- 2007 -

MAT104

Y.Doç.Dr. Güler Gürpınar Arsan

--. Vektörlerle ilgili...

1/ $x+y=1$ ve $y+z=1$ düzlemleri arasındaki dar açıyı hesaplayınız.

Çözüm: $x+y=1 \Rightarrow \vec{n}_1 = \vec{i}+\vec{j}$

$y+z=1 \Rightarrow \vec{n}_2 = \vec{j}+\vec{k}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{(\vec{i}+\vec{j})\cdot(\vec{j}+\vec{k})}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\theta = \pi/3$ 'dür.

2/ L doğrusu $P_1: x+2y+z=1$ ile $P_2: x-y+2z=-8$ düzlemlerinin arakesit doğrusu olduğuna göre

a) L doğrusunun parametrik denklemini

b) $P_0(1,2,3)$ noktasından geçen ve L doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulunuz?

Çözüm: $P_1: x+2y+z=1$, $\vec{n}_1 = (1,2,1)$

a) $P_2: x-y+2z=-8$, $\vec{n}_2 = (1,-1,2)$

$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ vektörü L doğrusuna paraleldir.

$$\vec{V} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

Y. Doç. Dr. Güler Gürpınar Arsan

2-devamı.

L doğrusunun geçtiği herhangi bir nokta bulmak için

P_1 ve P_2 ; $z=0$ alalım ;

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=1 \\ x-y=-8 \end{array}\right\} \quad x=-5,\ y=3 \text{ olur.}$$

$P(-5,3,0)$ 'dan geçen ve $\vec{V}=5\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$ doğrusuna paralel

olan doğrunun parametrik denklemi ;

$$L: \begin{cases} x = x_0+v_1 t = -5+5t \\ y= y_0+v_2 t = 3-t \\ z= z_0+v_3 t = 0-3t \end{cases}, \quad -\infty<t<\infty$$

bulunur.

b) L doğrusu P düzlemine dik olduğuna göre, düzlemin normali $\vec{n}=\vec{5i}-\vec{j}-3\vec{k}$ 'dır.

$P_0(1,2,3)$'den geçen ve normal doğrultusu $\vec{n}=5\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$

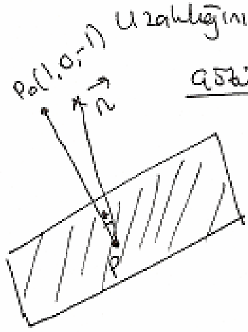
olan düzlemin denklemi

$$5(x-1)-(y-2)-3(z-3)=0$$

$$5x-y-3z+6=0$$

Yrd. Doç. Dr. Güler Gürpınar Arsan

3/ $P_0\,(1,0,-1)$ noktasının $2x+3y-z=2$ düzlemine uzaklığını bulunuz?



Çözüm:

$$d = \left| \vec{PP_0} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

P_0 noktasının düzleme olan uzaklığı;

$2x+3y-z=2$ düzleminin normali $\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

ve $|\vec{n}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$.

Düzlem üzerinde bir P noktası için $y=z=0$ olsun

$2x+3y-z=2$ 'den $x=1$ 'olur. $P(1,0,0)$ seçilmiş olsun.

$$\vec{PP_0} = 0\vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = -\vec{k}$$

$$d = \left| \vec{PP_0} \cdot \frac{(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})}{\sqrt{14}} \right| = \left| -\vec{k} \cdot \frac{(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})}{\sqrt{14}} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Yrd. Doç. Dr. Güler Gürpınar Arsan

4/ $x+2y+z-1=0$ ve $x-y+2z+7=0$

düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel, boyu 2 olan vektörleri bulunuz?

Çözüm; $x+2y+z-1=0 \Rightarrow \vec{n_1}=(1,2,1)$

$x-y+2z+7=0 \Rightarrow \vec{n_2}=(1,-1,2)$

Düzlemlerin arakesit doğrusuna paralel doğrultu; $\vec{v}$

$$\vec{V}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=5\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$$

Bu vektöre paralel vektörler; $\vec{u}=\lambda(5\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k})$ şeklinde bir λ katı olan vektörlerdir. Bu vektörlerin boyu

$$|\vec{u}|=\sqrt{25\lambda^2+\lambda^2+9\lambda^2}=\mp\sqrt{35}\,\lambda \text{ 'dır.}$$

$\mp\sqrt{35}\,\lambda=2 \Rightarrow \lambda=\mp\dfrac{2}{\sqrt{35}}$; ① zaman;

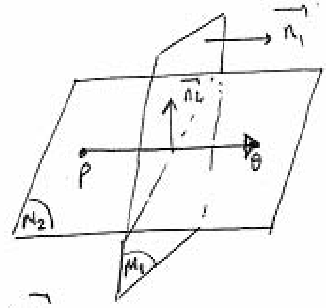
$$\vec{u}=\mp\frac{2}{\sqrt{35}}\left(5\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}\right) \text{ olarak bulunur.}$$

Yrd. Doç. Dr. Güler Gürpınar Arsan

5/ $P(1,2,3)$, $Q(3,2,1)$ noktalarından geçen ve

$4x - y + 2z = 7$ düzlemine dik olan düzlemi bulunuz.

Çözüm: $P(1,2,3)$
$Q(3,2,1)$



$$\vec{PQ} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$M_1 : 4x - y + 2z = 7 \Rightarrow \vec{n}_1 = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

O zaman;

$$\vec{n}_2 = \vec{PQ} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 12\vec{j} - 2\vec{k}$$

$P(1,2,3)$ noktasından geçen ve normali $\vec{n}_2 = (-2,-12,-2)$ olan düzlemin denklemini yazabiliriz.

$$-2(x-1) - 12(y-2) - 2(z-3) = 0$$

$$-2x - 12y - 2z + 32 = 0$$

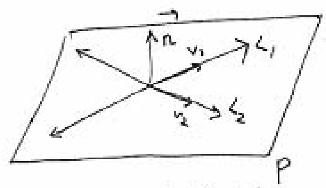
Yrd. Doç. Dr. Güler Gürpınar Arsan

6/ $L_1: \quad x = 2+t \quad, y = 1+t, \quad z = -1+t \quad, \quad -\infty < t < \infty$

$L_2: \quad x = -s \quad, \quad y = 5+2s, \quad z = 1+s \quad, \quad -\infty < s < \infty$

L_1 ve L_2 kesişimleri tarafından belirlenen düzlemin denklemini yazınız?

(sorunun ifadesi şöyle de olabilir: L_1 ve L_2 doğruları tarafından belirlenen düzlemin denklemini bulunuz.)



Çözüm:

L_1 için doğrultu vektörü ; $\vec{v_1} = (1, 1, 1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

L_2 için doğrultu vektörü : $\vec{v_2} = (-1, 2, 1)$ 'dir.
$= -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

Düzlemin normali ise ;

$$\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \text{ 'dir.}$$

Düzlem üzerinde herhangi bir nokta seçersek ; Bu nokta doğrulardan herhangi biri üzerinde seçilebilir.

$t = 1$ için ; $P(3, 2, 0)$ L_1 ve P üzerindedir.

$P_0(3,2,0)$ 'dan noktası olan ve normali $\vec{n} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ olan düzlem denklemini yazarsak;

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$(-\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot \left((x-3)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-0)\vec{k} \right) = 0$$

$$-x - 2y + 3z + 7 = 0$$

///.

Yrd. Doç. Dr. Güler Gürpınar Arsan

7) $L_1: x = 3+2t \ , \ y = -1+4t, \ z = 2-t \ , \ -\infty < t < \infty$

$L_2: x = 1+4s \ , \ y = 1+2s, \ z = -3+4s, \ -\infty < t < \infty$

doğrularının arakesit noktasını bulunuz.

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned} x = 3+2t = 1+4s &\Rightarrow 2t-4s = -2 \\ y = -1+4t = 1+2s &\Rightarrow 4t-2s = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} t=1 \\ s=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ L_1 ve L_2 doğrusunun arakesit noktası $P(5,3,1)$ dir.