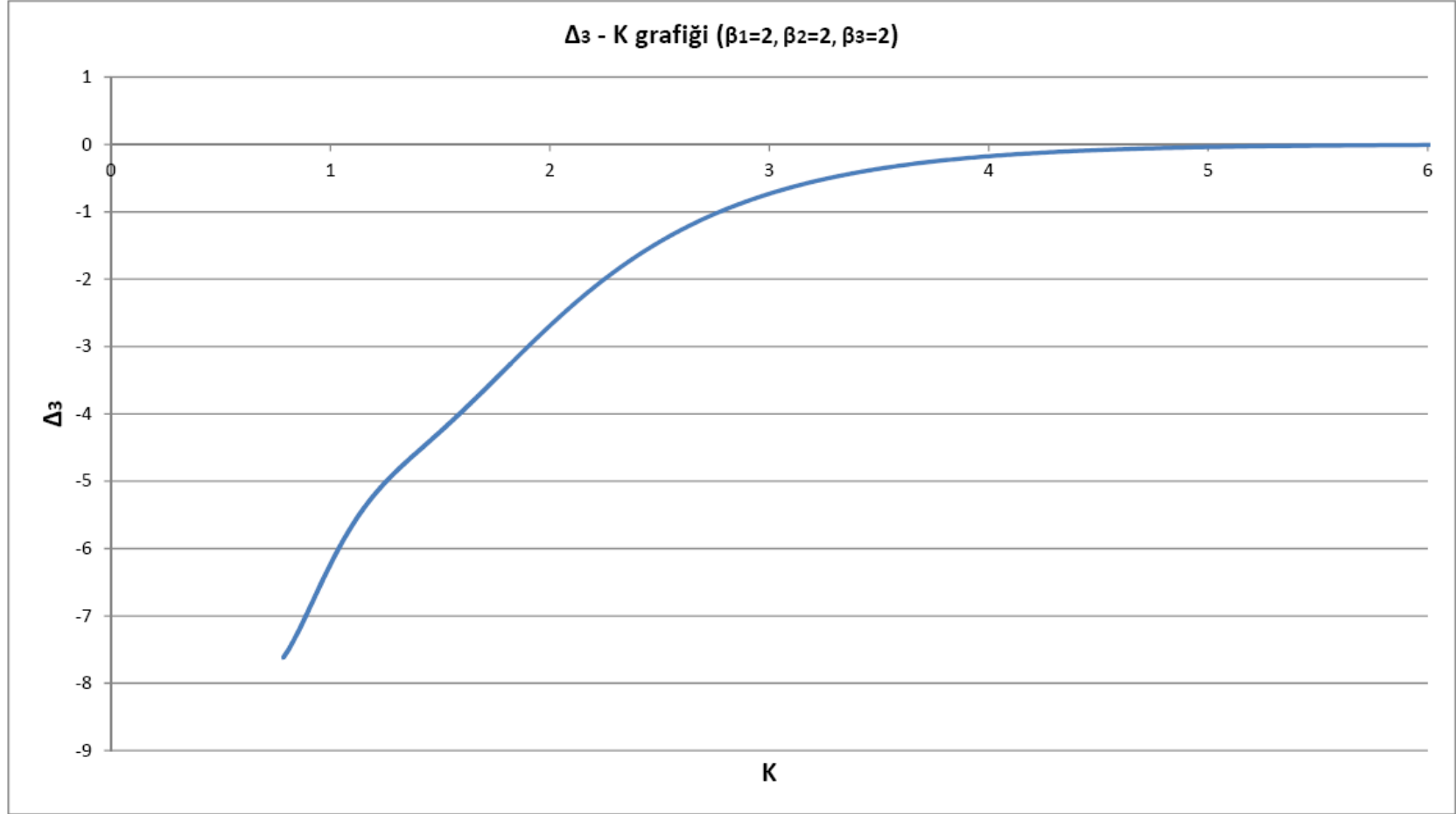
Şekil C.1 : Γ 'nın K 'ya göre değişimi.



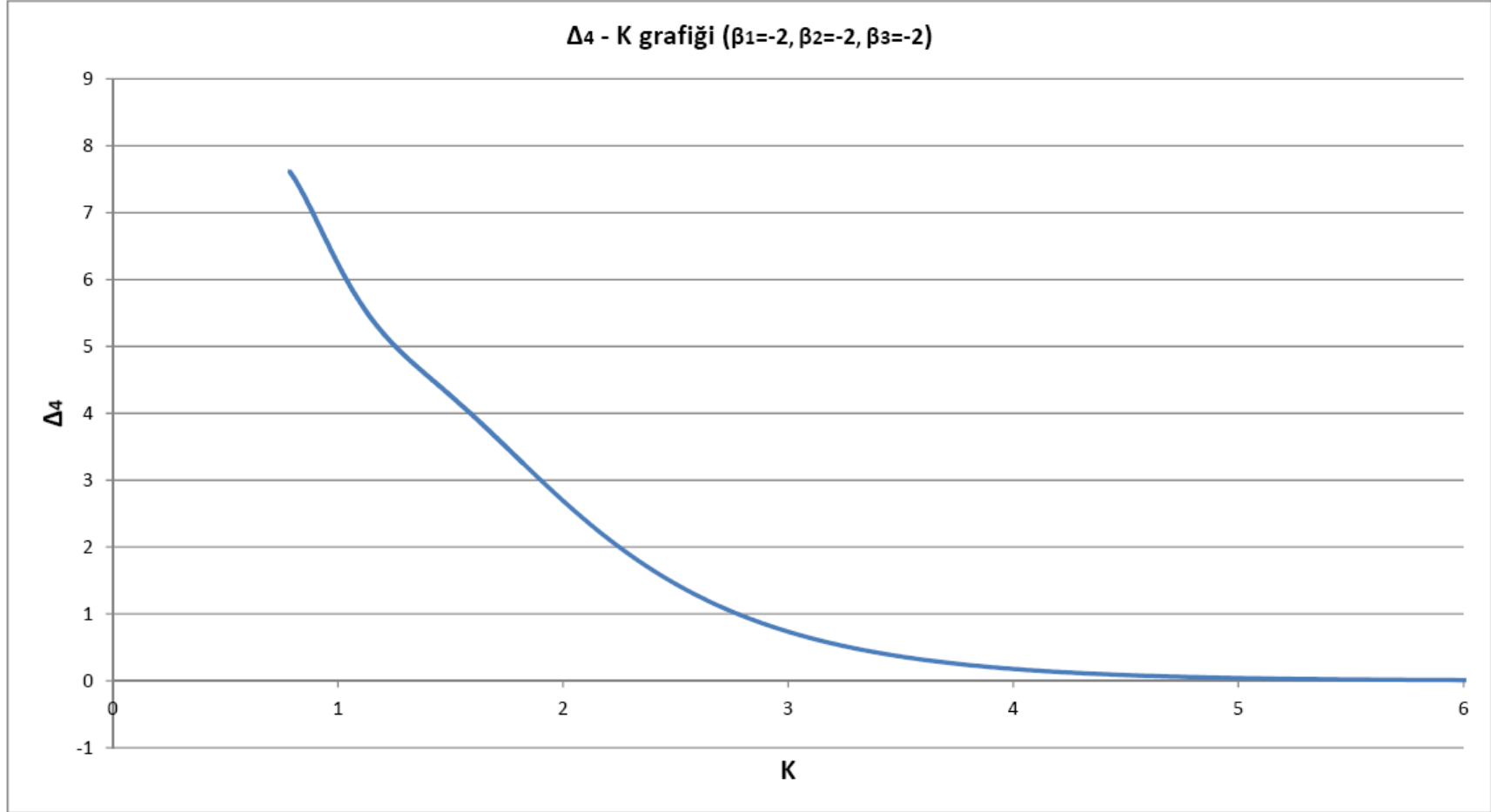
Şekil C.2 : Δ_1 'in K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, 2, -2)$.



Şekil C.3 : Δ_2 'nin K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, -2, 2)$.



Şekil C.4 : Δ_3 'ün K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, 2, 2)$.



Şekil C.5 : Δ_4 'ün K 'ya göre değişimi, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (-2, -2, -2)$.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Hamza KURT

Doğum Yeri ve Tarihi: Mardin / Savur – 20.11.1983

E-Posta: kurtham@itu.edu.tr, kurtham35@hotmail.com

Lise: İzmir Karşıyaka Atakent Anadolu Lisesi

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi / İnşaat Mühendisliği

Mesleki Deneyim ve Ödüller: 2008 yılından beri özel sektörde yapı projelerine yönelik mühendislik faaliyetlerinde bulunmaktadır. Betonarme hesap konusunda Matlab'ta kodlanmış kendine özgü yazılımları mevcuttur. Halen İstanbul Boğazı Karayolu Tüp Geçiş Projesi'nde yapısal tasarım mühendisi olarak çalışmaktadır.