

## ÇALIŞMA SORULARI-3 (2009-2010 Güz)

**Dersin adı:** Mat103

**İçerik:** İntegral

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

(a)  $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt,$

(b)  $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}} dr,$

(c)  $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)} dt,$

(d)  $\int \frac{\cos \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \sin^2 \sqrt{\theta}} d\theta,$

(e)  $\int \frac{1}{\theta^2} \sin \frac{1}{\theta} \cos \frac{1}{\theta} d\theta,$

(f)  $\int (\theta^4 - 2\theta^2 + 8\theta - 2)(\theta^3 - \theta + 2) d\theta,$

(g)  $\int x^{1/3} \sin(x^{4/3} - 8) dx,$

(h)  $\int \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \cos^3 \sqrt{\theta}} d\theta,$

(i)  $\int \frac{1 - \cos(6t)}{2} dt,$

(j)  $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx,$

(k)  $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx,$

(l)  $\int \frac{dx}{1 + \cos x},$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

(a)  $\int x \sec x^2 \tan x^2 dx,$

(b)  $\int \frac{\cos^2 y}{7} dy,$

(c)  $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx,$

(d)  $\int 1 - \cot^2 x dx,$

(e)  $\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \sin \theta} d\theta,$

(f)  $\int \sin^{3/4} x \cos^3 x dx,$

(g)  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

(h)  $\int \sqrt{1 + \cos 3x} dx$

(i)  $\int \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 3}{x^{11}}} dx$

(j)  $\int \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^6}} dx$

(k)  $\int \cos(3z + 4) dz$

(l)  $\int y^3 (y^4 + 1)^8 dy$

(m)  $\int \tan^2 \theta d\theta$

(n)  $\int \sin^2 5t \cos 5t dt$

(o)  $\int \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^2 \sin \frac{x}{2} dx$

(p)  $\int \frac{18 \tan^2 x \sec^2 x}{(2 + \tan^3 x)^2} dx$

(q)  $\int \frac{(2x-1) \cos \sqrt{3(2x-1)^2 + 6}}{\sqrt{3(2x-1)^2 + 6}} dx$

3. Aşağıdaki limitleri belirli integral olarak yazın.

(a)  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c_k^2 \Delta x_k, P [0, 2]$ 'nin bir bölünüşüdür.

- (b)  $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 3c_k) \Delta x_k$ ,  $P [-7, 5]$ 'nin bir bölünüşüdür.
- (c)  $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - c_k} \Delta x_k$ ,  $P [2, 3]$ 'nin bir bölünüşüdür.
- (d)  $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$ ,  $P [0, 1]$ 'nin bir bölünüşüdür.
- (e)  $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sec c_k \Delta x_k$ ,  $P [-\pi/4, 0]$ 'nin bir bölünüşüdür.

4. Aşağıdaki limitleri belirli integralin tanımını kullanarak hesaplayın.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n})$

5. Aşağıda verilen fonksiyonların yanlarında belirtilen türevlerini hesaplayın.

- (a)  $y(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$ ,  $y' = ?$
- (b)  $y(x) = \int_{\sqrt{x}}^0 \sin t^2 dt$ ,  $y' = ?$
- (c)  $y(x) = \int_{\tan x}^0 \frac{1}{t^2} dt$ ,  $y'' = ?$
- (d)  $y(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} t\sqrt{t^2+1} dt$ ,  $y' = ?$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

- (a)  $\int_0^1 (1-2x)^3 dx$
- (b)  $\int_9^{16} \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} du$
- (c)  $\int_{-4}^4 |x| dx$
- (d)  $\int_0^{\pi/4} \sin^2 \left(4x - \frac{\pi}{4}\right) dx$

7. Hangi  $a$  ve  $b$  değerleri için  $\int_a^b (4x^2 - x^4) dx$  integrali maksimum değerini alır?

8. Her  $x$  değeri için  $f(x) = f(x+w)$  ve  $f$  sürekli olsun.  $g(x) = \int_x^{x+w} f(t) dt$  şeklinde tanımlanan fonksiyonun sabit olduğunu gösterin.

9.  $f(x) = f(a-x)$  olmak üzere,

$$\int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^{a/2} f(x) dx \text{ ve } 2 \int_0^a x f(x) dx = a \int_0^a f(x) dx$$

olduğunu gösterin.

10.  $\int_0^{\sin^2 x} \sin^{-1} \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \cos^{-1} \sqrt{t} dt = \text{sabit}$  olduğunu gösterin. ( $\sin x, \cos x \geq 0$ )

11.  $a$  ve  $b$  pozitif sayılar olmak üzere  $\int_{t=a}^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_{t=1}^b \frac{1}{t} dt$  olduğunu gösterin. (İpucu:  $t = au$ )

12.  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$  olduğunu gösterin. (İpucu:  $x = \pi - t$ )

13.  $\int_{1/2}^2 \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = 0$  olduğunu gösterin. (İpucu:  $x = 1/t$ )
14.  $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$  olduğunu gösterin.
15.  $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos(\pi x)$ , ( $x > 0$ ) ise  $f(4)$  kaçtır?
16. Birinci bölgede  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$  eğrileri ve  $y$ -ekseni arasında kalan  $R$  bölgesinin alanını hesaplayın.
17.  $y = x^2$ ,  $y = -x^2 + 2$  eğrileri ve  $x$ -ekseni arasında kalan  $R$  bölgesinin alanını hesaplayın.
18.  $y = \frac{x^2}{2} + 4$  ve  $y = |x^2 - 4|$  eğrileri arasında kalan  $R$  bölgesinin alanını hesaplayın.
19. Alttan  $x^2 + y^2 = a^2$  çemberi ve üstten  $y = b$ , ( $-a < b < a$ ) doğrusu ile sınırlanan  $R$  bölgesinin alanını hesaplayın.
20.  $x = y^2$  ve  $x = 2y^2 - y - 2$  eğrileri arasında kalan bölgenin alanını  $y$  değişkenine göre integral alarak hesaplayın.
21.  $y = x^3$  eğrisi ile bu eğriye  $(1, 1)$  noktasında teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını hesaplayın. (İpucu: Teğet doğrunun eğriyi kestiği diğer noktayı bulun.)
22. Aşağıdaki eğrileri tarafında sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunun.
- (a)  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ ,  $y = x^2 - 1$
- (b)  $x + 1 = (y - 1)^2$ ,  $(y - 1)^2 = 1 - x$
- (c)  $y = \frac{1}{2} \sec^2 t$ ,  $y = -4 \sin^2 t$ ,  $t = \mp \frac{\pi}{3}$